Investitionsrechnung

Burger

2. Auflage 2024
ISBN 978-3-8006-7379-7
Vahlen

schnell und portofrei erhältlich bei
beck-shop.de

Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de steht für Kompetenz aus Tradition. Sie gründet auf über 250 Jahre juristische Fachbuch-Erfahrung durch die Verlage C.H.BECK und Franz Vahlen.
beck-shop.de hält Fachinformationen in allen gängigen Medienformaten bereit: über 12 Millionen Bücher, eBooks, Loseblattwerke, Zeitschriften, DVDs, Online-Datenbanken und Seminare. Besonders geschätzt wird beck-shop.de für sein umfassendes Spezialsortiment im Bereich Recht, Steuern und Wirtschaft mit rund 700.000 lieferbaren Fachbuchtiteln.

Die minimale Standardabweichung und damit das kleinste Portfoliorisiko ergibt sich damit bei einer Mischung des Portfolios mit 80 % Wertpapier B und 20 % Wertpapier A. Das ist das wirklich Überraschende an der Risikostreuung nach Markowitz: Obwohl Wertpapier B einen höheren Erwartungswert und ein geringeres Risiko als Wertpapier A aufweist, macht es nach Risikogesichtspunkten dennoch Sinn, Wertpapier A beizumischen, da das Portfoliorisiko damit – selbst unter das Risiko des risikoärmeren Wertpapiers B – gesenkt werden kann. Dafür muss allerdings ein geringerer Erwartungswert μ_P in Kauf genommen werden.

x_A	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
x_B	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
μ_P	15,0	14,8	14,6	14,4	14,2	14,0	13,8	13,6	13,4	13,2	13,0
Standard-abweichung	3,63	3,45	3,37	3,41	3,56	3,80	4,12	4,51	4,94	5,41	5,91

Tabelle 50: Portfolio-Erwartungswert und -Standardabweichung

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Verkleinert man die Schritte der Beimischung immer weiter, erhält man die Daten für eine grafische Darstellung des Zusammenhangs zwischen dem Erwartungswert des Portfolios und des Portfoliorisikos, gemessen anhand der Standardabweichung. Der idealtypische Verlauf dieser Kurve lässt sich wie folgt darstellen:

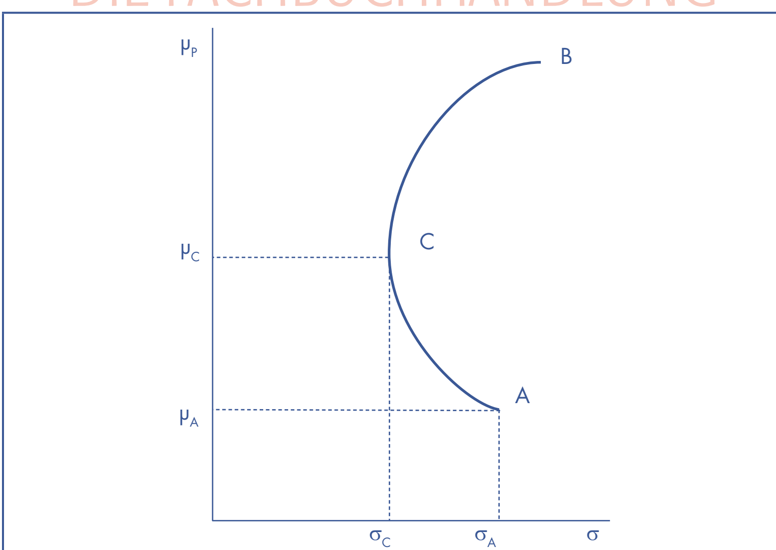


Abbildung 10: Risikominimales Portfolio

Die Krümmung der Kurve wird durch den Korrelationskoeffizienten $\rho_{A,B}$ bestimmt. Es ist leicht ersichtlich, dass Portfolien entlang der Kurve zwischen den Punkten A und C nicht effizient sein können, da bei jedem Risiko zwischen σ_A und σ_C auf der Kurve zwischen C und B ein höherer Erwartungswert realisiert werden kann. Den Teil der Kurve zwischen C und B nennt man daher auch „effiziente Kurve".

