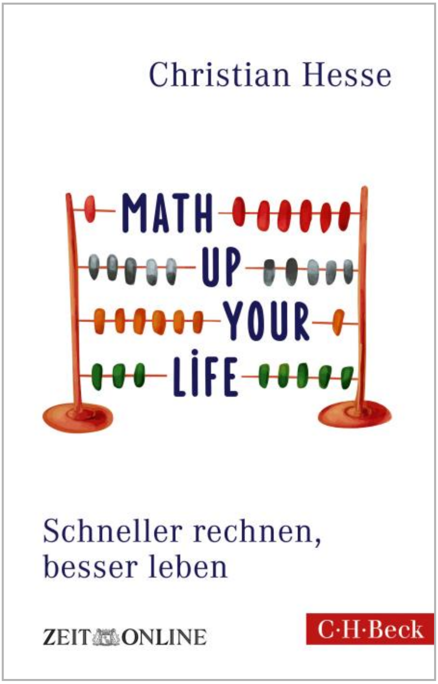

Christian Hesse
Math up your Life!
Schneller rechnen, besser leben

142 Seiten mit 25 Abbildungen. Broschiert
ISBN: 978-3-406-68137-0

Weitere Informationen finden Sie hier:
http://www.chbeck.de/14831066

INHALT

PARADOXE GEBURTSTAGE

Kürzlich rief ich bei einer Behörde an und die Dame am Telefon brauchte zur Identifizierung mein Geburtsdatum. Es stellte sich heraus, dass wir beide am selben Tag Geburtstag haben. «Was für ein seltener Zufall», sagte die freundliche Sachbearbeiterin.

Aber stimmt das? Sind gleiche Geburtstage wirklich seltene Zufälle?

Schon in einer Gruppe von 23 willkürlich ausgewählten Personen besteht nach mathematischer Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Chance von 50 Prozent, dass zwei Personen am selben Tag Geburtstag feiern; gleicher Monat, gleicher Tag.

Den meisten Menschen erscheint das ausgesprochen paradox. Immerhin gibt es 365 mögliche Geburtstage, mit dem 29. Februar sogar 366. Der Mathematiker Richard von Mises bezeichnete dies als *Geburtstagsparadoxon*.

Schauen wir uns kurz an, warum eine so kleine Gruppe ausreicht. Unser Gefühl verwechselt das Problem offenbar mit folgender Frage: «Wie groß muss die Gruppe sein, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 Prozent eine der Personen an einem *bestimmten* Tag Geburtstag hat, zum Beispiel an *meinem* Geburtstag?»

Darauf ist die richtige Antwort in der Tat viel größer, nämlich 253 Personen. Das ergibt 253 paarweise Vergleiche mit meinem Geburtstag. Besteht eine Gruppe nur aus 23 Personen, dann gibt es aber ebenfalls $23 \times 22/2 = 253$ paarweise Vergleiche der Geburtstage von je zwei Gruppenmitgliedern. Eine Gruppe von 23 Personen reicht also aus.

Anders ausgedrückt: Im Schnitt haben bei der Hälfte aller Fußballspiele zwei Akteure in der Startaufstellung am selben Tag Geburtstag (zwei mal elf Spieler plus Schiedsrichter).

IST DARWINS EVOLUTIONSTHEORIE FALSCH?

Einer aktuellen Studie zufolge zweifeln 90 Prozent der US-Amerikaner an Darwins Evolutionstheorie. Das brachte mich auf die Idee, die Theorie einmal mathematisch zu betrachten. Um es gleich vorweg zu sagen: Es geht mir nicht darum, Darwin zu diskreditieren oder den Anhängern des Schöpfungsglaubens Argumente zu liefern. Ich bin aber auf eine paradoxe Situation gestoßen.

Das Überleben der Schwächsten

Wir können dies im Setting eines Duells mit drei Duellanten mathematisch veranschaulichen. A sei ein unfehlbarer Schütze, der immer trifft. B habe eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80 Prozent, trifft also im Schnitt achtmal bei zehn Schüssen. C habe eine Trefferwahrscheinlichkeit von 50 Prozent. Sie stimmen mir sicher zu, wenn ich sage, dass C der untüchtigste der drei Duellanten ist.

