[Mathematisches Grundgerüst](#)

Ein Mathematikbuch für die Eingangsklasse

Bearbeitet von
Kurt Bohner, Peter Ihlenburg, Roland Ott, Ronald Deusch

7. Auflage 2016. Taschenbuch. 304 S. Softcover
ISBN 978 3 8120 0206 6
Format (B x L): 17 x 24 cm
Gewicht: 755 g

Wirtschaft > Wirtschaftswissenschaften: Allgemeines > Wirtschaftswissenschaften: Berufe, Ausbildung, Karriereplanung

schnell und portofrei erhältlich bei

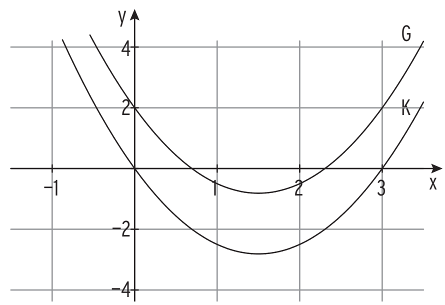
beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

Korrekturblatt zu 3206 / 6. Auflage 2014

Lehrbuch Seite 56

3. c) $g(x) = f(x) + 2$



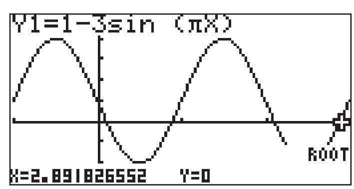
Lehrbuch Seite 109

9. Eine Gleichung 3. Grades lasst sich grafisch durch den Graph einer Polynomfunktion 3. Grades interpretieren, dieser Graph verläuft von II. in IV. oder von III. in I. Quadranten, schneidet die x-Achse also mindestens einmal.

Lehrbuch Seite 182

1. a) $f(x) = 1 - 3\sin(\pi x)$; $D = [-1; 3]$

   K_f entsteht aus der Sinuskurve durch
   Streckung mit Faktor 3 in y-Richtung,
   Streckung mit Faktor $\frac{1}{\pi}$ in x-Richtung
   und Spiegelung an der x-Achse
   und Verschiebung um 1 nach oben.
   Periode $p = 2$; $W: -2 \leq f(x) \leq 4$



Lehrbuch Seite 203

1. $d = 50 \Rightarrow$ Amplitude $a = 25$

   Periode $p = 240 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{\pi}{120}$

   Das Schaubild von h mit $h(t) = 25\sin(\frac{\pi}{120}t)$ verläuft durch den Ursprung und wird so verschoben, dass es durch M(60 | 26) geht, also um 60 nach rechts und 26 nach oben. (M liegt auf der „Mittellinie" nach einer Viertel-Periode.)

   Funktionsterm: $f(t) = 25\sin(\frac{\pi}{120}(t - 60)) + 26$

   Hinweis:

   Ansatz mithilfe einer Kosinusfunktion: $f(t) = -25\cos(\frac{\pi}{120}t) + 26$ oder
   Ansatz ausgehend vom H(0 | 1) bzw. H (120 | 51) : $f(t) = 25\cos(\frac{\pi}{120}(t-120)) + 26$

Bohner
Ihlenburg
Ott
Deusch

Mathematisches Grundgerüst

Ein Mathematikbuch für die Eingangsklasse

Ausführliche Lösungen

zu im Buch gekennzeichneten Aufgaben

ab 6. Auflage 2014
ISBN 3-8120-3206-3

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Merkur
Verlag Rinteln

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 27

1. $f(x) = \frac{5}{3}x - 3;\ x \in \mathbb{R}$

X	Y1
1.8	
1	-1.33
-2	-6.33
4	3.666

a) Vergleich mit der Wertetabelle ergibt:

$P(\frac{9}{5} \mid 0)$ liegt auf dem Schaubild von f: $f(\frac{9}{5}) = 0$

$Q(1 \mid -\frac{13}{10})$ liegt oberhalb: $f(1) = -\frac{4}{3} < -\frac{13}{10}$

$R(-2 \mid -\frac{20}{3})$ liegt unterhalb: $f(-2) = -\frac{19}{3} > -\frac{20}{3}$

b) Ansatz: $f(x) = -\frac{16}{7}$ $\qquad \frac{5}{3}x - 3 = -\frac{16}{7}$

Umformung: $\qquad \frac{5}{3}x = \frac{5}{7}$

$x = \frac{3}{7}$

Interpretation: Der Punkt $P(\frac{3}{7} \mid -\frac{16}{7})$ liegt auf dem Schaubild von f.

c) $f(-2) = -\frac{19}{3}$

Da der neue Funktionswert an dieser Stelle 1 sein soll, muss die Gerade um die Differenz $1 - (-\frac{19}{3}) = \frac{22}{3}$ verschoben werden.

Verschiebung um $\frac{22}{3}$ nach oben: $y = \frac{5}{3}x + \frac{13}{3}$

d) Ansatz: $f(2) = a$ $\qquad \frac{5}{3} \cdot 2 - 3 = a$

Wert für a: $\qquad a = \frac{1}{3}$

Der Punkt $P(2 \mid \frac{1}{3})$ liegt auf der Geraden.

Lehrbuch Seite 30

9. Ansatz: $\qquad G(x) = mx + b$; x in ME und G(x) in GE

Stückgewinn (Gewinn pro ME): $\qquad m = 275\ (\frac{GE}{ME})$

Bei 2 ME Gewinn 350 GE entspricht dem Kurvenpunkt $P(2 \mid 350)$.

Gewinnfunktion: $\qquad G(x) = 275x + b$

Punktprobe mit $P(2 \mid 350)$: $\qquad 350 = 275 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -200$

Gewinnfunktion G mit $\qquad G(x) = 275x - 200$

Ansatz: $G(x) = 1075$ $\qquad 275x - 200 = 1075$

Produktionsmenge: $\qquad x = 4{,}64$

Bei einer Produktionsmenge von 4,64 ME ist der Gewinn 1075 GE.

