Grundzüge der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Merz / Hielscher

2025
ISBN 978-3-8006-7628-6
Vahlen

umfassendes Spezialsortiment im Bereich Recht, Steuern und Wirtschaft mit rund 700.000 lieferbaren Fachbuchtiteln.

Kapitel 10
Folgen

Folgen sind eines der wichtigsten Hilfsmittel der *Analysis*, also dem Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Untersuchung von Funktionen und ihren Eigenschaften beschäftigt. Viele Grundbegriffe der Analysis, wie zum Beispiel *Grenzwert*, *Konvergenz*, *Divergenz*, *Stetigkeit*, *Differenzierbarkeit* und *Integrierbarkeit*, basieren auf dem Folgenbegriff. Darüber hinaus lassen sich in vielen Anwendungen die betrachteten Größen nicht exakt ausdrücken, sondern nur mit beliebiger Genauigkeit durch eine Folge approximieren.

10.1 Folgenbegriff

Formal ist eine Folge reeller Zahlen nichts anderes als eine reellwertige Funktion a, deren Definitionsbereich eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ ist und deren Funktionswerte $a(n) \in \mathbb{R}$ mit a_n bezeichnet werden:

Definition 10.1: Folge

Eine reellwertige Funktion

$$a : D \longrightarrow \mathbb{R}, \; n \longmapsto a_n := a(n)$$

mit $D \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt Folge und die reellen Zahlen a_n werden als die Folgenglieder der Folge a bezeichnet. Wechseln sich bei einer Folge positive und negative Zahlen ab, heißt die Folge alternierend. Für eine Folge schreibt man $(a_n)_{n \in D}$ oder auch kurz (a_n).

Die Menge D wird als *Indexmenge* der Folge a und die natürliche Zahl $n \in D$ als *Index* des Folgenglieds a_n bezeichnet. In vielen Fällen gilt $D = \mathbb{N}$ oder $D = \mathbb{N}_0$. Daher werden im Folgenden alle Definitionen und Sätze für Folgen mit der Indexmenge $\mathbb{N}_0$ formuliert.

Beispiel 10.2: Explizite Definition von Folgen

a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots \tag{10.1}$$

wird als *harmonische Folge* bezeichnet (siehe Abbildung 10.1, links).

b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. die Folge

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$$

heißt *alternierende harmonische Folge* (siehe Abbildung 10.1, rechts).

c) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_n := 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist gegeben durch

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots \tag{10.2}$$

d) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_n := (-1)^n \frac{4n^2+2n+1}{2n^2+3}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{21}{11}, -\frac{43}{21}, \frac{73}{35}, -\frac{111}{53}, \ldots$$

Explizite und rekursive Definition

Bei Folgen unterscheidet man zwischen *expliziter* und *rekursiver* Definition:

a) Bei der expliziten Definition einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ werden die Folgenglieder a_n explizit als Funktion von $n \in \mathbb{N}_0$ angegeben (siehe Beispiel 10.2).

b) Dagegen werden bei der rekursiven Definition die Folgenglieder a_n einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ implizit angegeben, indem explizit die ersten m Werte der Folge sowie der funktionale Zusammenhang zwischen a_n und den m vorhergehenden Folgengliedern $a_{n-1}, \ldots, a_{n-m}$ angegeben wird. Die ersten m Folgenglieder heißen *Startwerte* und der funktionale Zusammenhang zwischen a_n und den m vorhergehenden Folgengliedern wird als *Rekursionsvorschrift* bezeichnet (siehe Beispiel 10.3).