Das Duell wird so lange fortgesetzt, bis nur noch einer steht. Es schießt immer nur ein Schütze, der stets durch Losentscheid ermittelt wird. Hat jemand Glück, ist er mehrmals hintereinander dran. Jeder Schütze kann sein Ziel frei wählen.

Nehmen wir einmal an, A und B würden, falls sie noch eine Wahl haben, ständig auf C schießen und C auf B. Das ist die «Schwächste-Gegner-Strategie». In diesem Fall wählt der jeweilige Schütze stets seinen schwächsten Gegner als Ziel aus. Mithilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie lässt sich berechnen, dass A, B und C die Überlebenswahrscheinlichkeiten 58 Prozent, 35 Prozent und 7 Prozent besitzen. Nicht überraschend, hat A die besten Chancen und für C sieht es eher deprimierend aus.

Deshalb kommt C ins Grübeln. Und er entscheidet sich, wenn A und B noch stehen, nicht mehr auf B, sondern auf A zu feuern. Bleibt alles andere gleich, ändern sich damit die Überlebenschancen von A, B, C auf 43 Prozent, 48 Prozent, 9 Prozent. Also konnte C seine Überlebenschancen etwas steigern.

Wer ist der Tüchtigste?

Das war zu erwarten. Was aber überraschend ist: Nicht mehr der beste Schütze A hat jetzt die größte Überlebenswahrscheinlichkeit, sondern B.

Und das ist noch nicht alles. Sich C zum Vorbild nehmend, entschließt sich jetzt auch B, nicht auf C, sondern auf A zu feuern. So kann er seine Überlebenswahrscheinlichkeit ebenfalls steigern, von vormals 48 Prozent auf 54 Prozent. A und C liegen abgeschlagen bei 24 Prozent und 22 Prozent.

Sie ahnen es bereits. Auch der unfehlbare Schütze A kann seine Strategie verbessern, indem er nicht mehr C als Ziel wählt, sondern B. Dann haben wir die «Stärkste-Gegner-Strategie», bei der jeder Schütze stets seinen stärksten Gegner als Ziel auswählt.

Kann A damit seine Führungsrolle bei den Überlebenswahrscheinlichkeiten zurückerobern? Nein: Eine Wahrscheinlichkeitsrechnung führt für A, B und C auf die Chancen 29 Prozent, 35 Prozent und 36 Prozent.

Schwäche als Vorteil

Das Ergebnis ist paradox. Man muss es sich auf der Zunge zergehen lassen: Der mit Abstand beste, ja sogar unfehlbare Schütze A hat die schlechtesten Chancen im Überlebenskampf. Und nicht allein das: der mit Abstand schlechteste Schütze C ist der wahrscheinlichste Gewinner.

Übrigens ist die «Stärkste-Gegner-Strategie» die für alle

Beteiligten sinnvollste Verhaltensweise: Keiner kann durch alleiniges Abweichen von dieser Strategie seine Chancen verbessern. Mathematiker sprechen von einem «Nash-Gleichgewicht». Diese Gleichgewichtsstrategie führt hier evolutionär nicht zum «Überleben des Tüchtigsten», sondern vielmehr und widersinnigerweise zum «Überleben des Schwächsten». Wir sehen also, dass und wie die übermächtige Stärke des Starken sich in manchen Situationen leicht zu einer eklatanten Schwäche auswachsen kann.

SCHNELLRECHNEN-SCHNELLKURS (TEIL 1)

Es gibt Menschen, die können die dreizehnte Wurzel aus einer hundertstelligen Zahl in weniger als 13 Sekunden berechnen. Damit nehmen sie an einer riesigen Zahl schneller eine äußerst komplizierte Operation vor, als andere die Ziffern überhaupt aussprechen können. Möglich ist's dank eines ganzen Bündels von Rechentricks.

Einigen davon begegnen Sie von Zeit zu Zeit bei der Lektüre dieses Buches. Keine Sorge: Es geht nicht um Aufgaben mit hundertstelligen Zahlen, sondern einfach um ein paar coole Tricks, die für das Rechnen im Alltag nützlich sind. Zum Beispiel für das große Einmaleins.

Berechnen wir einmal 13×17.