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 34

6. Aus derTabelle lässt sich ablesen: Vergrößert sich x um 1, so vergrößert sich y um 2, d.h. die Steigung der Geraden beträgt m = 2

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -1 \Rightarrow S_y(0 \mid -1)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(0{,}5 \mid 0)$

Nullstelle liegt rechts von x = 0: y um 1 vergrößern bedeutet x um 0,5 vergrößern; also Nullstelle x = 0,5 und damit $N(0{,}5 \mid 0)$.

Funktionsterm:

m = 2 und b = − 1 ergibt: $f(x) = 2x - 1$

Variante: Bestimmung der Schnittpunkte aus dem Funktionsterm

Schnittpunkte: $f(x) = 0 \Rightarrow N(0{,}5 \mid 0)$

$f(0) = -1 \Rightarrow S_y(0 \mid -1)$

Lehrbuch Seite 37

4. a) Ansatz für G: $g(x) = 4x + b$

G schneidet die x-Achse in x = 4: $g(4) = 0$

$4 \cdot 4 + b = 0 \Leftrightarrow b = -16$

Gleichung von G: $g(x) = 4x - 16$

b) H verläuft durch $P(1 \mid 1)$ und schneidet die x-Achse in x = − 3:

Ansatz: $y = mx + b$

Punktprobe mit $P(1 \mid 1)$: $m + b = 1$ $\quad \cdot (-1)$

Punktprobe mit $N(-3 \mid 0)$: $-3m + b = 0$

$4m = 1 \Rightarrow m = 0{,}25$

Einsetzen ergibt b: $0{,}25 + b = 1 \Rightarrow b = 0{,}75$

Gleichung von H: $h(x) = 0{,}25x + 0{,}75$

Variante:

Bestimmung der Steigung aus $P(1 \mid 1)$ und $N(-3 \mid 0)$: $m = \frac{1 - 0}{1 - (-3)} = \frac{1}{4}$

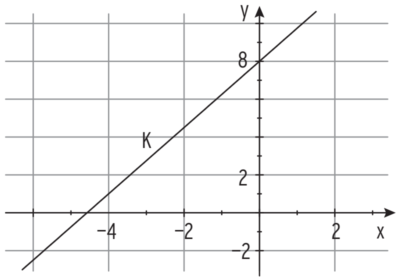
Punktprobe mit $P(1 \mid 1)$ in $y = \frac{1}{4}x + b$: $1 = \frac{1}{4} \cdot 1 + b \Rightarrow b = \frac{3}{4}$

Gleichung von H: $h(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 39

6. K: $f(x) = 1{,}75x + 8 = \frac{7}{4}x + 8$



a) Schaubild K von f

b) G schneidet die y-Achse in S(0 | 1,5)

G schneidet die Gerade K

senkrecht: $m_G = -\frac{4}{7}$

$k(x) = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{2}$

Gleichsetzen: $\frac{7}{4}x + 8 = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{2} \mid \cdot 28$

$49x + 224 = -16x + 42$

$65x = -182$

$x = -\frac{14}{5}$

Einsetzen ergibt: $\frac{7}{4}(-\frac{14}{5}) + 8 = \frac{31}{10}$

G schneidet K in $S(-\frac{14}{5} \mid \frac{31}{10}) = S(-2{,}8 \mid 3{,}1)$

c) Ansatz für H: $h(x) = 1{,}75x + b$

P(0 | 8) wird auf P*(2 | 8) abgebildet.

Punktprobe mit P*(2 | 8) ergibt: $8 = 1{,}75 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 4{,}5$

Geradengleichung von H $y = 1{,}75x + 4{,}5$

H schneidet die y-Achse in 4,5.

Variante:

Verschiebung von K um 2 nach rechts: $h(x) = f(x - 2) = 1{,}75(x - 2) + 8$

Ausmultiplizieren ergibt $h(x) = 1{,}75x + 4{,}5$

H schneidet die y-Achse in 4,5.

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 42

4. a) Aus der Abbildung: K_f hat die Steigung $m = \frac{1}{2}$ und geht durch $(0 \mid 3)$

Gerade K_f von f mit $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

Aus der Abbildung: K_g verläuft durch $(0 \mid \frac{1}{2})$ und $(3 \mid -\frac{3}{2})$

K_g hat also die Steigung $m = -\frac{2}{3}$ und geht durch $(0 \mid \frac{1}{2})$

Gerade K_g von g mit $g(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$

b) Gleichsetzen: $\frac{1}{2}x + 3 = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \quad | \cdot 6$

$3x + 18 = -4x + 3$

$7x = -15 \Rightarrow x = -\frac{15}{7}$

Einsetzen: $\frac{1}{2}(-\frac{15}{7}) + 3 = \frac{27}{14}$

Schnittpunkt $S(-\frac{15}{7} \mid \frac{27}{14})$

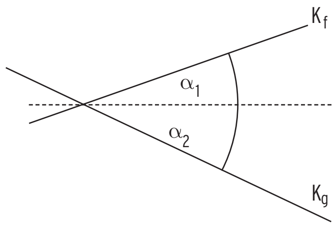
c) Eckpunkte des Dreiecks: $S(-\frac{15}{7} \mid \frac{27}{14})$; $Q(3 \mid \frac{9}{2})$; $P(3 \mid -\frac{3}{2})$

Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}\overline{PQ} \cdot h = \frac{1}{2}(\frac{9}{2} - (-\frac{3}{2}))(3 - (-\frac{15}{7}))$

$A = \frac{108}{7} = 15{,}4$

d) α = PSQ: Schnittwinkel der beiden Geraden (bei S)

$\tan(\alpha_1) = m_g = -\frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_1 = 33{,}7°$



$\tan(\alpha_2) = m_f = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = 26{,}6°$