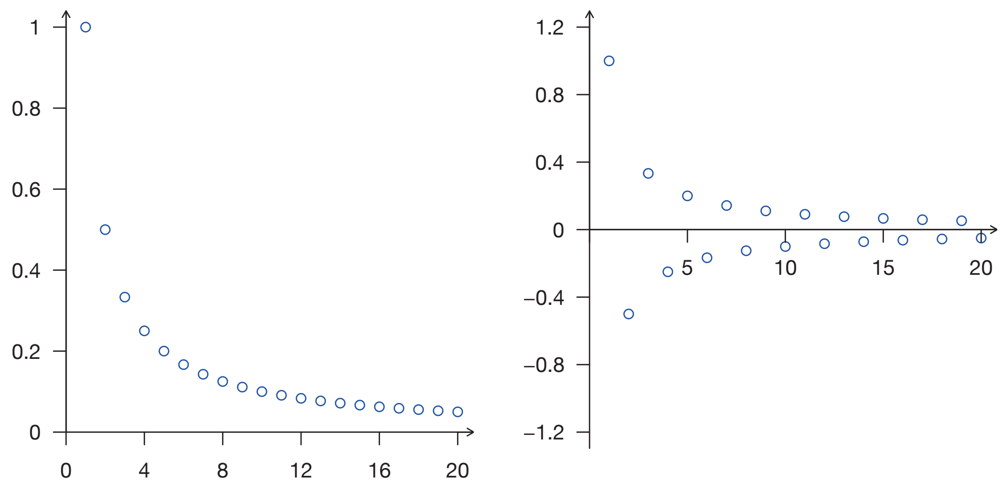


Abb. 10.1: Harmonische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ (links) und alternierende harmonische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ (rechts)

Beispiel 10.3: Fibonacci-Zahlen

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist durch die Rekursionsvorschrift

$$a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$$

für alle $n \geq 2$ und die beiden *Startwerte* $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ definiert. Diese Vorschrift liefert die Folge

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

L. v. Pisa

Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist eine der bekanntesten Folgen, die sich wesentlich einfacher rekursiv als explizit beschreiben lässt. Sie ist nach dem italienischen Mathematiker Leonardo von Pisa (1180–1241), der auch Fibonacci genannt wurde, benannt. Fibonacci hat diese Folge zur Beschreibung und Analyse des Wachstums einer Kaninchenpopulation eingesetzt.

10.2 Arithmetische und geometrische Folgen

Die *arithmetische* und die *geometrische Folge* sind für viele ingenieur- und wirtschaftswissenschaftliche Problemstellungen von Bedeutung:

Definition 10.4: Arithmetische und geometrische Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt

a) arithmetisch, wenn $a_{n+1} - a_n = d$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und ein geeignetes $d \in \mathbb{R}$ gilt und

b) geometrisch, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und ein geeignetes $q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt.

Eine arithmetische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erfüllt die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = a_n + d$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und ein $d \in \mathbb{R}$. Sie besitzt daher die explizite Darstellung

$$a_{n+1} = a_n + d = (a_{n-1} + d) + d = \ldots = a_0 + (n+1)d \quad (10.3)$$

und ihr Name ist durch die Eigenschaft

$$a_n = \frac{(a_n + d) + (a_n - d)}{2} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ motiviert. Das heißt, das n-te Folgenglied a_n ist das *arithmetische Mittel* seiner beiden benachbarten Folgenglieder a_{n-1} und a_{n+1}.

Eine geometrische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erfüllt die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = qa_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und ein $q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sie besitzt daher die explizite Darstellung

$$a_{n+1} = qa_n = q(qa_{n-1}) = \ldots = q^{n+1}a_0 \quad (10.4)$$

und ihre Bezeichnung ist durch

$$a_n = \sqrt{(a_n q)\left(a_n \frac{1}{q}\right)} = \sqrt{a_{n+1}a_{n-1}}$$

für $n \in \mathbb{N}$ motiviert, falls $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Das heißt, das n-te Folgenglied a_n ist das *geometrische Mittel* seiner beiden benachbarten Folgenglieder a_{n-1} und a_{n+1}. Geometrische Folgen werden zur Beschreibung von *Wachstumsprozessen* ($|q| > 1$) und *Schrumpfungsprozessen* ($|q| < 1$) eingesetzt.

Beispiel 10.5: Arithmetische und geometrische Folgen

a) Die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ ist eine arithmetische Folge. Denn sie ist durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := 2(n+1) - 1$ gegeben und es gilt $d = a_{n+1} - a_n = 2(n+2) - 1 - (2(n+1) - 1) = 2$.

b) Die Folge der Dreierpotenzen $1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots$ ist eine geometrische Folge. Denn sie ist gegeben durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := 3^n$ und es gilt $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$.