Das geht so: Man nehme die erste Zahl (13), addiere die Einer (7) der zweiten Zahl, $13+7=20$, füge eine 0 an, 200, und addiere dazu das Produkt der Einer ($3 \times 7=21$) beider Zahlen. Ergibt: 221.

Mit derselben Methode bekommen wir $14 \times 19=266$, und zwar über diese Zwischenstufen:

$14 \rightarrow 23 \rightarrow 230 \rightarrow 266$

So meistern Sie alle Produkte von Zahlen zwischen 10 und 19 leicht und schnell.

Hier drei Aufgaben für alle, die es nun selbst probieren wollen:

$15 \times 18 = ?$
$12 \times 16 = ?$
$15 \times 15 = ?$

GOETHE IM DUELL MIT NEWTON

Goethe ist Kult. Als ein Meinungsforschungsinstitut vor gut zwei Jahren nach dem bedeutendsten Deutschen aller Zeiten fragte, landete der große Dichter aus Weimar unangefochten auf Platz 1. Dabei gibt es durchaus etwas, das man ihm nachtragen kann: sein fehlendes Verständnis für die Mathematik.

Was viele nicht wissen, ist, dass Johann Wolfgang von Goethe über viele Jahre mehr Zeit und Leidenschaft in naturwissenschaftliche Studien investiert hat als in seine Dichtkunst. Der monumentale Beweis für sein Engagement in den Naturwissenschaften ist das tausendseitige Werk *Zur Farbenlehre*, an dem er mehr als zwei Jahrzehnte schrieb. Um davon gebührend Notiz zu nehmen, sei erwähnt, dass Goethe, nach eigener Aussage, auf die darin festgehaltenen Ergebnisse seines Denkens stolzer war als auf alles, was er als Dichter geleistet hat. Das ist eine erstaunliche Aussage.

Ins Staunen gerät auch, wer dieses Werk mit der Mathematik-Brille liest. Goethe präsentiert darin einen – um es gleich vorweg zu sagen – ziemlich missratenen Gegenentwurf zu Newtons gut 100 Jahre zuvor veröffentlichter Farbentheorie. Während Newton mathematisch bewies, dass weißes Licht in berechenbarer Weise in die Farben des Regenbogens zerlegbar ist, hielt Goethe diese Sicht für absurd, denn «klares, reines, ewig ungetrübtes Licht kann nicht aus dunklen Lichtern zusammengesetzt sein».

Laut Goethe war Newtons Theorie «barer Unsinn»

Er geht sogar noch einen Schritt weiter. Der «Polemik»-Teil des Buches ist prall gefüllt mit Invektiven gegen Newton und die Mathematik. Newtons Theorie nennt er darin «baren Unsinn», etwas «ähnlich Närrisches und Lächerliches von Erklärungsart» sei kaum in der Geschichte der Wissenschaften zu finden.

Dabei liegt der Fehler bei ihm. Goethes Farbenlehre wurde schon von den Mathematikern und Physikern seiner Zeit einhellig verworfen. Goethe war wohl mehr Sprachmensch als ein zu mathematisch-analytischem Denken befähigter Kopf. Er hat sich selbst als «zahlenscheu» bezeichnet und Newtons in der Mathematik grundierte Argumentation einfach nicht nachvollziehen können.

Was den Dichter nicht davon abhielt, sich mehrheitlich negativ über Mathematiker zu äußern. Der folgende Passus ist kein Einzelfall: «Dass aber ein Mathematiker, aus dem Hexengewirre seiner Formeln heraus, zur Anschauung der Natur käme und Sinn und Verstand unabhängig wie ein gesunder Mensch brauchte, werde ich wohl nicht erleben.»

Daten statt Dativ

Dies wäre nicht weiter schlimm, wenn nicht Goethe in unserer Gesellschaft bis zum heutigen Tag ein solch enormes Ansehen genießen würde. Er ist deshalb mitverantwortlich für die bei uns in Deutschland immer noch grassierende geringe Wertschätzung der Mathematik als Erkenntnismethode. Nirgendwo sonst trifft man als Mathematiker immer wieder auf Menschen, die mit ihrer Mathematikunkenntnis auch noch kokettieren. In Frankreich, in Skandinavien, auch in Asien ist das undenkbar.

Ein echtes Problem. Wir stehen heute an der Schwelle zu einer Ära, in der allein mit sprachlicher Kompetenz schon der ganz normale Alltag nicht mehr gut gemeistert werden kann. Inzwischen gibt es auf unserem Planeten mehr Zahlen als Wörter. Deshalb brauchen wir dringend ein höheres Niveau an quantitativer Bildung in unserer Gesellschaft. Wir brauchen größere und weiter verbreitete Fähigkeiten, mit Zahlen, Daten, Statistiken umzugehen, Wahrscheinlichkeiten einzuschätzen, Chancen und Risiken zu bewerten, mit wenig Information gute Entscheidungen zu treffen.

Somit brauchen wir in unseren Schulen mehr Gauß und weniger Goethe. Wir brauchen, etwas überspitzt und polemisch auf den Punkt gebracht: mehr Datenkompetenz und weniger Dativkompetenz.

WARUM IHRE FREUNDE BELIEBTER SIND ALS SIE

Auf Facebook tummeln sich dieser Tage rund 27 Millionen Deutsche. Über wenige Ecken kennt in dem sozialen Netzwerk jeder jeden. Mit der Integration des Nachrichtendienstes WhatsApp sollen die Beziehungen der Nutzer noch enger und viele neue Freundschaften geschlossen werden. Da stellt sich die Frage: Wie ist es um Ihren Freundeskreis bestellt?

Das Netzwerk Ihrer Freunde ist sehr komplex. Es besteht aus Ihnen, Ihren Freunden, den Freunden Ihrer Freunde, den Freunden der Freunde Ihrer Freunde … Es ließe sich beliebig fortführen. Betrachten wir also nun konkret die Zahl Ihrer Freunde. Und ferner die Zahl der Freunde, die Ihre Freunde im Schnitt haben. Zwar kenne ich Sie nicht und weiß auch nicht, wie viele Freunde Sie haben, aber ich werde trotzdem die Prognose wagen, dass Ihre Freunde im Durchschnitt mehr Freunde haben als Sie. Richtig?

Falls das so ist, sollten Sie jetzt nicht denken, dass Sie weniger anziehend, interessant oder sympathisch sind als Ihre

Freunde. Es ist schon aus mathematischen Gründen so. Bei fast allen.

Auf den ersten Blick scheint es widersinnig: Warum sollte statistisch ein Unterschied bestehen zwischen der Zahl der Freunde eines Menschen und der Zahl der Freunde eines Freundes dieses Menschen? Dennoch ist es so. Es wird als *Freundschaftsparadoxon* bezeichnet.

Im Schnitt hat jeder Freund 635 Freunde

Mit Facebook lässt sich das wunderbar prüfen. Ein Facebook-User hat im Schnitt 190 Freunde. Das hat eine Studie aus dem Jahr 2011 ergeben. Doch von den Freunden eines Facebook-Users hat jeder im Schnitt 635 Freunde. Das ist ein beachtlicher Unterschied, der auf eine starke Verzerrung hindeutet. Und in der Tat, für 93 Prozent der Menschen auf Facebook ist ihre Freundesliste kürzer, als die ihrer Freunde oder Freundinnen im Durchschnitt ist.

Ist das schlimm? Vielleicht. Laut einer anderen Studie korreliert eine zunehmende Benutzung von Facebook mit wachsender persönlicher Unzufriedenheit des Nutzers. Für viele erzeuge Facebook das Gefühl, dass ihre Freunde ein interessanteres, cooleres, geselligeres Leben haben als sie selbst. Und das Freundschaftsparadoxon trägt zu diesem Gefühl bei.

Woher kommt nun die starke Verzerrung? Die Zahl der Freunde Ihrer Freunde ist deshalb zu Ihren Ungunsten verzerrt, weil Menschen mit vielen Freunden allein schon wegen ihrer großen Freundeszahl eine größere Chance haben, auch mit Ihnen befreundet zu sein. Das heißt, Menschen mit vielen Freunden sind unter Ihren Freunden überrepräsentiert, während Menschen mit wenigen Freunden unter Ihren Freunden im Vergleich zum Gesamtnetzwerk unterrepräsentiert sind.