Schnittwinkel: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 60{,}3°$

Bemerkung: Der Schnittwinkel kann auch mit der Formel für den Schnittwinkel berechnet werden.

e) Bedingung: $f(x) = -3$ $\quad \frac{1}{2}x + 3 = -3$

$\frac{1}{2}x = -6 \Rightarrow x = -12$

x-Koordinate von T: $x_1 = -12$

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 45

4. a) Aus der Abbildung: G hat die Steigung $m = -\frac{3}{4}$ und geht durch (0 | 3)

(Steigungsdreieck mit den Eckpunkten (4 | 0), (4 | 3) und (0 | 3))

Gerade G: $g(x) = -\frac{3}{4}x + 3$

Aus der Abbildung: H verläuft durch (0 | − 4) und (4 |− 1)

H hat also die Steigung $m = \frac{3}{4}$ und geht durch (0 | − 4)

Gerade H: $h(x) = \frac{3}{4}x - 4$

Gleichsetzen: $-\frac{3}{4}x + 3 = \frac{3}{4}x - 4 \mid \cdot 4$

$-3x + 12 = 3x - 16$

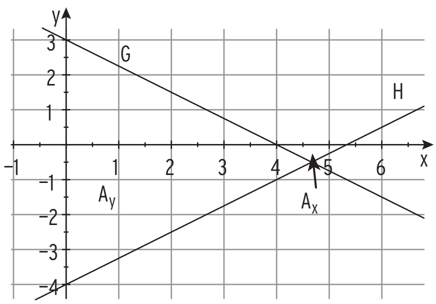
$6x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$

Einsetzen: $\frac{3}{4} \cdot \frac{14}{3} - 4 = -\frac{1}{2}$

Schnittpunkt von G und H: $S(\frac{14}{3} \mid -\frac{1}{2})$

b) G: $S_x(4 \mid 0)$; $S_y(0 \mid 3)$

H: $S_x(\frac{16}{3} \mid 0)$; $S_y(0 \mid -4)$



Fläche mit der x-Achse:

$A_x = \frac{1}{2} \cdot (\frac{16}{3} - 4) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Fläche mit der y-Achse:

$A_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{3} \cdot 7 = \frac{49}{3}$

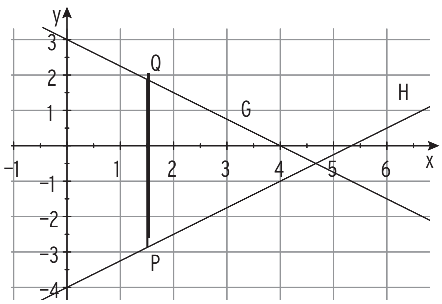
Die Behauptung stimmt.

c) $g(1{,}5) - h(1{,}5) = 1{,}875 - (-2{,}875) = 4{,}75$

Der Abstand der Punkte P und Q ist gleich der Länge der Strecke PQ.

$g(1{,}5) - h(1{,}5) > 0$:

G verläuft oberhalb von H in x = 1,5.



© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 49

7. a) x: verfügbares Einkommen; Konsumfunktion K

Zwei Punkte: P(1000 | 900); Q(1800 | 1460)

Punktprobe in $y = mx + b$ ergibt ein LGS:

P(1000 | 900): $1000m + b = 900$ $\quad \cdot (-1)$

Q(1800 | 1460): $1800m + b = 1460$

Addition: $800m = 560 \Rightarrow m = 0{,}7$

Einsetzen ergibt $1000 \cdot 0{,}7 + b = 900 \Rightarrow b = 200$

Konsumfunktion K: $K(x) = 0{,}7x + 200$

m = 0,7 bedeutet: 70 % des Zuwachses wird ausgegeben für den Konsum.

Von jedem zusätzlich verdienten € werden 0,7 € für den Konsum ausgegeben.

b) Konsumausgaben:

K(800) = 760; K(2500) = 1950; K(4000) = 3000

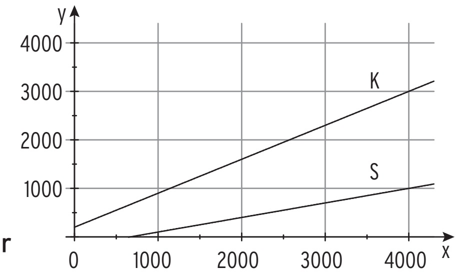
c) Konsumquote bei dem Einkommen x

x = 800: $\frac{760}{800} = 95\ \%$

x = 2500: $\frac{1950}{2500} = 78\ \%$

x = 4000: $\frac{3000}{4000} = 75\ \%$

Je höher das Einkommen, desto mehr nähert sich die Konsumquote 70 % an.



d) Sparleistung S in Abhängigkeit vom Einkommen x

Sparleistung S = Einkommen x minus zugehöriger Konsum K(x)

Funktionsterm: $S(x) = x - K(x) = 0{,}3x - 200$

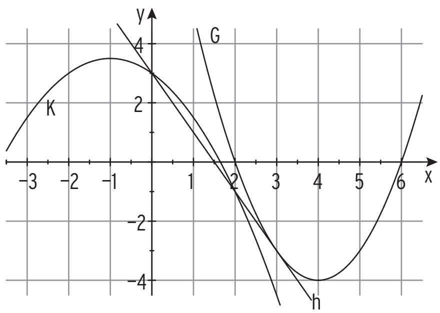
Nullstelle von S: $S(x) = 0$

$0{,}3x - 200 = 0 \Rightarrow x = 666{,}6$

D. h., erst ab einem Betrag (Einkommen) von mehr als 666 € kann ein Individuum etwas sparen (Existenzminimum).

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 71



5. K: $f(x) = -0{,}5x^2 - x + 3$
   G: $g(x) = x^2 - 8x + 12$
   K nach unten geöffnet, durch $S_y(0 \mid 3)$
   $(0 \mid 3)$ legt die Achseneinteilung auf der y-Achse fest.

