C.H.BECK
www.chbeck.de

Unverkäufliche Leseprobe

Christian Hesse
Das kleine Einmaleins des klaren Denkens
22 Denkwerkzeuge für ein besseres Leben

352 Seiten, Paperback
ISBN: 978-3-406-58684-2

I. Aller Anfang

Auftakt

Bemerkenswertes,
Beweise, bisschen Brockhaus

I will a little think.
Einstein, in Amerika

Probleme sind ein Teil der menschlichen Grundsituation und stellen, nach einer möglichen Definition, eine Diskrepanz zwischen einem Ist-Zustand und einem Soll-Zustand dar. Denken ist darauf gerichtet, unter Einbeziehung von konkreten Tatsachen, abstrakten Konzepten, intuitiven Vorstellungen und begrifflichen Konstruktionen Hilfsmittel zu entwickeln, um diese Diskrepanz zu überwinden. Von seinem Grundzug her will Denken kenntnismehrend sein. Denken ist eine Kernkompetenz des Menschen. Die Bildung, die ihr zugrunde liegt, ist die Grundvoraussetzung für Allgemeinbildung.

Denken ist eine nicht auf Menschen allein beschränkte Aktivität, doch der menschliche Denkapparat ist unter allen vergleichbaren evolutionären Schöpfungen am besten ausgebildet. Dies ist mit so großem Abstand der Fall, dass man bei Denken zunächst menschliches Denken im Sinn hat.

Denken ist eine Schlüsseltechnologie des Menschen für die in den Fährnissen des Lebens allerorts und immerzu erforderliche Entscheidungsfindung. Quantitativ-analytisches oder mathematisches Denken reicht weit in die Frühzeit menschlicher Aktivitäten zurück, und die Mathematik ist eine der ältesten Wissenschaften. Ihr Ursprung verliert sich im Dunkel der Geschichte, ihr Gebrauchswert ist offenkundig: Bereits in der Urzeit bemühten sich Menschen, Land zu vermessen, Kalender zu erstellen, Handel zu treiben und generell die Welt, die so reichhaltig an Erscheinungen ist, besser zu verstehen. Mathematisches Denken hat sich seither zu einem ungemein mächtigen Erkenntniswerkzeug entwickelt, das es dem Menschen gestattet, in Bereiche weit jenseits seiner eigenen Erfahrungswelt vorzudringen, etwa in die Welt der Elementarteilchen oder in die Tiefe des Weltalls. Mathematisches Denken durchzieht obendrein nicht nur fast jede andere Wissenschaft – von der Anglistik über die Meteorologie, Psychologie bis hin zur Zoologie –, sondern auch unseren gesamten Alltag. Sie ist die Schlüsselkompetenz für Schlüsseltechnologien und fungiert deshalb oftmals als Triebfeder wichtiger Fortschritte. Sie steckt unbemerkt in vielen Errungenschaften modernen Ingenieurwesens wie der Computertomografie, dem elektronischen Geld, dem Fernseher und Handy. Auch wenn das Auto fährt, der Flieger fliegt, die Brücke trägt, die Heizung heizt, ist immer Mathematik im Spiel.

Mathematik ist auch in vielen Bereichen der Natur erkennbar: Nicht nur die Konstruktion der Bienenwaben und die Anordnung der Blätter vieler Pflanzen offenbart bei näherer Betrachtung viel faszinierende Mathematik, sondern auch die Struktur von Raum und Zeit im Großen besitzt außerordentlich raffinierte mathematische Gesetzmäßigkeiten.

Quantitativ-analytisches Denken hilft uns Menschen in der modernen Welt in vielfacher Weise. Auf Schritt und Tritt werden wir mit Zahlen, Funktionen, Statistiken und anderen Strukturen konfrontiert. Mit Zahlen können Entscheidungen begründet, mit Funktionen Entwicklungen dargestellt und mit Statistiken Argumente untermauert werden. Mit Zahlen, Funktionen und generell mit mathematischen Strukturen kann man übersichtlich die Welt ordnen, aber auch verwirren, manipulieren und täuschen. Man kann damit die Geheimnisse der Welt entschlüsseln und das Entschlüsselte darstellen. Aber bei unsachgemäßer Anwendung kann man auch in die Irre gehen oder andere in die Irre führen.