Der Punkt C stellt das risikominimale Portfolio dar. Mathematisch lässt sich der Punkt C ausgehend von der Gleichung der Portfoliovarianz ermitteln. Diese ist unter der Nebenbedingung $x_A + x_B = 1$ zu minimieren.

$$\sigma^2_{Portfolio} = x_A^2 * \sigma_A^2 + x_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * x_A * x_B * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B$$

$$\sigma^2_{Portfolio} = x_A^2 * \sigma_A^2 + \left(1 - x_A\right)^2 * \sigma_B^2 + 2 * x_A * (1 - x_A) * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B$$

$$\sigma^2_{Portfolio} = x_A^2 * \sigma_A^2 + \left(1 - 2 * x_A + x_A^2\right) * \sigma_B^2 + 2 * x_A * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B \\ -2 * x_A^2 * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B$$

$$\sigma^2_{Portfolio} = x_A^2 * \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * x_A * \sigma_B^2 + x_A^2 * \sigma_B^2 + 2 * x_A * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B \\ -2 * x_A^2 * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B$$

beck-shop.de

$$\sigma^2_{Portfolio} = x_A^2 * \left(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B\right) \\ -x_A * \left(2 * \sigma_B^2 - 2 * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B\right) + \sigma_B^2$$

DIE FACHBUCHHANDLUNG

$$\frac{d\sigma^2_{Portfolio}}{dx_A} = 2 * x_A * \left(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B\right) - \left(2 * \sigma_B^2 - 2 * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B\right)$$

Diese Ableitung ist gleich Null zu setzen, so dass sich als risikominimaler Portfolioanteil x_A ergibt:

$$x_A = \frac{\sigma_B^2 - \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B}$$

Verwenden wir in dieser Formel die im obigen Beispiel errechneten Größen für die Varianzen, Standardabweichungen und den Korrelationskoeffizienten, so lautet das exakte Ergebnis:

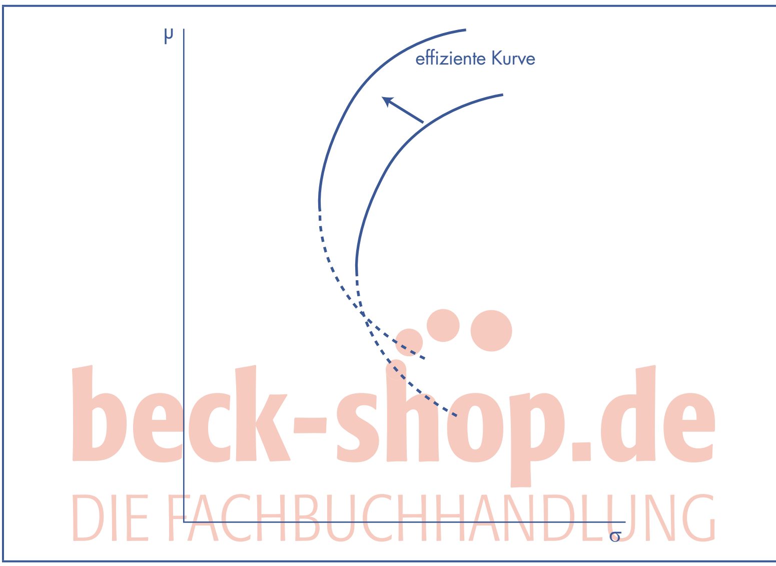
$$x_A = \frac{13,2 - 5,91 * 3,62 * 0,22}{34,9 + 13,2 - 2 * 5,91 * 3,63 * 0,22} = 0,219 = 21,9\%$$ [48]

[48] Die Abweichung zu Tabelle 42 ergibt sich hier nur durch die größere Genauigkeit, da wir in Tabelle 42 mit 0,1-Schritten gearbeitet haben.