   G nach oben geöffnet; G hat Normalparabelform
   G schneidet die x-Achse u. a. in $N(2 \mid 0)$
   $(2 \mid 0)$ legt die Achseneinteilung auf der x-Achse fest.

   Gerade h verläuft durch $(0 \mid 3)$ und $(2 \mid -1)$ (ist gleichzeitig Schnittpunkt mit K)
   h hat also die Steigung $m = -2$ und damit die Gleichung $y = -2x + 3$

Schnittpunkte mit K durch Gleichsetzen:	$-0{,}5x^2 - x + 3 = -2x + 3$
Nullform:	$-0{,}5x^2 + x = 0$
Ausklammern:	$x(-0{,}5x + 1) = 0$
zwei einfache Schnittstellen:	$x_1 = 0;\ x_2 = 2$
h schneidet K in 0 und 2	
Schnittpunkte mit G durch Gleichsetzen:	$x^2 - 8x + 12 = -2x + 3$
Nullform:	$x^2 - 6x + 9 = 0$
Binomische Formel:	$(x - 3)^2 = 0$
doppelte Schnittstelle = Berührstelle	$x_{1\mid 2} = 3$
h berührt G in $B(3 \mid -3)$.	

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 73

16. a) K_1 ist der Graph von f wegen $S_y(0 \mid 4)$
    K_2 ist der Graph von g wegen $S_y(0 \mid 2)$

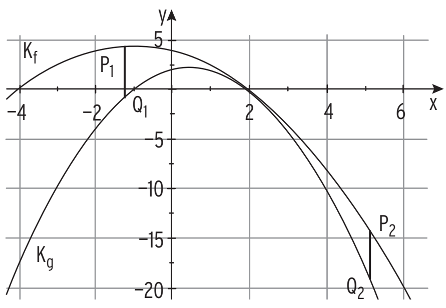
b) Gemeinsamer Punkt $(2 \mid 0)$

Gleichsetzen: f(x) = g(x)	$-0{,}5x^2 - x + 4 = -x^2 + x + 2$
	$0{,}5x^2 - 2x + 2 = 0$
Lösung mit Formel:	$x_{1\|2} = 2 \pm \sqrt{4 - 4}$
Berührstelle	$x_{1\|2} = 2 \quad (D = 0)$

In $(2 \mid 0)$ berühren sich die beiden Graphen, sie durchschneiden sich nicht.
Kein Vorzeichenwechsel der Differenzfunktion: $f(x) - g(x) \geq 0$ für alle x.

c) $f(x) - g(x) = 5$	$-0{,}5x^2 - x + 4 - (-x^2 + x + 2) = 5$
Zusammenfassen:	$0{,}5x^2 - 2x + 2 = 5$
Nullform:	$0{,}5x^2 - 2x - 3 = 0$
Lösung mit Formel:	$x_{1\|2} = 2 \pm \sqrt{4 + 6}$
Lösungen:	$x_1 = -1{,}16$; $x_2 = 5{,}16$

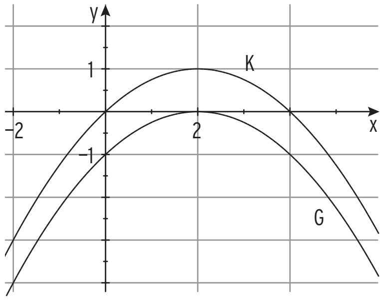
Die Punkte P_1 auf K_1 und Q_1 auf K_2 mit der x-Koordinate $x_1 = -1{,}16$
bzw. die Punkte P_2 auf K_1 und Q_2 auf K_2 mit der x-Koordinate $x_2 = 5{,}16$
haben jeweils einen Abstand von 5.



© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 81

1. a) K schneidet die x-Achse in 0 und in 4.



$f(x) = 0$ $\qquad - 0{,}25x^2 + x = 0$

Ausklammern: $\qquad x(- 0{,}25x + 1) = 0$

einfache Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 4$

Aus Symmetriegründen gilt $x_S = 2$

Einsetzen von $x = 2$ in $f(x)$ ergibt: $f(2) = 1$

Scheitelpunkt: $S(2 \mid 1)$

b) Ursprungsgerade H durch P hat die Steigung $m = \frac{3}{-2}$; also H: $y = - 1{,}5x$

Gleichsetzen: $\qquad - 0{,}25x^2 + x = - 1{,}5x$

Nullform: $\qquad - 0{,}25x^2 + 2{,}5x = 0$

Ausklammern: $\qquad x(- 0{,}25x + 2{,}5) = 0$

einfache Schnittstellen: $\qquad x_1 = 0$; $x_2 = 10$

Einsetzen in die Geradengleichung ergibt die

Schnittpunkte: $S_1(0 \mid 0)$; $S_2(10 \mid - 15)$

c) Gleichung der Parallelen zu H: $\qquad y = - 1{,}5x + b$

Gleichsetzen ergibt: $\qquad - 0{,}25x^2 + x = - 1{,}5x + b$

Nullform: $\qquad - 0{,}25x^2 + 2{,}5x - b = 0$

Vereinfachung: $\qquad x^2 - 10x + 4b = 0$

Bedingung für Berühren: $\qquad D = 100 - 16b = 0 \Rightarrow b = 6{,}25$

doppelte Schnittstelle $\qquad x_{1|2} = \frac{10}{2} = 5$

Gleichung der Parallelen: $\qquad y = - 1{,}5x + 6{,}25$ (Tangente an K)

Einsetzen in die Geradengleichung

ergibt den Berührpunkt: $\qquad B(5 \mid - 1{,}25)$

d) Der Scheitelpunkt der Parabel G muss auf der x-Achse liegen,

also Verschiebung um 1 nach unten: $g(x) = - 0{,}25x^2 + x - 1$

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 82

9. $f(x) = x^2 + tx - 2;\ x, t \in \mathbb{R}$

Das Schaubild K von f ist eine verschobene Normalparabel (a = 1, nach oben geöffnet) durch den Punkt $S_y(0 \mid -2)$.