Sigmund, ach. Bei all seiner Brillanz verfiel Sigmund Freud, der Begründer der Psychoanalyse, einer dümmlichen Zahlenmystik des Berliner HNO-Arztes Wilhelm Fließ. «Du wirst mir die Geheimnisse der Welt in Zyklen von 28 und 23 offenbaren», so Freud 1897 in einem Brief an Fließ. Durch ausgiebige Beschäftigung mit den Krankenakten seiner Patienten hatte Fließ übereinstimmende Rhythmen im Krankheitsverlauf, bei Unfällen, Komplikationen nach Operationen und bei Selbstmordversuchen entdeckt. Die von ihm daraus abgeleitete Theorie besagt, dass das Leben eines jeden Menschen durch bestimmte Zyklen geprägt ist, die sich auf die Zahlen 28 (den weiblichen Zyklus) und 23 (den männlichen Zyklus) gründen. Kurzum, Fließ maß allem eine Bedeutung bei, was sich auf Zahlen der Form $23x + 28y$ zurückführen ließ (für positive oder negative ganze Zahlen x und y). Die Formel passte er an die verschiedensten Naturphänomene an und stellte gar über viele Jahre hinweg umfangreiche Tabellen mit wichtigen Zahlen zusammen, die obige Gestalt hatten. Ein Arbeitseinsatz epischen Ausmaßes. Diese Idee faszinierte Fließ und schließlich auch Freud, stießen sie doch unentwegt auf Zahlen vom Typ $23x + 28y$.

Doch Fließ hatte die Rechnung ohne das Milchmädchen gemacht. Weder er noch Freud realisierten, dass sich bei Ersetzen von 23 und 28 durch zwei beliebige teilerfremde Zahlen genau dasselbe Phänomen einstellt. Jede ganze Zahl lässt sich nämlich als Summe ganzzahliger Vielfache zweier beliebiger teilerfremder Zahlen darstellen. Das fürwahr Tragische: Alle ihre Bemühungen waren demnach nichts als Spezialunfug. Für Fließ bedeutete das Jahre vergeudeter Arbeit an einer «Theorie», die auf einer simplen mathematischen Eigenschaft von Zahlen beruht. Und Freuds Schüler waren später peinlich berührt, dass ihr Lehrer Opfer dieser Form von Mumpitz geworden war. Ein intellektuelles Großmissverständnis.

Kompetentes mathematisches Denken feit den, der dazu in der Lage ist, gegen Manipulationsgefahren und verbreiteten Irrglauben. Bei entsprechenden Defiziten ist man dem einen wie dem anderen schutzlos ausgeliefert und verschenkt darüber hinaus auch außerordentlich wichtige Erkenntnismöglichkeiten.

Es liegt in der Natur der Sache, dass Problemlösen immer problematisch bleiben wird. Problemlösende Ideen lassen sich nicht erzwingen, aber durch Einflussmöglichkeiten in Form von Denkheuristiken, also den gezielten Einsatz von Denkwerkzeugen, immerhin wahrscheinlicher machen. Ziel dieses Buches ist es, eine Anleitung zur Ideengenerierung zu geben. Uns geht es um Problemlösen mit System.

Zwischenspiel mit Stilblüten

Hitliste professoral-pädagogischer Höhepunkte

3. Platz, geteilt (unheimlich unerfreulich): «Man bekommt also unheimlich schnell unheimlich ungenaue Ergebnisse.» Prof. N.N. zum Thema Programmierfehler im Pentium-Prozessor.

3. Platz, geteilt (schneller schnell): «Man kann den Beweis auch schnell machen, indem man ihn schneller macht.» Prof. K. H. in einer Höheren-Mathematik-Vorlesung.

2. Platz (Entschleunigung): «Wenn ich hier an die Tafel schreibe, dann nicht damit Sie es lesen können, sondern hauptsächlich damit ich meinen Vortrag bremse.» Prof. F. B. in einer mathematischen Kryptologie-Vorlesung.

1. Platz (Powerpointillismus): «Ab 24 Seiten pro Sekunde ist es ein Film.» Prof. J. W. in einem Mathematik-Seminar, bei dem der Vortragende sehr schnell sehr viele Power-Point-Seiten zeigte.

Die Mathematik bedient sich einer präzisen und auf der ganzen Welt gültigen Zeichensprache: «Wer die Welt verstehen will, muss sich in die Lehre der Mathematik vertiefen, deren Sprache aus Zahlen besteht und aus Linien, die sich zu Kreisen, Dreiecken, zu Pyramiden und zu Würfeln fügen. Ohne diese Sprache irren wir hilflos durch ein dunkles Labyrinth, in dem kein Lichtstrahl uns den Weg weist, keine Ariadne uns einen Faden borgt», schreibt Thomas Vogel in *Die letzte Geschichte des Miguel Tores da Silva* – und hat recht.

Computer spielen in der Mathematik – wie generell in den meisten Bereichen des modernen Lebens – zwar eine wichtige Rolle, sind aber nicht die Hauptsache. Dieses ist und bleibt die gedankliche Durchdringung komplizierter Zusammenhänge. Und auf dieses Ziel hin können Computer durchaus als Hilfsmittel eingesetzt werden, doch die dafür benötigte Intelligenz kann nicht künstlich sein.

Mathematische Erkenntnisse, Formeln und Gleichungen sind überall im Universum gültig und unabhängig von allen zeitlichen Einschränkungen. Mathematik versucht, Wahrheit zu etablieren. Dazu gehört zuallererst eine möglichst eindeutige Bestimmung der verwendeten Begriffe, um eine Verständigung über diese herbeiführen zu können. Eine solche Bestimmung nennt man Definition. Euklid etwa arbeitete mit den folgenden Definitionen von Punkt, Linie, Gerade:

Ein Punkt ist etwas, das keine Teile hat.
Eine Linie ist eine breitenlose Länge.
Eine Gerade ist eine Linie, die gleichförmig zu den in ihr enthaltenen Punkten liegt.

Die drei Sätze vermitteln schon ein Gefühl davon, welche Klimmzüge Euklid machen musste, um vertraute Alltagsobjekte definitorisch zu fassen. Meist gibt es verschiedene Möglichkeiten, das Gemeinte präzise zu fassen. Tiger sind zum Beispiel die einzigen gestreiften Katzen und Menschen sind die einzigen ungefiederten Zweibeiner. Zwei ungewöhnliche, aber mathematisch völlig ausreichende, da vereindeutigende Beschreibungen.

Höhepunkte der Definitionskunst

Gebeutelt und versackt: «Ein Wertsack ist ein Beutel, der aufgrund seiner besonderen Verwendung nicht Wertbeutel, sondern Wertsack genannt wird, weil sein Inhalt aus mehreren Wertbeuteln besteht, die in den Wertsack nicht verbeutelt, sondern versackt werden.» – Merkblatt der Deutschen Bundespost (1992), um den «auch in Dienstanfängerkreisen immer wieder vorkommenden Verwechslungen der Begriffe Wertsack, Wertbeutel, Versackbeutel und Wertpaketsack abzuhelfen».
Wie Hegel mit Promille: «Die Elektrizität ist der reine Zweck der Gestalt, die sich von ihr befreit; die ihre Gültigkeit aufzuheben anfängt, denn die Elektrizität ist das unmittelbare Hervortreten oder das nicht von der Gestalt herkommende, noch durch sie bedingte Dasein oder noch nicht die Auflösung der Gestalt selbst, sondern der oberflächliche Prozess, worin die Differenzen ihre Gestalt verlassen, aber sie zu ihrer Bedingung haben und noch nicht an ihrer selbständig sind.» – Hegels berühmt-berüchtigte Definition der Elektrizität, in: Hegel, G.W.F. (1830): Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften.

Neben exakten Definitionen sind Beweise ein Hauptkennzeichen mathematischer Tätigkeit. Beweise sind für die Mathematik existenziell. Ein Beweis ist eine stichhaltige Begründung für eine aufgestellte Behauptung, eine Begründung, die in der Regel durch logisch einwandfreies Anknüpfen von Tatsachen an ihre Vorgänger gegeben wird. Beweisen ist ganz und gar und schlechthin die Prozessform von Sachlichkeit.

Bertelsmännisch bis Brockhäuslich

Beweisen: Stamm ist «weisen» = wissend machen, aber auch «weismachen» = belehren, was seit dem 16. Jahrhundert in der heutigen abwertenden Bedeutung von vormachen, vorschwindeln verwendet wird.

Im täglichen Leben, in Wissenschaft und Rechtsprechung, in Politik und Sport werden Beweise in vielen verschiedenen Spielarten stets aufs Neue unternommen. Ein Alltagsbeweis wäre zum Beispiel dieser: «Nun ganz zweifellos; dass die Augen zum Sehen, die Ohren zum Hören notwendig sind, das weiß jeder, andernfalls könnte man es ihm durch Zuhalten dieser Organe leicht eindeutig beweisen.» (Kohlrausch 1934)

In den empirischen Wissenschaften wird Wahrheit durch Beobachtung oder durch Experiment gefunden. Im Sport werden Tatsachen nicht zuletzt durch Entscheidung eines Schiedsrichters geschaffen. In der Rechtsprechung wird Wahrheit durch das Urteil eines Richters etabliert. Nach unserem Rechtsverständnis soll ein Schuldspruch dann erfolgen, wenn die Tat jenseits jedes vernünftigen Zweifels bewiesen ist – *beyond all reasonable doubt.*

Die Mathematik hat ihre eigene Vorstellung von Beweisen und eine prinzipiell andere Einstellung zur Wahrheit und zur Wahrheitsfindung als die Rechtsprechung. In der Mathematik ist ein Beweis die gültige Herleitung der Richtigkeit einer Aussage aus einer Anzahl von Axiomen, die als wahr vorausgesetzt werden, sowie aus anderen Aussagen, die mit den Axiomen bereits bewiesen worden sind. Mathematiker sind Menschen – das wird bald noch klarer werden –, die es sich mit ihren Beweisen manchmal fast unbehaglich viel schwerer machen als andere Leute.

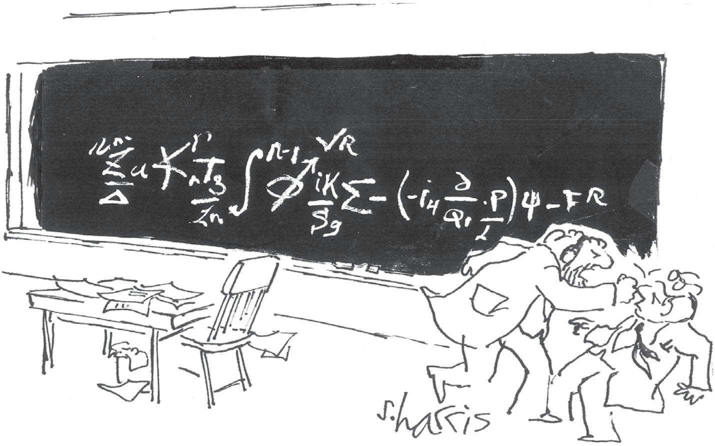

Abbildung 1: «Sie wollen einen Beweis? Hier haben Sie einen Beweis!» Cartoon von Sidney Harris

Das berühmteste Axiomensystem ist das von Euklid zur Grundlage seiner Geometrie gewählte. Es umfasst 5 Postulate, wie z. B., von jedem Punkt zu jedem anderen die Strecke ziehen zu können. Oder das bekannte Parallelenaxiom, welches im Kern besagt, dass es zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt S, der nicht auf g liegt, genau eine Parallele zu g durch S gibt. Aus nur 5 Axiomen leitet Euklid seine gesamte Geometrie her, darunter viele Eigenschaften von Dreiecken einschließlich des Satzes von Pythagoras, von Kreisen, Parallelogrammen und allerlei mehr. Ein Jahrtausendwerk.

Warum braucht man überhaupt Axiome?
Wenn Sie – wie ich – kleine Kinder haben, kommt Ihnen der folgende Dialog vielleicht bekannt vor. Er führt uns zu einer Antwort.
Ihr Kind: «Warum kann ich nur ein Glas Apfelsaft haben?»

Sie: «Weil wir bald essen, ich möchte nicht, dass du dir den Appetit verdirbst.»
Ihr Kind: «Warum verdirbt Apfelsaft meinen Appetit?»
Sie: «Weil er den Magen füllt und viel Zucker enthält.»
Ihr Kind: «Warum kann ich keinen Zucker haben?»
Sie: «Weil er durstig macht und nicht gut für deine Zähne ist.»
Ihr Kind: «Warum ist Zucker nicht gut für meine Zähne?»
Sie: «Zucker zieht Bakterien an und die machen Löcher in deine Zähne.»
Ihr Kind: «Warum machen Bakterien Löcher in meine Zähne?»

An diesem Punkt könnten sich ein paar Dinge erschöpft haben, etwa Ihre Geduld, und vielleicht fragen Sie sich, ob dieser Dialog je enden wird. Eine gute Frage. Logisch gesehen müsste er tatsächlich niemals ein Ende haben. Und so geht es: Beginnen Sie mit einer beliebigen Frage. Und nach jeder «Weil»-Antwort fragen Sie einfach: «Warum?» So wird ein Trilemma geschaffen, ein Dilemma mit drei und nicht nur zwei unbefriedigenden Alternativen. Philosophen nennen diese spezielle Form das Münchhausen-Trilemma. Dies sind die drei Alternativen:

1. Die Abfolge *Frage, Antwort, Frage* … setzt sich ad infinitum fort. Das bezeichnet man als endlosen Regress.
2. In der Folge von Fragen und Antworten kann im späteren Verlauf eine frühere Antwort wiederauftauchen. Das wird Zirkelschluss genannt.
3. Man kann eine Behauptung für selbstverständlich erklären, ex cathedra sprechen oder eine höhere Autorität anrufen (z. B. Gott).

Kurzer Zirkelschluss oder Zirkelkurzschluss

«Herr K. hat mir erzählt, Gott habe mit ihm gesprochen.» – «Das glaube ich nicht, Herr K. lügt bestimmt.» – «Das kann nicht sein. Gott würde doch nicht mit jemandem sprechen, der lügt.»

In der Mathematik wird die dritte Möglichkeit gewählt. Man setzt eine Reihe von Postulaten oder Axiomen, die man entweder als selbstverständlich annimmt oder als zwingend erforderlich betrachtet, an den Beginn seiner Überlegungen und Herleitungen.
Nehmen wir ein einfaches Beispiel: ein simples System von drei Postulaten für die Bildung von Kommissionen in einem Gemeinderat.

Postulat 1: Es soll genau 6 Kommissionen geben.
Postulat 2: Jedes Gemeinderatsmitglied muss in genau 3 Kommissionen mitwirken.
Postulat 3: Jede Kommission muss aus genau 4 Personen bestehen.

Ein Modell der Gegebenheiten lässt sich durch die folgende Figur darstellen:

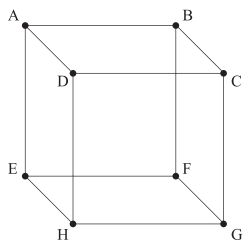

Abbildung 2: Kommissionen in einem Gemeinderat

Die Punkte repräsentieren dabei 8 Personen: A, B, C, D, E, F, G, H. Jede Seite des Würfels repräsentiert eine vierköpfige Kommission, etwa die Kommission {A, B, C, D} oder die Kommission {A, D, E, H}. Da jeder Würfel genau 6 Seitenflächen hat und jeder Eckpunkt eines Würfels Teil von genau 3 Seiten ist, sind die drei Postulate offenkundig erfüllt.

Wir konnten also ein Modell finden, das den Postulaten gerecht wird. Die drei Postulate sind demnach konsistent, d. h. nicht in sich widersprüchlich, was einem bei einer unweisen Wahl der Postulate natürlich auch passieren kann. Außerdem ist man in der Regel an Postulaten interessiert, die es erlauben, jede mögliche Aussage über die Kommissionen zu beweisen oder zu widerlegen. Ist dies der Fall, nennt man ein Axiomensystem *vollständig*.

Man kann nun versuchen, aus den Postulaten weitere Erkenntnisse über die Kommissionen oder die beteiligten Personen herzuleiten. Eine einfache abgeleitete Eigenschaft ist die folgende:

Satz: Der Gemeinderat besteht aus genau 8 Personen.

Der entsprechende Beweis ist äußerst schlicht: Wir multiplizieren die Zahl der Kommissionen (6) mit der Zahl der Personen in jeder Kommission (4) und erhalten 24. Da jede Person laut Postulat 3 an genau 3 Kommissionen beteiligt sein muss, wird jede Person dreifach gezählt, und es gibt 24/3 = 8 Mitglieder im Gemeinderat.

Das Axiomensystem, bestehend aus den folgenden beiden Axiomen, ist hingegen nicht konsistent:

Postulat 1: Jede Kommission bestehe aus genau 2 Personen.
Postulat 2: Exakt eine Person soll an einer ungeraden Zahl von Kommissionen beteiligt sein.

Diese beiden Axiome sind in sich widersprüchlich. Und wir können sogar recht leicht beweisen, warum. Postulat 1 führt dazu, dass die Zahl jener Personen, die jeweils in einer ungeraden Zahl von Kommissionen ist, zwingend geradzahlig ist. Unser Argument basiert auf gedanklichem Händeschütteln. «Wenn in einer Gruppe von Menschen diese wie üblich einander paarweise die Hände schütteln, ist die Anzahl der Menschen, die eine ungerade Zahl von Malen die Hände geschüttelt haben, eine gerade Zahl. Warum? Wenn man von n Personen ausgeht und s_i angibt, wie oft Person i Hände geschüttelt hat, dann muss für eine natürliche Zahl k die Gleichung $s_1 + s_2 + \ldots + s_n = 2k$ richtig sein, weil jedes Handschütteln doppelt in die Summe eingeht. Doch 2k ist eine gerade Zahl, also ist die Summe $s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ gerade, und somit können zwar ungerade Summanden darin vorkommen, aber nur eine gerade Anzahl davon.»

Ersetzt man «paarweises Händeschütteln» durch «eine Kommission miteinander bilden», so ist dieses Ergebnis auf unser Beispiel direkt anwendbar.

Beweise können kurz oder lang sein, stark symbolhaltig protokolliert, bildlich dargestellt oder prosaisch ausformuliert werden. Sie können ein Problem schnell und bündig bändigen oder in langen, gedankenreichen Denkbahnen ihr Ziel finden. Wir werden allen genannten Fällen in diesem Buch begegnen. Doch wie auch immer die Darreichungsform eines Beweises aussieht, man muss ihn verstehen, und dabei ist jeder auf seine eigenen Verständnisressourcen zurückgeworfen. Probleme sind demokratisch. Vor dem Beweis sind alle gleich!

Ein Musterbeispiel für die Durchschlagskraft einer einzigen Idee und gleichzeitig für die Schönheit der Mathematik ist die schon den alten Griechen bekannte Tatsache, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt.

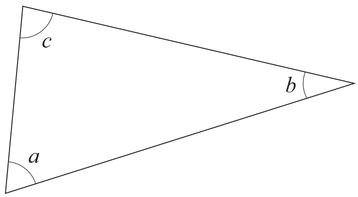

Abbildung 3: Winkel in einem Dreieck

Die Winkel a, b und c addieren sich also zu 180°. Angesichts der unendlichen Vielfalt aller denkbaren Dreiecke, ob gleichschenklig, rechtwinklig oder spitzwinklig, ist dies ein überraschender, stark ordnender und Einheit stiftender Aspekt. Ein Objekt mit einer anderen Winkelsumme als 180° kann kein Dreieck sein. So einfach ist das.

Der Reiz dieser Tatsache besteht nicht nur aus ihr selbst. Auch der Beweis ist elementar, aber gleichzeitig genial in seiner tiefen Einsicht. Man ziehe durch einen beliebigen Eckpunkt eines beliebig gewählten Dreiecks die Parallele zur gegenüberliegenden Kante. Durch diesen meisterlichen Kunstgriff entstehen zwei weitere Winkel, die aber genauso groß wie zwei Innenwinkel im Dreieck sind. Und schon kommt die Lösung in Sicht. Dazu studiere man das folgende Diagramm. Gleiche Buchstaben bezeichnen darin Winkel gleicher Größe.

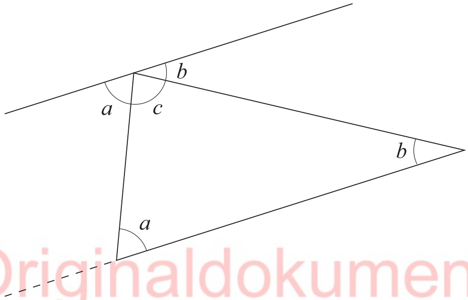

Abbildung 4: Winkelsumme im Dreieck

Es muss also a + b + c = 180° sein. Das war's bereits.

Trotzdem polarisiert die Mathematik sehr stark. Unsanft bedrängt bisweilen das Reden und Gerede über Mathematik diese Wissenschaft. Der glühenden Leidenschaft ihrer stärksten Anhänger steht die nicht minder ausgeprägte Abneigung der Mathematik-Hasser gegenüber, ungeachtet all der nützlichen Dinge, welche die Mathematik hilft in die Welt zu stemmen. Schon der Anblick mathematischer Formeln löst bei Antimathematikern ausgeprägte Gefühle intensiven Unwohlseins aus.

[…]