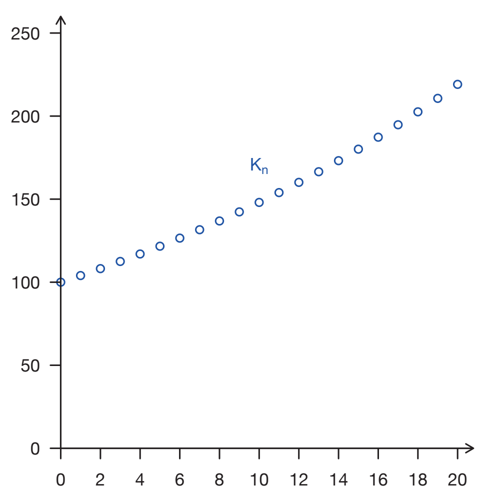
In der Finanzierung und in der Investitionsrechnung treten geometrische Folgen häufig bei der Berechnung von *Zinseszinsen* für ein gegebenes Kapital auf:

Beispiel 10.6: Diskrete Zinseszinsrechnung

Gegeben sei ein Anleger, der sein Startkapital K_0 in eine festverzinsliche Anleihe mit dem Zinssatz $p > 0$ investiert (z. B. $p = 3\%$). Bezeichnet K_n das Kapital nach n Jahren und werden die Zinsen in den Folgejahren ebenfalls zum Jahresende mit dem Zinssatz p verzinst (d. h. unter Berücksichtigung von Zinseszinsen), dann berechnet sich das Kapital in den nachfolgenden Jahren $n = 1, 2, 3, \dots$ gemäß

$$K_n = K_0\,(1+p)^n \tag{10.5}$$

und die Kapitalbeträge $K_0, K_1, K_2, \dots$ bilden eine geometrische Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Die Abbildung unten veranschaulicht die zeitliche Entwicklung der Kapitalbeträge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $K_0 = 100\,€$ und $p = 3\%$.



Kapitalentwicklung $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

10.3 Beschränkte und monotone Folgen

Beschränkte Folgen und *monotone Folgen* bilden wichtige Klassen von Folgen.

Beschränkte Folgen

Die Beschränktheit einer Folge ist wie folgt definiert:

Definition 10.7: Beschränkte Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt beschränkt, falls eine Schranke $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $|a_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Gilt $a_n \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und eine untere Schranke $c \in \mathbb{R}$ oder $a_n \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und eine obere Schranke $c \in \mathbb{R}$, dann heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach unten bzw. nach oben beschränkt. Eine nicht beschränkte Folge wird unbeschränkt genannt.

In vielen Anwendungen interessiert man sich bei einer nach oben oder unten beschränkten Folge für die kleinste obere bzw. die größte untere Schranke. Dies führt zu den Begriffen *Supremum* und *Infimum* einer Folge:

Definition 10.8: Supremum und Infimum einer Folge

a) Eine obere Schranke $c \in \mathbb{R}$ einer nach oben beschränkten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, falls es keine weitere obere Schranke c' von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $c' < c$ gibt. Für diese obere Schranke c schreibt man $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$.

b) Eine untere Schranke $c \in \mathbb{R}$ einer nach unten beschränkten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt größte untere Schranke oder Infimum der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, falls es keine weitere untere Schranke c' von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $c' > c$ gibt. Für diese untere Schranke c schreibt man $\inf_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$.