Schaubild K_c ist eine nach unten geöffnete Parabel und somit kein Schaubild von f.

Schaubild K_b ist keine verschobene Normalparabel. Vom Scheitelpunkt geht man 1 nach rechts und (etwa) 2 nach oben (a = 2). K_b ist kein Schaubild von f.

Schaubild K_a ist eine verschobene Normalparabel, vom Scheitelpunkt geht man 1 nach rechts und 1 nach oben (a = 1), durch den Punkt $S_y(0 \mid -2)$.

Punktptrobe mit P(3 | 1): $1 = 3^2 + t \cdot 3 - 2 \Rightarrow t = -2$

Für t = − 2 ist K_a ein Schaubild von f.

Lehrbuch Seite 85

2. a) Nullstellen von f: f(x) = 0 $-\frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{2}x = 0$

Ausklammern: $x(-\frac{5}{2}x + \frac{19}{2}) = 0$

Einfache Nullstellen: $x_1 = 0;\ x_2 = 3{,}8$

Die Dicke des Diskus beträgt 3,8 cm.

Scheitelkoordinaten: $x_S = \frac{3{,}8}{2} = 1{,}9$ wegen Symmetrie

mit $y_S = f(1{,}9) = -\frac{5}{2}(1{,}9)^2 + \frac{19}{2}(1{,}9) = 9{,}025$

erhält man den Hochpunkt der Parabel: $H(1{,}9 \mid 9{,}025)$

$d = 2 \cdot 9{,}025 = 18{,}05$

Der Durchmesser beträgt 18,05 cm.

b) Schnittstellen von Gerade und Parabel: $-\frac{5}{2}x^2 + \frac{19}{2}x = \frac{65}{8} \quad | \cdot 8$

Nullform und Vereinfachung: $20x^2 - 76x + 65 = 0$

Lösung mit Formel: $x_{1|2} = \frac{76 \pm \sqrt{76^2 - 80 \cdot 65}}{40}$

$x_{1|2} = \frac{76 \pm 24}{40}$

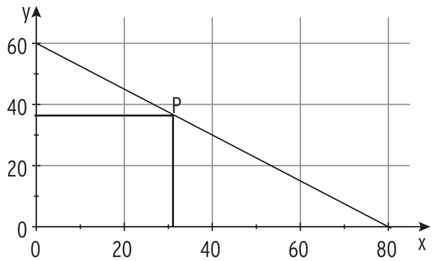
einfache Schnittstellen: $x_1 = 1{,}3;\ x_2 = 2{,}5$

Die Dicke des Diskus an der Stoffgrenze beträgt 2,5cm − 1,3 cm = 1,2 cm.

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 86

8. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems (siehe Abbildung) verläuft die Gerade durch die Punkt (0 | 60) und (80 | 0).



Die Gerade hat die Steigung

$m = -\frac{60}{80} = -\frac{3}{4}$

Geradengleichung $y = -0{,}75x + 60$.

Der Eckpunkt P hat die Koordinaten

x und $y = -0{,}75x + 60$: $P(x \mid -0{,}75x + 60)$

Für den Inhalt des Rechtecks gilt: $A(x) = x \cdot (-0{,}75x + 60)$; $0 < x < 80$

A wird maximal im Scheitel der zugehörigen Parabel.

Die Parabel schneidet die x-Achse in $x = 0$ und $x = 80$

(Der Inhalt des Rechtecks ist jeweils Null)

Aus Symmetriegründen gilt also $x_S = 40$.

Einsetzen ergibt den maximalen Inhalt: $A_{max} = A(40) = 1200$

Der maximale Flächeninhalt beträgt 1200 m².

Lehrbuch Seite 94

7. G: $f(x) = x^3 - 4x - 2$

a) G nicht punktsymmetrisch zu O:

$f(1) = -5$; $f(-1) = 1$;

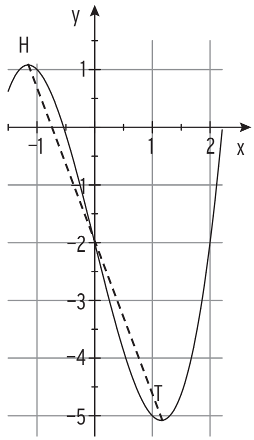
Die Bedingung für Punktsymmetrie $f(-x) = -f(x)$ ist nicht erfüllt

G verläuft vom III. in den I. Quadranten.

Verhalten für $x \rightarrow +\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$

für $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$

b) H ist der höchste Punkt der Böschung.



G ist symmetrisch zu (0 | − 2)

Der tiefste Punkt (des Kanals) hat die

Koordinaten $x_T \approx 1{,}15$ und $y_H \approx -5{,}08$

denn $1{,}08 + 2 = 3{,}08$ und $-2 - 3{,}08 = -5{,}08$

Die größte Tiefe des Kanals beträgt 5,08 m.

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 115

15. Bogen: $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 14x^2 + 53x - 40)$

Probe: $f(1) = 0$; $f(5) = 0$

d.h. das Koordinatensystem kann wie abgebildet gezeichnet werden.

Mit $f(3) = 5$ ergibt sich $P(3 \mid 5)$

Gerade durch $D(0 \mid 8)$ und P

Die Gerade hat die Steigung

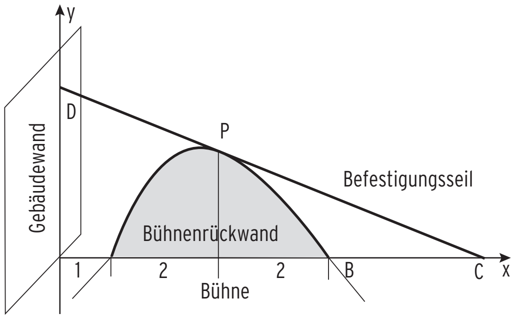
$m = -1$; also $y = -x + 8$

Die Gerade schneidet die x-Achse

in 8: $0 = -x + 8$

Befestigungspunkt $C(8 \mid 0)$

Abstand von B: 3 m



Gleichsetzen (Schnittstellen von Bogenfunktion und Befestigungsseil):

$\frac{1}{4}(x^3 - 14x^2 + 53x - 40) = -x + 8$

ergibt eine doppelte Lösung in $x = 3$

Die Gerade durch P und D berührt

den Bogen in P und schneidet die x-Achse in C.