Da sich die beiden Anteile der Wertpapiere im Portfolio zu 1 addieren müssen gilt dann:

$$x_B = 1 - x_A = 88{,}1\ \%$$

Die Hinzunahme weiterer, nicht vollständig positiv oder negativ korrelierter Wertpapiere verschiebt die effiziente Kurve immer weiter nach links oben:



beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Abbildung 11: Effiziente Linie

Laut empirischen Untersuchungen reicht bereits eine geringe Anzahl (ca. zehn) an nicht vollständig miteinander korrelierten Wertpapieren, um den größten Teil der Risikominderung abzubilden. Weitere Wertpapiere senken das Portfoliorisiko nur geringfügig. An diesem Punkt stellt sich dann in der Praxis die Frage, ob die durch weitere Wertpapiere noch erzielbare Risikominderung den zusätzlichen Verwaltungsaufwand wert sind, denn abweichend von den Grundannahmen des Modells gibt es in der Praxis sehr wohl Transaktionskosten, die den Vorteil einer möglichen weiteren geringen Risikominderung kompensieren, im schlimmsten Fall sogar überkompensieren könnten.

Was einerseits theoretisch möglich und andererseits vom Anleger oder Investor tatsächlich gewünscht ist, kann durchaus differieren. Wir haben dieses Thema bereits im Rahmen der Risikopräferenz (vgl. 4.1.4) aufgegriffen. Wir verbinden dieses Thema nun in einem nächsten Schritt mit der Markowitzschen Risikominimierung, um eine Brücke zum Capital Asset Pricing-Modell zu schlagen.

4.3.3 Das Tobinsche Separationstheorem

Das Tobinsche Spearationstheorem ist ein Bindeglied zwischen den Themen Portfoliovarianz, Kovarianz und Korrelationskoeffizient einerseits und dem Capital Asset Pricing-Modell, das in der Praxis der Geldanlage einen breiten Raum einnimmt, und das wir später genauer darstellen werden.

Zur Erläuterung des Theorems greifen wir zunächst noch einmal auf ein einfaches Beispiel mit zwei Wertpapieren zurück. Diese Wertpapiere sollen mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten bestimmte Renditen erreichen:

p	15%	20%	30%	20%	15%
Wertpapier A	5	10	15	18	21
Wertpapier B	6	15	20	18	10

Tabelle 51: Beispielrechnung Tobinsches Separationstheorem

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Daraus lassen sich – wie wir oben gezeigt haben – im ersten Schritt Erwartungswerte, Varianzen und Standardabweichungen für die Renditen der beiden Wertpapiere errechnen.

$$\mu_A = 0{,}15 * 5 + 0{,}2 * 10 + 0{,}3 * 15 + 0{,}2 * 18 + 0{,}15 * 21 = 14$$

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 = {} & 0{,}15 * (5-14)^2 \\ & +0{,}2 * (10-14)^2 \\ & +0{,}3 * (15-14)^2 \\ & +0{,}2 * (18-14)^2 \\ & +0{,}15 * (21-14)^2 \\ = {} & 26{,}2\end{aligned}$$

$$\sigma_A = 5{,}12$$

$$\mu_B = 0{,}15 * 6 + 0{,}2 * 15 + 0{,}3 * 20 + 0{,}2 * 18 + 0{,}15 * 10 = 15$$

$$\begin{aligned}\sigma_B^2 = {} & 0{,}15 * (6-15)^2 \\ & +0{,}2 * (15-15)^2 \\ & +0{,}3 * (20-15)^2 \\ & +0{,}2 * (18-15)^2 \\ & +0{,}15 * (10-15)^2 \\ = {} & 25{,}22\end{aligned}$$

$$\sigma_B = 5{,}02$$

Die Erwartungswerte eines Mischportfolios aus den beiden Wertpapieren A und B ergeben sich nach der Formel:

$$\mu_{Portfolio}^{(A,\,B)} = x_A * \mu_A + x_B * \mu_B$$

wobei x_A und x_B die jeweiligen Anteile der Wertpapiere A und B sind, die sich jeweils zu 1 addieren.

Die Varianz des Portfolios errechnet sich nach der Formel

$$\sigma_{Portfolio}^2 = x_A^2 * \sigma_A^2 + x_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * x_A * x_B * \operatorname{cov}(r_A,\ r_B),$$

,

wobei gilt:

$$\operatorname{cov}(r_A,\ r_B) = \sum_{i=1}^{n} p_i * (r_{Aj} - \mu_A) * (r_{Bj} - \mu_B)$$

In unserem Beispiel errechnet sich die Kovarianz damit als:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(r_A,\ r_B) = {} & 0{,}15 * (5-14) * (6-15) \\ & +0{,}2 * (10-14) * (15-15) \\ & +0{,}3 * (15-14) * (20-15) \\ & +0{,}2 * (18-14) * (18-15) \\ & +0{,}15 * (21-14) * (10-15) \\ = {} & 10{,}8\end{aligned}$$

Verwendet man dabei den Zusammenhang:

$$\rho_{A,B} = \frac{\operatorname{cov}(r_A,\ r_B)}{\sigma_A * \sigma_B} \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{cov}(r_A,\ r_B) = \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B$$

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

so lässt sich die Varianz des Portfolios auch wie folgt darstellen:

$$\sigma^2_{Portfolio} = x_A^2 * \sigma_A^2 + x_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * x_A * x_B * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B$$

In einer tabellarischen Übersicht ergeben sich daraus folgende Ergebnisse für jeweils Zehntelschritte bei der Portfoliomischung:

x_A	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
x_B	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\mu^{(A, B)}_{Portfolio}$	15	14,9	14,8	14,7	14,6	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1
$\sigma^2_{Portfolio}$	25,20	22,62	20,63	19,24	18,45	18,25	18,65	19,64	21,23	23,42
$\sigma_{Portfolio}$	5,02	4,76	4,54	4,39	4,30	4,27	4,32	4,43	4,61	4,84

Tabelle 52: Beispielrechnung Portfolioerwartungswert und Portfoliovarianz

Die minimale Varianz liegt demnach in diesem Beispiel – vereinfacht durch die Zehntelschritte – bei einer Kombination von 50 % Anteil des Wertpapiers A und 50 % Anteil des Wertpapiers B. Gerade noch ungeübte Studierende erstaunt ein solches Ergebnis immer wieder, hatten wir doch im direkten Vergleich der Wertpapiere bei Wertpapier B einen höheren Erwartungswert und eine geringere Varianz als bei Wertpapier A. Dass eine Mischung der beiden Wertpapiere dennoch Sinn macht, ist die Quintessenz der Markowitzschen Portfoliotheorie.

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Nun wollen wir aber einen Schritt weiter gehen und den Verlauf der Standardabweichung grafisch darstellen. Wir entnehmen der Tabelle, dass der Erwartungswert des Portfolios $\mu^{(A, B)}_{Portfolio}$ mit der Beimischung von Wertpapier A zu Wertpapier B kontinuierlich sinkt. Wir bewegen uns also in einem (σ, μ)-Diagramm auf der μ-Achse von oben nach unten.

Die Varianz des Portfolios sinkt bei dieser Bewegung zunächst bis zur varianzminimalen Kombination der beiden Wertpapiere und steigt danach wieder an. Daraus ergibt sich folgendes Bild (wobei wir den exakten Zahlenübertrag vernachlässigen). Dabei ist in der Grafik zu berücksichtigen, dass es lediglich beispielhaft ist, dass Wertpapier B einen höheren Erwartungswert und eine geringere Varianz als Wertpapier A hat. Die Krümmung der Kurve wird durch die Kovarianz bzw. den Korrelationskoeffizienten der beiden Wertpapiere bestimmt.

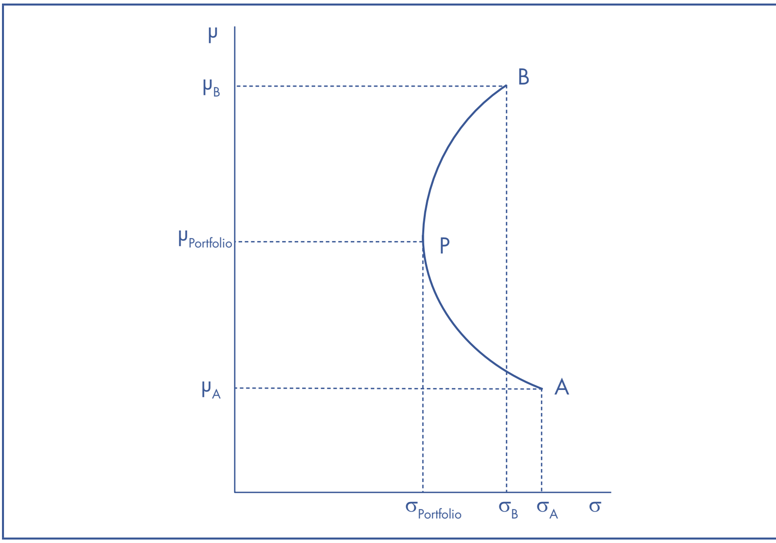


Abbildung 12: Portfoliovarianz und -erwartungswert

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Der Punkt P ist dabei unser varianz- oder risikominimales Portfolio. Keine andere Zusammensetzung des Portfolios erreicht ein niedrigeres Risiko.

Für die praktische Anwendung ist nun der Vergleich der beiden Kurvenabschnitte A-P und P-B interessant. Dabei gilt: Für jeden Punkt auf dem Kurvenabschnitt A-P kann auf dem Kurvenabschnitt P-B ein höherer Erwartungswert bei gleichem oder sogar geringerem Risiko realisiert werden. Damit sind Punkte auf dem Kurvenabschnitt A-P keine rationalen Lösungen. Der Kurvenabschnitt P-B wird hingegen aus genau diesem Grund als effiziente Kurve bezeichnet.

Bis dato ist das lediglich eine Wiederholung dessen, was wir im allgemeinen Teil der Portfolio Selection-Theorie ausgeführt haben. Nun kombinieren wir diese Erkenntnisse mit der ebenfalls schon gestellten und ausgearbeiteten Frage: „Was will der Investor?“, also mit der Thematik der Risikopräferenz aus 3.1.4.

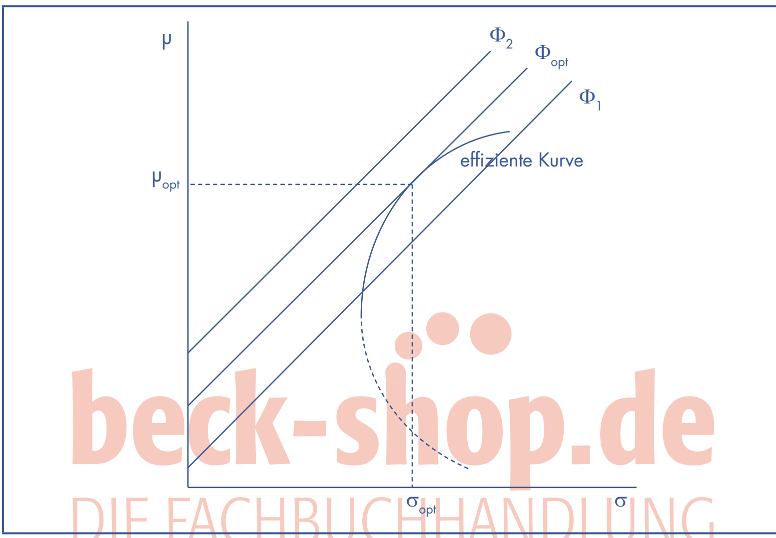
Eine einfache Erkenntnis aus der Praxis, die jeder Anlageberater kennt, und von der letztendlich die komplette Glücksspielindustrie liebt, ist die Tatsache, dass nicht jeder Anleger bzw. Investor das minimale Risiko realisieren will. Manche Menschen sind einfach bereit, ein höheres Risiko zu tragen, wenn ihnen dafür die Aussicht auf einen höheren Ertrag erwächst. Im Rahmen der Risikopräferenzüberlegungen haben wir dieses Verhalten mit der Risikopräferenzfunktion

$$\Phi = \mu + a * \sigma$$

erfasst. Umgestellt nach μ ergibt sich eine einfache lineare Funktion μ(σ):