Für beschränkte, nichtleere Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ sind die Begriffe *Supremum* (d. h. die kleinste obere Schranke für die Elemente von M) und *Infimum* (d. h. die größte untere Schranke für die Elemente von M) völlig analog zu Folgen definiert:

Definition 10.9: Supremum und Infimum einer Menge

a) Ein Wert $c \in \mathbb{R}$ heißt Supremum einer nach oben beschränkten nichtleeren Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, falls $m \leq c$ für alle $m \in M$ gilt und es kein $c' \in \mathbb{R}$ gibt mit $c' < c$ und $m \leq c'$ für alle $m \in M$. Für diesen Wert c schreibt man $\sup M$.

b) Ein Wert $c \in \mathbb{R}$ heißt Infimum einer nach unten beschränkten nichtleeren Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, falls $c \leq m$ für alle $m \in M$ gilt und es kein $c' \in \mathbb{R}$ gibt mit $c < c'$ und $c' \leq m$ für alle $m \in M$. Für diesen Wert c schreibt man $\inf M$.

Ein Supremum oder Infimum ist stets eindeutig. Denn besitzt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ oder Menge M z. B. die beiden Suprema c und d, dann folgt mit der Definition 10.8a) bzw. 10.9a), dass sowohl $c \leq d$ als auch $d \leq c$ und damit $c = d$ gelten muss. Analog zeigt man auch die Eindeutigkeit des Infimums.

Monotone Folgen

Bei monotonen Folgen wird zwischen *(streng) monoton wachsenden* und *(streng) monoton fallenden Folgen* unterschieden:

Definition 10.10: Monotone Folge

a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt monoton wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und streng monoton wachsend, falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

b) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt monoton fallend, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und streng monoton fallend, falls $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Beispiel 10.11: Monotonie und Beschränktheit bei Folgen

a) Die harmonische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (siehe (10.1)) ist streng monoton fallend und beschränkt. Eine untere und obere Schranke ist z. B. -1 bzw. 2. Weiter gilt $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$ (siehe Abbildung 10.1, links).

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (siehe (10.2)) ist streng monoton wachsend, nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Eine untere Schranke ist z. B. $\frac{1}{2}$. Weiter gilt $\inf_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = 1$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = \infty$.

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := (-1)^n n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d. h. die Folge

$$0, -1, 4, -9, 16, -25, \ldots$$

ist alternierend und damit nicht monoton. Weiter ist die Folge unbeschränkt und es gilt $\inf_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = -\infty$ sowie $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = \infty$ (siehe Abbildung 10.2, links).

d) Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := \frac{2n^2-2n+1}{n^2-n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d. h. für die Folge

$$1, 1, \frac{5}{3}, \frac{13}{7}, \frac{25}{13}, \frac{41}{21}, \ldots$$

gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n^2 - 2n + 1}{n^2 - n + 1} \\ &= \frac{2(n^2 - n + 1) - 1}{n^2 - n + 1} \\ &= 2 - \frac{1}{n^2 - n + 1}. \end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Folge monoton wachsend und beschränkt ist. Eine untere und obere Schranke ist z. B. 0 bzw. 3. Weiter gilt $\inf_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = 1$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = 2$ (siehe Abbildung 10.2, rechts).

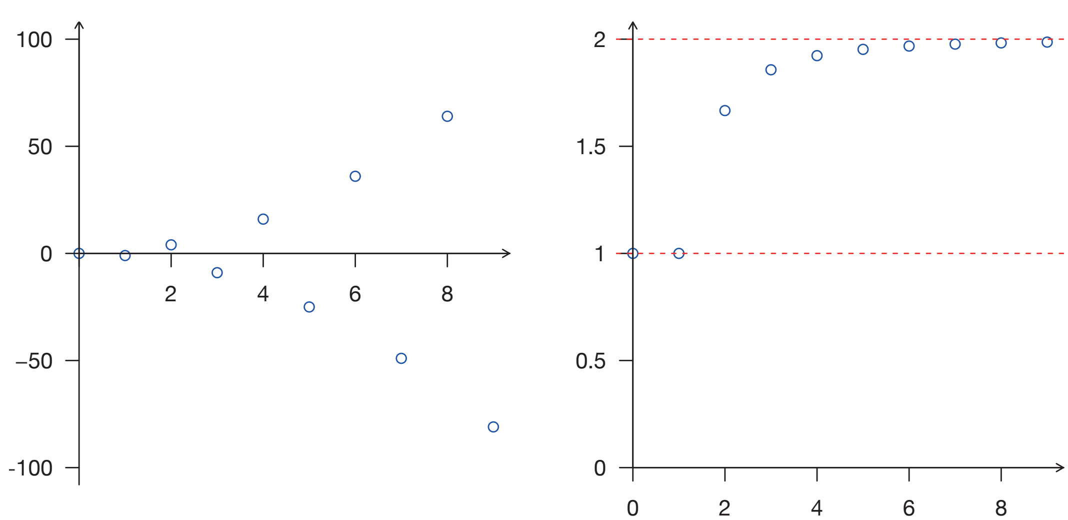


Abb. 10.2: Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n = (-1)^n n^2$ (links) und $a_n = \frac{2n^2-2n+1}{n^2-n+1}$ (rechts)

10.4 Konvergente und divergente Folgen

A. L. Cauchy

Der Konvergenzbegriff ist eines der grundlegendsten Konzepte der Analysis. Er wurde in seiner heutigen formalen Definition erstmals von dem französischen Mathematiker Augustin Louis Cauchy (1789–1857) betrachtet. Dabei wird eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ als *konvergent* bezeichnet, wenn sich ihre Folgenglieder a_n mit wachsendem Index n immer mehr einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ annähern. Diese Zahl a heißt dann *Grenzwert (Limes)* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keinen solchen Grenzwert besitzt, wird sie als *divergent* bezeichnet. Der Konvergenzbegriff spielt bei den Konzepten *Stetigkeit* (siehe Abschnitt 14.1), *Differenzierbarkeit* (siehe Abschnitt 15.2) und *Integrierbarkeit* (siehe Abschnitt 18.2) eine zentrale Rolle.

Definition 10.12: Konvergenz und Divergenz einer Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen den Grenzwert (Limes) $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt. Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit dem Grenzwert $a = 0$ wird als Nullfolge bezeichnet und eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

Für eine reelle Zahl a und ein $\varepsilon > 0$ wird das offene Intervall

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) := \{y \in \mathbb{R} : |y-a| < \varepsilon\}$$

als *ε-Umgebung von a* bezeichnet. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert somit genau dann gegen einen Grenzwert a, wenn in jeder ε-Umgebung $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ von a fast alle Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ liegen. Das heißt, nur endlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ liegen außerhalb des offenen Intervalls $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Mit anderen Worten: Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ liegen ab einem hinreichend großen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder a_n mit $n \geq n_0$ innerhalb der ε-Umgebung $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ von a (siehe Abbildung 10.3).

Der folgende Satz liefert eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Folge:

Satz 10.13: Notwendige Bedingung für Konvergenz

Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist beschränkt.

Beweis: Siehe Merz-Wüthrich [9], Seite 278. ■

Beispiel 10.14: Konvergenz bei Folgen

a) Eine *konstante Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := c \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiert gegen c. Denn es gilt offensichtlich

$$|a_n - c| = 0 < \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$, kurz: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

b) Die harmonische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist eine Nullfolge, d. h. sie konvergiert gegen 0. Denn zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dies impliziert jedoch

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$, kurz: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Die harmonische Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist der Prototyp einer Nullfolge (siehe Abbildung 10.1, links).

Monotoniekriterium

Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist gegeben durch

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

und somit beschränkt, aber offensichtlich nicht konvergent. Das heißt, eine beschränkte Folge muss nicht zwangsläufig konvergieren und die Umkehrung des Satzes 10.13 gilt somit im Allgemeinen nicht. Der folgende Satz besagt jedoch, dass wenigstens für beschränkte Folgen, die zusätzlich *monoton* sind, die Umkehrung gilt. Der Satz liefert damit eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer monotonen Folge.

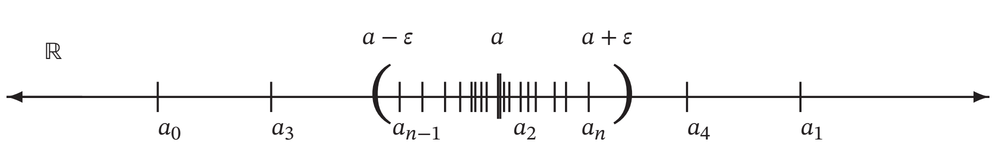


Abb. 10.3: ε-Umgebung

Satz 10.15: Monotoniekriterium für beschränkte Folgen

a) Eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert genau dann, wenn sie nach oben beschränkt ist. Sie konvergiert dann gegen ihr Supremum $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$.
b) Eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert genau dann, wenn sie nach unten beschränkt ist. Sie konvergiert dann gegen ihr Infimum $\inf_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$.

Beweis: Siehe Merz-Wüthrich [9], Seite 280. ■

Beispiel 10.16: Anwendung Monotoniekriterium

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := 5 + \frac{2}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist streng monoton fallend, nach unten beschränkt und besitzt das Infimum 5. Mit dem Monotoniekriterium für beschränkte Folgen (siehe Satz 10.15b)) folgt somit, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen den Grenzwert 5 konvergiert.

Eindeutigkeit von Grenzwerten

Es entspricht der Anschauung, dass jede konvergente Folge nur einen Grenzwert besitzt. Der folgende Satz besagt, dass dies tatsächlich zutrifft und damit der Grenzwert einer konvergenten Folge *eindeutig* ist.

Satz 10.17: Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge

Der Grenzwert einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eindeutig.

Beweis: Siehe Merz-Wüthrich [9], Seite 277. ■

Der obige Satz besagt, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert besitzt. Es ist aber natürlich auch möglich, dass eine Folge nicht konvergent ist, d. h. keinen Grenzwert besitzt.

10.5 Häufungspunkte und Teilfolgen

Häufungspunkt und Teilfolge sind zwei weitere wichtige Begriffe der Analysis.

Häufungspunkte

Eine reelle Zahl a wird als *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezeichnet, wenn unendlich viele Folgenglieder a_n beliebig nahe bei a liegen:

Definition 10.18: Häufungspunkt einer Folge

Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $n_0 \in \mathbb{N}_0$ ein $m > n_0$ gibt, sodass $|a_m - a| < \varepsilon$ gilt.

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist somit genau dann ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder in der ε-Umgebung $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ von a liegen. Ist a der Grenzwert einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, dann liegen in jeder ε-Umgebung $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ sogar *fast alle* (d. h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder. Der Grenzwert a einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist damit stets auch ein Häufungspunkt der Folge.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert a, dann ist a auch der einzige Häufungspunkt der Folge. Denn würde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ noch einen weiteren Häufungspunkt $b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ besitzen, dann würden unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beliebig nahe sowohl bei a als auch bei b liegen. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass in jeder ε-Umgebung $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ von a alle bis auf endlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ liegen.

Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht. Das heißt, eine Folge mit genau einem Häufungspunkt muss nicht zwingend konvergent sein, wie das Beispiel 10.19b) zeigt:

Beispiel 10.19: Häufungspunkte

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ hat die beiden Häufungspunkte -1 und 1. Denn ist $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann gilt $|-1-(-1)^n| = 0 < \varepsilon$. Für gerade $n \in \mathbb{N}_0$ gilt analog $|1-(-1)^n| = 0 < \varepsilon$ (siehe Abbildung 10.4, links).
b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gerade und $a_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade besitzt den Häufungspunkt 0. Denn ist $\varepsilon > 0$, dann gilt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$
$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$
Für gerade $n \in \mathbb{N}_0$, d. h. für $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}_0$, gilt dagegen $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m} = \infty$. Das heißt, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nicht konvergent.

Teilfolgen

Der Begriff *Teilfolge* einer Folge ist wie folgt definiert:

Definition 10.20: Teilfolge

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine beliebige Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $n_k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt die Folge
$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$$
Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

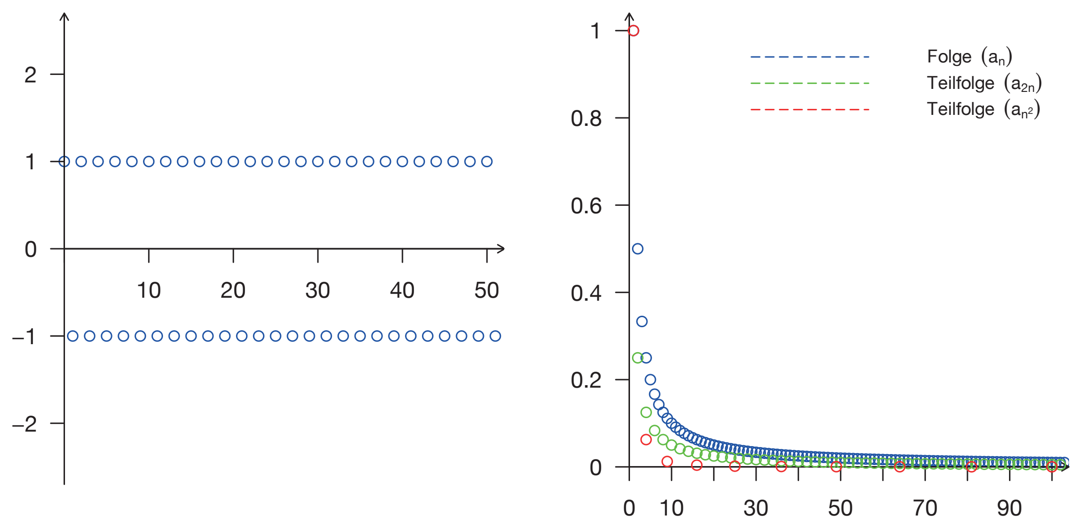


Abb. 10.4: Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n = (-1)^n$ (links) und Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ sowie ihre Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ (rechts)

Bei einer Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ handelt es sich somit um eine „Ausdünnung" einer gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die ganz einfach dadurch entsteht, indem gewisse Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ entfernt werden.

Beispiel 10.21: Teilfolgen

a) Die Folgen $a_0, a_3, a_5, a_7, \ldots$ und $a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$ sind Teilfolgen der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

b) Die harmonische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt z. B. die beiden Teilfolgen

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots \qquad \text{und} \qquad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$$

Diese Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lassen sich auch kürzer schreiben als $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\left(a_{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (siehe Abbildung 10.4, rechts).

Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton, beschränkt oder konvergent, dann überträgt sich dies auf jede ihrer Teilfolgen $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$. Insbesondere folgt unmittelbar aus der Konvergenzdefinition für Folgen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ auch $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ für jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ impliziert. Das heißt, jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen denselben Grenzwert a. Zum Beispiel gilt für die harmonische Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und ihre beiden Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $\left(a_{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Zwischen Häufungspunkten und Teilfolgen einer Folge besteht der folgende Zusammenhang:

Satz 10.22: Zusammenhang Häufungspunkt und Teilfolge

Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn a der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

Beweis: Siehe Merz-Wüthrich [9], Seite 283. ■

Beispiel 10.23: Zusammenhang Häufungspunkt und Teilfolge

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ hat die beiden Häufungspunkte -1 und 1 (siehe Beispiel 10.19a)). Aus Satz 10.22 folgt somit, dass -1 und 1 die Grenzwerte konvergenter Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind. Zwei solche konvergente Teilfolgen sind z. B. $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ bzw. $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Satz von Bolzano-Weierstraß

Der *Satz von Bolzano-Weierstraß* ist benannt nach dem böhmischen Mathematiker Bernard Bolzano (1781–1848) und dem deutschen Mathematiker Karl Weierstrass (1815–1897). Er besagt, dass jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mindestens einen Häufungspunkt und damit auch mindestens eine konvergente Teilfolge besitzt.

B. Bolzano

Satz 10.24: Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ besitzt eine konvergente Teilfolge bzw. einen Häufungspunkt.

Beweis: Siehe Merz-Wüthrich [9], Seite 283 f. ■

Das Beispiel 10.19b) zeigt, dass die Existenz genau eines Häufungspunktes keine Konvergenz impliziert. Der Grund hierfür ist, dass die Folge trotz genau eines Häufungspunktes noch unbeschränkt sein kann. Gemäß dem Satz 10.13 kann die Folge dann aber nicht konvergent sein. Der folgende Satz zeigt jedoch, dass bei zusätzlicher Beschränktheit der Folge, diese auch konvergent ist. Der Satz liefert damit eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Folge:

Satz 10.25: Notwendige und hinreichende Bedingung für Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.

Beweis: Siehe Merz-Wüthrich [9], Seite 284. ■

Beispiel 10.26: Häufungspunkte und Konvergenz

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := (-1)^n \frac{1}{1+n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist beschränkt. Aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt somit, dass die Folge mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist jedoch nicht monoton. Dennoch besitzt sie nur den Häufungspunkt 0. Die Folge ist somit konvergent mit dem Grenzwert 0, kurz: $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = 0$ (siehe Abbildung 10.5, links).

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n 5 + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist beschränkt. Der Satz von Bolzano-Weierstraß impliziert somit, dass die Folge mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist jedoch nicht monoton und besitzt die beiden Häufungspunkte -5 und 5. Das heißt, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nicht konvergent, aber es existieren Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen -5 bzw. 5 konvergieren (siehe Abbildung 10.5, rechts).

Limes inferior und Limes superior

Der Satz von Bolzano-Weierstraß (siehe Satz 10.24) besagt, dass jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zusätzlich konvergent, dann besitzt sie genau einen Häufungspunkt (siehe Satz 10.25) und dieser stimmt mit dem Grenzwert überein. Ist die beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ jedoch nicht konvergent, dann besitzt sie mehr als einen Häufungspunkt. Diese Beobachtung motiviert die beiden Begriffe *Limes inferior* und *Limes superior*:

Definition 10.27: Limes inferior und Limes superior einer Folge

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine beschränkte Folge. Dann wird der kleinste Häufungspunkt Limes inferior und der größte Häufungspunkt Limes superior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ genannt und mit $\liminf_{n\to\infty} a_n$ bzw. $\limsup_{n\to\infty} a_n$ bezeichnet.

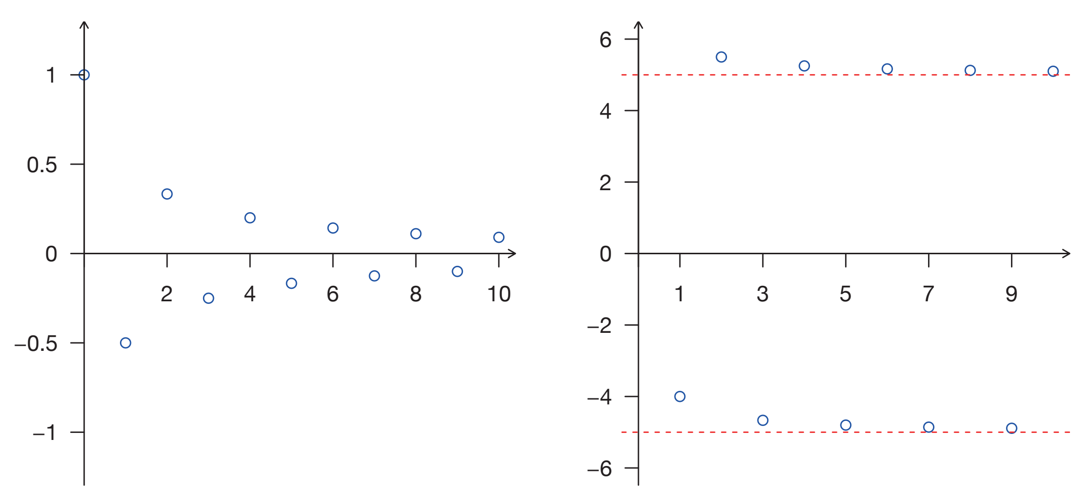


Abb. 10.5: Folge $\left((-1)^n \frac{1}{1+n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (links) und Folge $\left((-1)^n 5 + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (rechts)