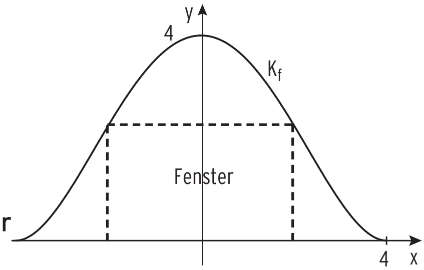
© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 127

1. **Reale Situation:** Giebel eines Barock-Hauses mit Maßen in m.

   Reales Modell: Der Rand soll durch eine Polynomfunktion beschrieben werden.

   Mathematisches Modell:

   f(x): Giebelhöhe (Fensterhöhe)

   Annahme: Der Graph berührt die x-Achse in x = 4 und x = − 4. Zwei Berührpunkte mit der x-Achse erfordern den Graph einer Polynomfunktion 4. Grades.

   Für $-4 \leq x \leq 4$ ergibt sich: Ansatz in Produktform $f(x) = a(x + 4)^2(x - 4)^2$

   Punktprobe mit S(0 | 4) ergibt $a = \frac{1}{64}$

   Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{64}(x + 4)^2(x - 4)^2 = \frac{1}{64}(x^2 - 16)^2 = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

   Mathematische Lösung:

   f(x) beschreibt die Giebelhöhe bzw. die Fensterhöhe in Abhängigkeit von x.
   Für x > 0 entspricht x der halben Fensterbreite.

   Giebelhöhe = Fensterhöhe (2,25)

   Ansatz: f(x) = 2,25 $\quad \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4 = 2,25$

   Nullform: $\quad \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4} = 0 \quad | \cdot 64$

   Vereinfachung: $\quad x^4 - 32x^2 + 112 = 0$

   Substitution: $u = x^2$ $\quad u^2 - 32u + 112 = 0$

   Lösung mit Formel: $\quad u_{1|2} = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 112}}{2}$

   $u_{1|2} = \frac{32 \pm 24}{2}$

   Rücksubstitution: $\quad u_1 = 28 \Rightarrow x = \pm\sqrt{28}$

   $u_2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

   geeignete Schnittstellen $-4 < x < 4$: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$

   Das Fenster kann höchstens 4 m breit sein.

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 129

6. a) Der Wasserspiegel im Becken fällt in den ersten 6 s (Zuflussgeschwindigkeit negativ) und steigt von der 6. bis zur 9. Sekunde (Zuflussgeschwindigkeit positiv).

   b) Nach 9 s befindet sich am meisten Wasser im Becken.

   Es floss die längste Zeit (3 s) Wasser in das Becken.

   c) Bis t = 6 ist das ganze Wasser abgelaufen.

   Zuflussgeschwindigkeit · Zeit ergibt das Volumen $\left(\frac{l}{\text{min}} \cdot \text{min} = l\right)$.

   Die Fläche zwischen der Kurve und der t-Achse entspricht also dem Wasserstand zum Zeitpunkt t = 0.

   Abschätzung als Dreiecksfläche: $V_0 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 220 = 660$

   Zu Beginn (t = 0) sind etwa 660 Liter im Becken.

Lehrbuch Seite 138

3. a) $g(x) = f(x) + 3 = e^{-x} + 3$

   Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = 1$; $b = 3$

   b) $g(x) = -f(x) = -e^{-x}$

   Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = -1$; $b = 0$

   c) $g(x) = 0{,}5f(x) - 6 = 0{,}5e^{-x} - 6$

   Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = 0{,}5$; $b = -6$

   d) $g(x) = e^{-(x-2)} = e^{-x+2} = e^2 \cdot e^{-x}$

   Vergleich mit $g(x) = ae^{-x} + b$ ergibt: $a = e^2$; $b = 0$

   Bemerkungen: Eine horizontale Verschiebung lässt sich durch eine

   Streckung in y-Richtung (Faktor e^2) ersetzen (vgl. Potenzgesetze)

   Gemeinsame Eigenschaft: Alle Kurven haben eine waagrechte Asymptote.

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuchseite 142

2. K: $f(x) = 2 - e^{-x}$

   K verläuft vom 3. in das 1. Feld.

   Die Gerade mit y = 2 ist waagrechte Asymptote.
   $S_y(0 \mid 1)$; $S_x(-0{,}7 \mid 0)$
   $f(-0{,}70) \approx -0{,}01 < 0$; $f(-0{,}69) = 0{,}006... > 0$;
   VZW von f(x) zwischen − 0,70 und − 0,69.
   K entsteht aus dem Schaubild von g ($g(x) = e^{-x}$) durch
   Spiegelung an der x-Achse: $g^*(x) = -e^{-x}$
   und
   Verschiebung um 2 nach oben: $g^*(x) + 2 = f(x)$

Lehrbuch Seite 148

3. a) $e - 2e^{0,5x} = 0$

   $2e^{0,5x} = e$

   $e^{0,5x} = \frac{e}{2}$

   $0{,}5x = \ln(\frac{e}{2})$

   $x = 2\ln(\frac{e}{2})$

   b) $\frac{2}{3}e^{-x} - 2 = 0$

   $\frac{2}{3}e^{-x} = 2$

   $e^{-x} = 3$

   $-x = \ln(3)$

   $x = -\ln(3)$

   c) $e^{2x} - 5xe^{2x} = 0$

   $e^{2x}(1 - 5x) = 0$

   Satz vom Nullprodukt

   $e^{2x} = 0 \vee 1 - 5x = 0$

   wegen $e^{2x} \neq 0$:

   $1 - 5x = 0$

   einzige Lösung

   $x = 0{,}2$

   d) $e^{2-x} = 1$

   $2 - x = \ln(1) = 0$

   $x = 2$

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 148

3. e) $e^{0,2x+1} - 1 = 0$ | $e^{0,2x+1} = 1$

$0,2x + 1 = \ln(1)$

Mit $\ln(1) = 0$ | $0,2x + 1 = 0$

$x = -\mathbf{5}$

f) $3 - 0,5e^{0,25x} = 0$ | $0,5e^{0,25x} = 3$

$e^{0,25x} = 6$

$0,25x = \ln(6)$

$x = 4\ln(6)$

g) $(3 + 2x)e^{x-1} = 0$ | $3 + 2x = 0 \vee e^{x-1} = 0$

Satz vom Nullprodukt | $3 + 2x = 0$

wegen $e^{x-1} \neq 0$: | $x = -\frac{3}{2}$ (einzige Lösung)

h) $8 - e^x = 7e^{-x}$

Substitution: $u = e^x$ | $8 - u = \frac{7}{u}$

Nullform | $8u - u^2 - 7 = 0$

Lösung mit Formel | $u_1 = 1$; $u_2 = 7$

Rücksubstitution | $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$e^x = 7 \Rightarrow x = \ln(7)$

Lösungen | $x_1 = 0$; $x_2 = \ln(7)$

i) $2e^{0,5x} = e^x$ | $2e^{0,5x} - e^x = 0$

Ausklammern | $e^{0,5x}(2 - e^{0,5x}) = 0$

Satz vom Nullprodukt | $e^{0,5x} = 0 \vee 2 - e^{0,5x} = 0$

$e^{0,5x} = 0 \vee e^{0,5x} = 2$

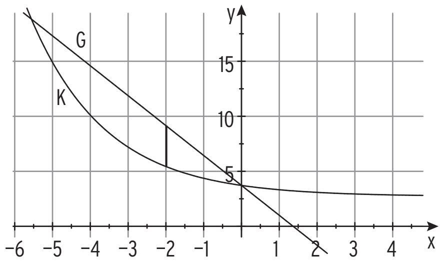
wegen $e^{0,5x} \neq 0$ | $e^{0,5x} = 2$

$0,5x = \ln(2)$

einzige Lösung | $x = 2\ln(2)$

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuchseite 153



3. $f(x) = e + e^{-0{,}5x}$; $g(x) = -e(x - 1) + 1$

   a) Kein Schnittpunkt mit der x-Achse:

   $f(x) > 0$ da $e = 2{,}71 > 0$
   und $e^{-0{,}5x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

   b) $f(0) = e + e^{-0{,}5 \cdot 0} = e + 1$

   $g(0) = -e(0 - 1) + 1 = e + 1$

   Gemeinsamer Punkt auf der y-Achse: $S_y(0 \mid e + 1)$;

   Differenz der y-Werte für $x = -2$: $g(-2) - f(-2) = 3{,}72$

   $g(x) - f(x) = 3$ hat eine Lösung nahe bei $x = -1{,}5$:

   $g(-1{,}51) - f(-1{,}51) \approx 2{,}97$ $\qquad$ $g(-1{,}50) - f(-1{,}50) \approx 2{,}96$

   Der gesuchte Wert ist kleiner als $-1{,}50$.

   Hinweis: $g(x) - f(x) = 3$ für $x \approx -4{,}81$ oder $x \approx -1{,}52$

Lehrbuchseite 159

2. **Reale Situation:** In einem See von der Größe 8 ha wachsen Seerosen.

   Reales Modell

   Die bedeckte Fläche nimmt wöchentlich um 30% zu. Anfangs sind 150 m^2 der Oberfläche bedeckt. Annahme: Die Zunahme erfolgt exponentiell. Die bedeckte Fläche nach t Wochen (t = 0 entspricht dem Beginn der Messung) soll durch eine Funktion beschrieben werden.

   Mathematisches Modell:
   $B(0) = 150$; $B(t)$: bedeckte Fläche in m^2; Mit $a = 1{,}30$ ergibt sich
   $B(t) = 150 \cdot 1{,}30^t$

   Dieser Funktionsterm beschreibt die bedeckte Fläche in Abhängigkeit von der Zeit t.

   Schreibweise mit e-Basis mit $1{,}30 = e^{\ln(1{,}30)} = e^{0{,}2624}$: $B(t) = 150 \cdot e^{0{,}2624t}$

   Mathematische Lösung:
   $B(t) = 80000 \Rightarrow 150 \cdot 1{,}30^t = 80000 \Rightarrow 1{,}30^t = 533{,}33$
   Logarithmieren: $\ln(1{,}30) \cdot t = \ln(533{,}33) \Rightarrow t = 23{,}93$

   Bewertung:

   Die Wasserrose bedeckt die gesamte Fläche nach ca. 24 Wochen.

   Exponentielles Wachstum ist also nur in den ersten 24 Wochen möglich.

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 162

2. Ansatz: $g(t) = a - 10e^{-kt}$; $t \geq 0$; $a, k > 0$

a) $g(0) = a - 10e^{-k \cdot 0} = a - 10$

$g(10) = a - 10e^{-10k}$

Aus $g(0) = 10$ folgt	$a - 10 = 10 \Rightarrow a = 20$
Aus $g(10) = 16{,}321$ folgt	$a - 10e^{-10k} = 16{,}321$
$a = 20$ eingesetzt:	$20 - 10e^{-10k} = 16{,}321$
Auflösung nach k:	$10e^{-10k} = 3{,}679$
	$e^{-10k} = 0{,}3679$
	$-10k = \ln(0{,}3679)$
	$k = \frac{\ln(0{,}3679)}{-10} = 0{,}099994 \approx 0{,}1$

Funktionsterm: $g(t) = 20 - 10e^{-0{,}1t}$

b) Für $t \to \infty$: $g(t) \to 20$ wegen $e^{-0{,}1t} \to 0$

Das Schaubild von g hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 20$.