$$\mu = \Phi - a * \sigma$$

Kombinieren wir grafisch den effizienten Teil der Kurve aus der Portfolio-Selection-Theorie mit dieser Geraden aus der Risikopräferenzanalyse, so ergibt sich folgendes Bild:



beck-shop.de DIE FACHBUCHHANDLUNG

Abbildung 13: Effiziente Kurve und Risikopräferenzfunktion

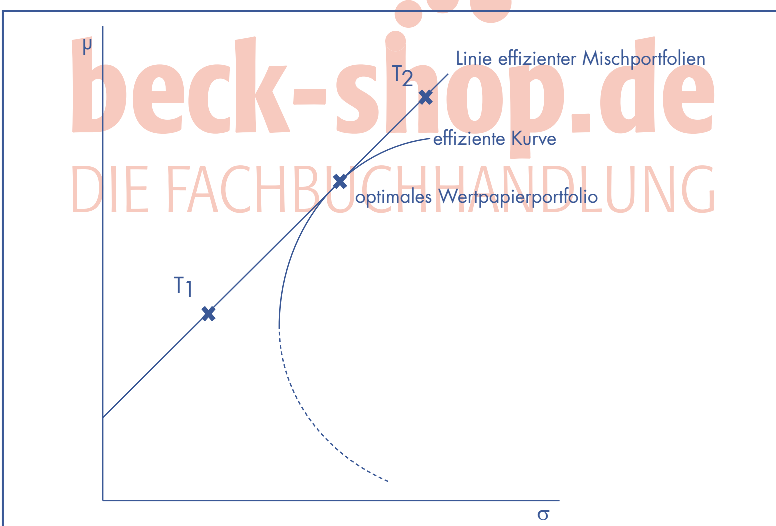
- Φ_1 kann dabei keine optimale Lösung liefern, da bei jedem gegebenen Risiko entlang der effizienten Kurve ein höherer Erwartungswert realisiert werden kann.
- Φ_2 kann dabei keine optimale Lösung liefern, da keiner der Kombinationen aus Erwartungswert und Risiko realisiert werden kann. Die effiziente Kurve begrenzt hier die realisierbaren Möglichkeiten.
- Lediglich Φ_{opt}, also die Tangentiallösung zwischen der effizienten Kurve und der Risikopräferenzfunktion bietet die für den Anleger optimale und erreichbare Kombination aus Erwartungswert und Risiko.

Dieses – für den Anleger – optimale Wertpapierportfolio bildet nun die Basis für das Tobinsche Separationstheorem, das aber über die bisherigen Annahmen hinaus noch weitere Voraussetzungen braucht:

- Es existiert eine risikofreie Anlagemöglichkeit mit einer Rendite r_f. Als Beispiele dafür werden in der Regel Staatsanleihen herangezogen.
- Es gibt einen vollkommenen Kapitalmarkt, auf dem jede Summe zu r_f angelegt und auch als Kredit aufgenommen werden kann.

Unsere oben verwendet Grafik ändert sich damit nur insofern, als aus der Risikopräferenzfunktion Φ eine so genannte Linie effizienter Mischportfolien wird.

- Bei einer Bewegung nach „links“ vom wie oben bestimmten optimalen Wertpapierportfolio bedeutet das, dass der Anleger einen Teil des Vermögens lieber in die risikofreie Anlage investiert und nur den verbleibenden Teil seines Vermögens in das optimal strukturierte Portfolio aus risikobehafteten Wertpapieren (T_1).
- Bei einer Bewegung nach „rechts“ vom wie oben bestimmten optimalen Wertpapierportfolio bedeutet das, dass der Anleger den Kapitalmarkt nutzt, um Kapital zu r_f aufzunehmen und dieses in das optimal strukturierte Portfolio aus risikobehafteten Wertpapieren zu investieren (T_2).



beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Abbildung 14: Tobinsches Separationstheorem

Welchen Punkt ein Anleger entlang der Linie effizienter Mischportfolien tatsächlich realisiert, hängt von seiner persönlichen Nutzenfunktion ab, in die dann μ und σ als Variablen mit eingehen. Da wir an dieser Stelle keine mikroökonomische Analyse von Nutzenfunktionen vornehmen wollen, sei für das Zustandekommen von