Die Biomasse strebt gegen $20 \cdot 10^2$ Tonnen.

c) 95 % von 20 = 19

Bedingung: $g(t) = 19$	$20 - 10e^{-0{,}1t} = 19$
	$10e^{-0{,}1t} = 1$
	$e^{-0{,}1t} = 0{,}1$
	$-0{,}1t = \ln(0{,}1)$
	$t = -10\ln(0{,}1) \approx 23{,}0$

Die Zeit bis zur Verwertung beträgt etwa 23 Jahre.

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 204

8. a) $g(x) = a \sin[b(x + c)] + d;\ x \in [0; 12]$

Bedeutung von a und d:

d ist der **Jahresmittelwert:** $d = \frac{1}{2}[17{,}5 + (-2{,}1)] = 7{,}7$

a ist die größte **Abweichung** vom Jahresmittelwert: $a = \frac{1}{2}[17{,}5 - (-2{,}1)] = 9{,}8$

Bestimmung des Funktionsterms:

Die Periode ist 12: $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

Also $g(x) = 9{,}8 \sin\left[\frac{\pi}{6}(x + c)\right] + 7{,}7$

Punktprobe mit (3,5 | 8) ergibt: $8 = 9{,}8 \sin\left[\frac{\pi}{6}(3{,}5 + c)\right] + 7{,}7$

$\sin\left[\frac{\pi}{6}(3{,}5 + c)\right] = \frac{0{,}3}{9{,}8} = 0{,}03061...$

Mit WTR: $\left[\frac{\pi}{6}(3{,}5 + c)\right] = 0{,}03060...\ ;\ \pi - 0{,}0306 = 3{,}1110$

Hinweis: Für z nahe bei 0 gilt: $\sin(z) \approx z$

Auflösen nach c: $c = 0{,}0306 \cdot \frac{6}{\pi} - 3{,}5 = -3{,}4416$

$c = 3{,}1110 \cdot \frac{6}{\pi} - 3{,}5 = 2{,}4416$

Lösung: $c = -3{,}44$ oder $c = 2{,}44$

Da im Sommer die höchsten Temperaturen auftreten, muss $c = -3{,}44$ gewählt werden. ($g(0{,}5) = -2{,}1$; die Sinuskurve muss nach rechts verschoben werden.)

Ergebnis: $g(x) = 9{,}8 \sin\left[\frac{\pi}{6}(x - 3{,}44)\right] + 7{,}7$

Alternative:

Lösung mit Regression ergibt $g(x) = 9{,}9\sin(0{,}51x - 1{,}78) + 7{,}66$

Dann gilt: $a = 9{,}9;\ b = 0{,}51;\ c = -\frac{1{,}78}{0{,}51} = -3{,}49;\ d = 7{,}66$

Hinweis: $\sin(0{,}51x - 1{,}78) = \sin(0{,}51(x - 3{,}49))$

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 204

8. b) $f(x) = 9{,}7 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 9{,}4)\right] + 14{,}8;\ x \in [0; 24]$

Bedingung: $f(x) = 20$	$\sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 9{,}4)\right] = \frac{5{,}2}{9{,}7} = 0{,}536$
	$\frac{\pi}{12}(x - 9{,}4) = 0{,}566;$
	$\frac{\pi}{12}(x - 9{,}4) = \pi - 0{,}566 = 2{,}576$
Auflösen nach x:	$x = 0{,}566\,\frac{12}{\pi} + 9{,}4 = 11{,}56$
	$x = 2{,}5766\,\frac{12}{\pi} + 9{,}4 = 19{,}24$
Lösung:	$x_1 = 11{,}56;\ x_2 = 19{,}24$

Zwischen ca. 11:34 Uhr und 19:14 Uhr liegt die Lufttemperatur in Freiburg an diesem Tag über 20 °C.

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG

Lehrbuch Seite 285

7. Um die Firma zu beraten, berechnet man jeweils den Mittelwert und die Standardabweichung der Abfüllmenge beider Automaten.

   X: Folgekosten in € (Automat A)

   Erwartungswert: $E(X) = 2{,}10 \cdot 0{,}09 + 3{,}70 \cdot 0{,}03 + 5{,}00 \cdot 0{,}02 = 0{,}40$

   Varianz: $\sigma^2 = 1{,}01$

   Standardabweichung: $\sigma = 1{,}0$

   Y: Folgekosten in € (Automat B)

   Erwartungswert: $E(Y) = 1{,}20 \cdot 0{,}07 + 2{,}90 \cdot 0{,}04 + 5{,}00 \cdot 0{,}03 = 0{,}41$

   Varianz: $\sigma^2 = 1{,}59$

   Standardabweichung: $\sigma = 1{,}26$

   Der Mittelwert und die Standardabweichung sind mit dem Automat A kleiner als mit dem Automat B.

   Automat A scheint genauer abzufüllen und damit weniger Folgekosten zu verursachen.

   Empfehlung: Automat vom Typ A kaufen.

9. a) A: 1 2

   $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

   B: 1 1, 2 2, 3 3

   $P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

   C: $\bar{1}\,\bar{1}$

   $P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

   b) X: Gewinn für den Spieler

e_i	11	22	33	sonst
x_i in €	0,50	2,50	4,50	− 1,50
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{4}$

   $E(X) = 0{,}5 \cdot \frac{1}{8} + 2{,}5 \cdot \frac{1}{16} + 4{,}5 \cdot \frac{1}{16} - 1{,}5 \cdot \frac{3}{4} = -0{,}625$

   Das Spiel ist nicht fair. Der Spieler macht auf lange Sicht einen Verlust von ca. 63 Ct pro Spiel.

© Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG