

# Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3

Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung

Bearbeitet von  
Lothar Papula

7., überarbeitete und erweiterte Auflage 2016. Buch. XXI, 870 S. Softcover

ISBN 978 3 658 11923 2

Format (B x L): 16,8 x 24 cm

[Weitere Fachgebiete > Technik > Technik Allgemein > Mathematik für Ingenieure](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

  
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beek-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

---

Mathematik für Ingenieure und  
Naturwissenschaftler Band 3

Die drei Bände *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler* werden durch eine Formelsammlung, ein Buch mit Klausur- und Übungsaufgaben sowie ein Buch mit Anwendungsbeispielen zu einem Lehr- und Lernsystem ergänzt:

Lothar Papula

**Mathematische Formelsammlung**

Für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Mit zahlreichen Abbildungen und Rechenbeispielen  
und einer ausführlichen Integraltafel

**Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler –  
Klausur- und Übungsaufgaben**

632 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zum Selbststudium  
und zur Prüfungsvorbereitung

**Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler –  
Anwendungsbeispiele**

222 Aufgabenstellungen mit ausführlichen Lösungen

---

Lothar Papula

# Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3

Vektoranalysis,  
Wahrscheinlichkeitsrechnung,  
Mathematische Statistik, Fehler- und  
Ausgleichsrechnung

7. Auflage

Mit 550 Abbildungen, zahlreichen Beispielen aus  
Naturwissenschaft und Technik sowie 295  
Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen



Springer Vieweg

Lothar Papula  
Wiesbaden, Deutschland

ISBN 978-3-658-11923-2  
DOI 10.1007/978-3-658-11924-9

ISBN 978-3-658-11924-9 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1994, 1997, 1999, 2001, 2008, 2011, 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

*Lektorat:* Thomas Zipsner

*Abbildungen:* Graphik & Text Studio Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

---

# Vorwort

Das dreibändige Werk **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für das *Grund-* und *Hauptstudium* der naturwissenschaftlich-technischen Disziplinen im Hochschulbereich. Es wird durch eine **mathematische Formelsammlung**, einen **Klausurentrainer** und ein Buch mit **Anwendungsbeispielen** zu einem kompakten *Lehr-* und *Lernsystem* ergänzt. Die Bände 1 und 2 lassen sich dem *Grundstudium* zuordnen, während der vorliegende dritte Band spezielle Themen aus dem *Hauptstudium* behandelt.

## Zur Stoffauswahl des dritten Bandes

Im vorliegenden dritten Band werden die folgenden Stoffgebiete behandelt:

- **Vektoranalysis:** Kurven und Flächen, Skalar- und Vektorfelder, Gradient, Divergenz und Rotation, spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme, Linien- oder Kurvenintegrale, Oberflächenintegrale, Integralsätze von Gauß und Stokes
- **Wahrscheinlichkeitsrechnung:** Kombinatorik, Zufallsexperimente, Wahrscheinlichkeiten, Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen, Kennwerte oder Maßzahlen einer Verteilung, spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen wie z. B. Binomial-, Poisson- oder Gaußverteilung, Verteilungen von mehreren Zufallsvariablen, Prüf- oder Testverteilungen wie z. B. Chi-Quadrat- oder *t*-Verteilung
- **Grundlagen der mathematischen Statistik:** Zufallsstichproben, Häufigkeitsverteilungen, Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe, Parameterschätzungen, Parameter-tests, Anpassungs- oder Verteilungstests wie z. B. der Chi-Quadrat-Test, Korrelation und Regression
- **Fehler- und Ausgleichsrechnung:** „Fehlerarten“ und Messabweichungen, statistische Verteilung der Messwerte und Messabweichungen, Auswertung einer Messreihe, Vertrauensbereiche, „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß (Varianzfortpflanzungsgesetz), Ausgleichs- oder Regressionskurven
- Im **Anhang (Teil A)** findet der Leser wichtige Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (auf *farbigem* Papier gedruckt).

## Zur Darstellung des Stoffes

Auch in diesem Band wurde eine anschauliche, anwendungsorientierte und leicht verständliche Darstellungsform des mathematischen Stoffes gewählt. Begriffe, Zusammenhänge, Sätze und Formeln werden durch zahlreiche Beispiele aus Naturwissenschaft und Technik und anhand vieler Abbildungen näher erläutert.

Einen wesentlichen Bestandteil dieses Werkes bilden die **Übungsaufgaben** am Ende eines jeden Kapitels (nach Abschnitten geordnet). Sie dienen zum Einüben und Vertiefen des Stoffes. Die im **Anhang (Teil B)** dargestellten ausführlich kommentierten Lösungen ermöglichen dem Leser eine ständige Selbstkontrolle.

## Zur äußeren Form

*Zentrale* Inhalte wie Definitionen, Sätze, Formeln, Tabellen, Zusammenfassungen und Beispiele sind besonders hervorgehoben:

- Definitionen, Sätze, Formeln und Zusammenfassungen sind *gerahmt* und *grau* unterlegt.
- Tabellen sind *gerahmt* und teilweise *grau* unterlegt.
- Anfang und Ende von Beispielen sind durch das Symbol ■ gekennzeichnet.

Bei der (bildlichen) Darstellung von Flächen und räumlichen Körpern wurden *Grauraster* unterschiedlicher Helligkeit verwendet, um besonders anschauliche und aussagekräftige Bilder zu erhalten.

## Zum Einsatz von Computeralgebra-Programmen

In zunehmendem Maße werden leistungsfähige Computeralgebra-Programme wie z. B. MATLAB, MAPLE, MATHCAD oder MATHEMATICA bei der mathematischen Lösung kompakter naturwissenschaftlich-technischer Probleme in Praxis und Wissenschaft erfolgreich eingesetzt. Solche Programme können bereits im Grundstudium ein nützliches und sinnvolles *Hilfsmittel* sein und so z. B. als eine Art „*Kontrollinstanz*“ beim Lösen von Übungsaufgaben verwendet werden (Überprüfung der von *Hand* ermittelten Lösungen mit Hilfe eines Computeralgebra-Programms auf einem PC). Die meisten der in diesem Werk gestellten Aufgaben lassen sich auf diese Weise problemlos lösen.

## Zur 7. Auflage

Die **Lösungen** der zahlreichen Übungsaufgaben wurden komplett überarbeitet und wesentlich ausführlicher dargestellt (mit allen Zwischenschritten und Zwischenergebnissen). Gerade für Studienanfänger sind detaillierte Lösungswege besonders hilfreich für ein erfolgreiches Studium. Kürzen eines gemeinsamen Faktors in komplizierten Brüchen wird in der Regel durch Grauunterlegung gekennzeichnet. Alle Angaben über Integrale beziehen sich auf die *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors.

## **Eine Bitte des Autors**

Für Hinweise und Anregungen – insbesondere auch aus dem Kreis der Studentenschaft – bin ich stets sehr dankbar. Sie sind eine unverzichtbare Voraussetzung und Hilfe für die permanente Verbesserung dieses Lehrwerkes.

## **Ein Wort des Dankes . . .**

. . . an alle Fachkollegen und Studierenden, die durch Anregungen und Hinweise zur Verbesserung dieses Werkes beigetragen haben,

. . . an die Mitarbeiter des Verlages, besonders an Herrn Thomas Zipsner, für die hervorragende Zusammenarbeit während der Entstehung und Drucklegung dieses Werkes,

. . . an Frau Diane Schulz von der Beltz Bad Langensalza GmbH für den ausgezeichneten mathematischen Satz,

. . . an Herrn Dr. Wolfgang Zettlmeier für die hervorragende Qualität der Abbildungen.

Wiesbaden, im Frühjahr 2016

*Lothar Papula*



# Inhaltsverzeichnis

<b>I Vektoranalysis</b> .....	1
<b>1 Ebene und räumliche Kurven</b> .....	1
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve .....	1
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter .....	4
1.2.1 Ableitung eines Vektors .....	4
1.2.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes ..	9
1.3 Bogenlänge einer Kurve .....	12
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor .....	16
1.5 Krümmung einer Kurve .....	21
1.6 Ein Anwendungsbeispiel: Zerlegung von Geschwindigkeit und Beschleuni- gung in Tangential- und Normalkomponenten .....	27
<b>2 Flächen im Raum</b> .....	31
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche .....	31
2.2 Flächenkurven .....	35
2.3 Tangentialebene, Flächennormale, Flächenelement .....	37
2.4 Flächen vom Typ $z = f(x; y)$ .....	43
<b>3 Skalar- und Vektorfelder</b> .....	47
3.1 Ein einführendes Beispiel .....	47
3.2 Skalarfelder .....	50
3.3 Vektorfelder .....	52
3.4 Spezielle Vektorfelder aus Physik und Technik .....	55
3.4.1 Homogenes Vektorfeld .....	55
3.4.2 Kugel- oder radialsymmetrisches Vektorfeld (Zentralfeld) .....	56
3.4.3 Zylinder- oder axialsymmetrisches Vektorfeld .....	58
3.4.4 Zusammenstellung der behandelten Vektorfelder .....	59
<b>4 Gradient eines Skalarfeldes</b> .....	60
4.1 Definition und Eigenschaften des Gradienten .....	60
4.2 Richtungsableitung .....	64
4.3 Flächen vom Typ $F(x; y; z) = 0$ .....	66
4.4 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung .....	68
<b>5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes</b> .....	70
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes .....	70
5.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	70
5.1.2 Definition und Eigenschaften der Divergenz .....	74
5.1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders .....	77

5.2	Rotation eines Vektorfeldes .....	79
5.2.1	Definition und Eigenschaften der Rotation .....	79
5.2.2	Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe .....	83
5.3	Spezielle Vektorfelder .....	85
5.3.1	Quellenfreies Vektorfeld .....	85
5.3.2	Wirbelfreies Vektorfeld .....	87
5.3.3	Laplace- und Poisson-Gleichung .....	89
5.3.4	Ein Anwendungsbeispiel: Potentialgleichung des elektrischen Feldes ..	93
<b>6</b>	<b>Spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme .....</b>	<b>94</b>
6.1	Polarkoordinaten .....	94
6.1.1	Definition und Eigenschaften der Polarkoordinaten .....	94
6.1.2	Darstellung eines Vektors in Polarkoordinaten .....	95
6.1.3	Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Polarkoordinaten .....	101
6.1.4	Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor bei einer gleichförmigen Kreisbewegung .....	105
6.2	Zylinderkoordinaten .....	107
6.2.1	Definition und Eigenschaften der Zylinderkoordinaten .....	107
6.2.2	Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten .....	111
6.2.3	Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten .....	116
6.2.4	Zylindersymmetrische Vektorfelder .....	119
6.2.5	Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor eines Massenpunktes in Zylinderkoordinaten .....	121
6.3	Kugelkoordinaten .....	124
6.3.1	Definition und Eigenschaften der Kugelkoordinaten .....	124
6.3.2	Darstellung eines Vektors in Kugelkoordinaten .....	129
6.3.3	Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten .....	135
6.3.4	Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder) .....	137
6.3.5	Ein Anwendungsbeispiel: Potential und elektrische Feldstärke in der Umgebung einer homogen geladenen Kugel .....	140
<b>7</b>	<b>Linien- oder Kurvenintegrale .....</b>	<b>143</b>
7.1	Ein einführendes Beispiel .....	143
7.2	Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals .....	146
7.3	Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals .....	148
7.4	Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals. Konservative Vektorfelder .....	152
7.5	Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	163
7.5.1	Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder) .....	163
7.5.2	Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters .....	164
7.5.3	Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Drahtes .....	165
7.6	Arbeitsintegral .....	167
7.6.1	Arbeit eines Kraftfeldes .....	167
7.6.2	Ein Anwendungsbeispiel: Elektronen im Magnetfeld .....	168

<b>8 Oberflächenintegrale</b> .....	170
8.1 Ein einführendes Beispiel .....	170
8.2 Definition eines Oberflächenintegrals .....	175
8.3 Berechnung eines Oberflächenintegrals .....	177
8.3.1 Oberflächenintegral in speziellen (symmetriegerechten) Koordinaten ..	178
8.3.2 Oberflächenintegral in Flächenparametern .....	190
8.4 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	195
8.4.1 Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Würfels .....	195
8.4.2 Fluss eines zylinder- oder axialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Zylinders .....	199
8.4.3 Fluss eines kugel- oder radialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche einer Kugel .....	202
<b>9 Integralsätze von Gauß und Stokes</b> .....	205
9.1 Gaußscher Integralsatz .....	205
9.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	205
9.1.2 Gaußscher Integralsatz im Raum .....	207
9.1.3 Gaußscher Integralsatz in der Ebene .....	211
9.2 Stokesscher Integralsatz .....	214
9.3 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	222
9.3.1 Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders .....	222
9.3.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters .....	227
<b>Übungsaufgaben</b> .....	230
Zu Abschnitt 1 .....	230
Zu Abschnitt 2 .....	232
Zu Abschnitt 3 .....	234
Zu Abschnitt 4 .....	236
Zu Abschnitt 5 .....	237
Zu Abschnitt 6 .....	239
Zu Abschnitt 7 .....	242
Zu Abschnitt 8 .....	245
Zu Abschnitt 9 .....	248
 <b>II Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	 251
<b>1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik</b> .....	251
1.1 Urnenmodell .....	251
1.2 Permutationen .....	252
1.3 Kombinationen .....	255
1.4 Variationen .....	260
1.5 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Formeln .....	264
<b>2 Grundbegriffe</b> .....	264
2.1 Einführende Beispiele .....	264
2.2 Zufallsexperimente .....	268

2.3 Elementarereignisse und Ergebnismenge eines Zufallsexperiments .....	269
2.4 Ereignisse und Ereignisraum .....	270
2.5 Verknüpfungen von Ereignissen .....	273
<b>3 Wahrscheinlichkeit .....</b>	<b>276</b>
3.1 Laplace-Experimente .....	276
3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome .....	281
3.2.1 Eigenschaften der relativen Häufigkeiten .....	281
3.2.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff .....	284
3.2.3 Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten in der Praxis („statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit) .....	286
3.2.4 Wahrscheinlichkeitsraum .....	287
3.3 Additionssatz für beliebige Ereignisse .....	290
3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit .....	292
3.5 Multiplikationssatz .....	295
3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse .....	299
3.7 Ereignisbäume .....	302
3.8 Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Bayessche Formel .....	308
<b>4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen .....</b>	<b>315</b>
4.1 Zufallsvariable oder Zufallsgrößen .....	315
4.1.1 Einführende Beispiele .....	315
4.1.2 Definition einer Zufallsvariablen .....	317
4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen .....	318
4.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen (diskrete Verteilung) .....	319
4.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen (stetige Verteilung) .....	327
<b>5 Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung .....</b>	<b>335</b>
5.1 Erwartungswert einer Zufallsvariablen .....	336
5.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	336
5.1.2 Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen .....	336
5.1.3 Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen .....	337
5.2 Erwartungswert einer Funktion .....	339
5.3 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufalls- variablen .....	340
5.4 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer stetigen Zufalls- variablen .....	344
5.5 Mittelwert und Varianz einer linearen Funktion .....	348
<b>6 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....</b>	<b>350</b>
6.1 Binomialverteilung .....	350
6.2 Hypergeometrische Verteilung .....	361
6.3 Poisson-Verteilung .....	367

---

6.4	Gaußsche Normalverteilung	371
6.4.1	Allgemeine Normalverteilung	371
6.4.2	Standardnormalverteilung	374
6.4.3	Erläuterungen zur tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	376
6.4.4	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	378
6.4.5	Quantile der Standardnormalverteilung	388
6.5	Exponentialverteilung	390
6.6	Zusammenhang zwischen der Binomialverteilung und der Gaußschen Normalverteilung	393
6.7	Approximation einer diskreten Verteilung durch eine andere Verteilung, insbesondere durch die Normalverteilung	401
<b>7</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen</b>	<b>403</b>
7.1	Ein einführendes Beispiel	403
7.2	Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen	406
7.2.1	Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen	406
7.2.2	Diskrete zweidimensionale Verteilung	408
7.2.3	Stetige zweidimensionale Verteilung	411
7.3	Stochastisch unabhängige Zufallsvariable	417
7.4	Funktionen von mehreren Zufallsvariablen	423
7.5	Summen und Produkte von Zufallsvariablen	425
7.5.1	Additionssatz für Mittelwerte	425
7.5.2	Multiplikationssatz für Mittelwerte	427
7.5.3	Additionssatz für Varianzen	430
7.5.4	Eigenschaften einer Summe von stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen	433
7.6	Über die große Bedeutung der Gaußschen Normalverteilung in den Anwendungen	436
7.6.1	Zentraler Grenzwertsatz	436
7.6.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsvariablen	438
7.6.3	Grenzwertsatz von Moivre-Laplace	440
<b>8</b>	<b>Prüf- oder Testverteilungen</b>	<b>441</b>
8.1	Chi-Quadrat-Verteilung	441
8.2	$t$ -Verteilung von Student	446
<b>Übungsaufgaben</b>		<b>451</b>
	Zu Abschnitt 1	451
	Zu Abschnitt 2	453
	Zu Abschnitt 3	454
	Zu Abschnitt 4	457
	Zu Abschnitt 5	459
	Zu Abschnitt 6	462
	Zu Abschnitt 7	467

<b>III Grundlagen der mathematischen Statistik</b> .....	471
<b>1 Grundbegriffe</b> .....	471
1.1 Ein einführendes Beispiel .....	471
1.2 Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit .....	472
1.3 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe .....	474
1.3.1 Häufigkeitsfunktion einer Stichprobe .....	474
1.3.2 Verteilungsfunktion einer Stichprobe .....	477
1.3.3 Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben (Einteilung in Klassen) .....	479
<b>2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe</b> .....	485
2.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe .....	486
2.2 Spezielle Berechnungsformeln für die Kennwerte einer Stichprobe .....	489
2.2.1 Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeits- funktion .....	489
2.2.2 Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe .....	491
<b>3 Statistische Schätzmethoden für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameterschätzungen“)</b> .....	493
3.1 Aufgaben der Parameterschätzung .....	493
3.2 Schätzfunktionen und Schätzwerte für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Punktschätzungen“) .....	494
3.2.1 Ein einführendes Beispiel .....	495
3.2.2 Schätz- und Stichprobenfunktionen .....	495
3.2.3 Schätzungen für den Mittelwert $\mu$ .....	498
3.2.4 Schätzungen für die Varianz $\sigma^2$ .....	499
3.2.5 Schätzungen für einen Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomial- verteilung) .....	500
3.2.6 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Schätzfunktionen und ihrer Schätzwerte .....	500
3.3 Ein Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen .....	503
3.3.1 Maximum-Likelihood-Methode .....	504
3.3.2 Anwendungen auf spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	506
3.3.2.1 Binomialverteilung .....	506
3.3.2.2 Poisson-Verteilung .....	508
3.3.2.3 Gaußsche Normalverteilung .....	511
3.4 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Intervallschätzungen“) .....	514
3.4.1 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle und statistische Sicherheit .....	514
3.4.2 Vertrauensintervalle für den unbekannt Mittelwert $\mu$ einer Normal- verteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$ .....	518
3.4.3 Vertrauensintervalle für den unbekannt Mittelwert $\mu$ einer Normal- verteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$ .....	525
3.4.4 Vertrauensintervalle für die unbekannt Varianz $\sigma^2$ einer Normal- verteilung .....	530

3.4.5	Vertrauensintervalle für einen unbekanntem Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung).....	534
3.4.6	Vertrauensintervalle für den unbekanntem Mittelwert $\mu$ einer beliebigen Verteilung .....	539
<b>4</b>	<b>Statistische Prüfverfahren für die unbekanntem Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parametertests“)</b> .....	<b>540</b>
4.1	Ein einführendes Beispiel .....	540
4.2	Statistische Hypothesen und Parametertests .....	544
4.3	Planung und Durchführung eines Parametertests .....	545
4.4	Mögliche Fehlerquellen bei einem Parametertest .....	550
4.5	Spezielle Parametertests .....	555
4.5.1	Tests für den unbekanntem Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekanntem Varianz $\sigma^2$ .....	555
4.5.2	Tests für den unbekanntem Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekanntem Varianz $\sigma^2$ .....	564
4.5.3	Tests für die Gleichheit der unbekanntem Mittelwerte $\mu_1$ und $\mu_2$ zweier Normalverteilungen (Differenzentests) .....	569
4.5.3.1	Abhängige und unabhängige Stichproben .....	569
4.5.3.2	Differenzentests bei abhängigen Stichproben .....	571
4.5.3.3	Differenzentests bei unabhängigen Stichproben .....	576
4.5.4	Tests für die unbekanntem Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung .....	588
4.5.5	Tests für einen unbekanntem Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung).....	593
4.6	Ein Anwendungsbeispiel: Statistische Qualitätskontrolle unter Verwendung von Kontrollkarten .....	599
<b>5</b>	<b>Statistische Prüfverfahren für die unbekanntem Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Anpassungs- oder Verteilungstests“)</b> .....	<b>604</b>
5.1	Aufgaben eines Anpassungs- oder Verteilungstests .....	604
5.2	Ein einführendes Beispiel .....	605
5.3	Chi-Quadrat-Test („ $\chi^2$ -Test“) .....	607
<b>6</b>	<b>Korrelation und Regression</b> .....	<b>620</b>
6.1	Korrelation .....	620
6.1.1	Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Stichprobe .....	620
6.1.2	Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Grundgesamtheit ...	630
6.2	Regression .....	633
<b>Übungsaufgaben</b>	.....	<b>639</b>
Zu Abschnitt 1	.....	639
Zu Abschnitt 2	.....	641
Zu Abschnitt 3	.....	642
Zu Abschnitt 4	.....	644
Zu Abschnitt 5	.....	647
Zu Abschnitt 6	.....	648

<b>IV Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	650
<b>1 „Fehlerarten“ (systematische und zufällige Messabweichungen). Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	650
<b>2 Statistische Verteilung der Messwerte und Messabweichungen („Messfehler“)</b>	654
2.1 Häufigkeitsverteilungen .....	654
2.2 Normalverteilte Messgrößen .....	656
<b>3 Auswertung einer Messreihe</b> .....	662
3.1 Mittelwert und Standardabweichung .....	662
3.2 Vertrauensbereich für den Mittelwert $\mu$ , Messunsicherheit, Messergebnis ...	670
<b>4 „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß</b> .....	679
4.1 Ein einführendes Beispiel .....	679
4.2 Mittelwert einer „indirekten“ Messgröße .....	680
4.3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz).....	683
4.4 Messergebnis für eine „indirekte“ Messgröße .....	687
<b>5 Ausgleichs- oder Regressionskurven</b> .....	694
5.1 Ein einführendes Beispiel .....	694
5.2 Ausgleichung nach der „Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate“ .....	696
5.3 Ausgleichs- oder Regressionsgerade .....	701
5.3.1 Bestimmung der Parameter einer Ausgleichsgeraden .....	701
5.3.2 Streuungsmaße und Unsicherheiten bei der Parameterbestimmung ...	709
5.4 Ausgleichs- oder Regressionsparabel .....	715
5.5 Nichtlineare Ausgleichsprobleme, die auf die lineare Regression zurück- führbar sind .....	719
<b>Übungsaufgaben</b> .....	730
Zu Abschnitt 3 .....	730
Zu Abschnitt 4 .....	732
Zu Abschnitt 5 .....	734



<b>Anhang</b> .....	739
<b>Teil A: Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik</b> .....	740
Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung ....	740
Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung .....	742
Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung .....	744
Tabelle 4: Quantile der $t$ -Verteilung von „Student“ .....	746
<b>Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben</b> .....	749
<b>I Vektoranalysis</b> .....	750
Abschnitt 1 .....	750
Abschnitt 2 .....	753
Abschnitt 3 .....	757
Abschnitt 4 .....	760
Abschnitt 5 .....	763
Abschnitt 6 .....	769
Abschnitt 7 .....	777
Abschnitt 8 .....	783
Abschnitt 9 .....	790
<b>II Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	796
Abschnitt 1 .....	796
Abschnitt 2 .....	797
Abschnitt 3 .....	798
Abschnitt 4 .....	801
Abschnitt 5 .....	804
Abschnitt 6 .....	808
Abschnitt 7 .....	814
<b>III Grundlagen der mathematischen Statistik</b> .....	819
Abschnitt 1 .....	819
Abschnitt 2 .....	824
Abschnitt 3 .....	826
Abschnitt 4 .....	829
Abschnitt 5 .....	836
Abschnitt 6 .....	840
<b>IV Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	844
Abschnitt 3 .....	844
Abschnitt 4 .....	847
Abschnitt 5 .....	851
<b>Literaturhinweise</b> .....	859
<b>Sachwortverzeichnis</b> .....	860

# Inhaltsübersicht Band 1

## **Kapitel I: Allgemeine Grundlagen**

- 1 Einige grundlegende Begriffe über Mengen
- 2 Die Menge der reellen Zahlen
- 3 Gleichungen
- 4 Ungleichungen
- 5 Lineare Gleichungssysteme
- 6 Der Binomische Lehrsatz

## **Kapitel II: Vektoralgebra**

- 1 Grundbegriffe
- 2 Vektorrechnung in der Ebene
- 3 Vektorrechnung im 3-dimensionalen Raum
- 4 Anwendungen in der Geometrie

## **Kapitel III: Funktionen und Kurven**

- 1 Definition und Darstellung einer Funktion
- 2 Allgemeine Funktionseigenschaften
- 3 Koordinatentransformationen
- 4 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion
- 5 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)
- 6 Gebrochenrationale Funktionen
- 7 Potenz- und Wurzelfunktionen
- 8 Kegelschnitte
- 9 Trigonometrische Funktionen
- 10 Arkusfunktionen
- 11 Exponentialfunktionen
- 12 Logarithmusfunktionen
- 13 Hyperbel- und Areafunktionen

## **Kapitel IV: Differentialrechnung**

- 1 Differenzierbarkeit einer Funktion
- 2 Ableitungsregeln
- 3 Anwendungen der Differentialrechnung

**Kapitel V: Integralrechnung**

- 1 Integration als Umkehrung der Differentiation
- 2 Das bestimmte Integral als Flächeninhalt
- 3 Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion
- 4 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung
- 5 Grund- oder Stammintegrale
- 6 Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung einer Stammfunktion
- 7 Elementare Integrationsregeln
- 8 Integrationsmethoden
- 9 Uneigentliche Integrale
- 10 Anwendungen der Integralrechnung

**Kapitel VI: Potenzreihenentwicklungen**

- 1 Unendliche Reihen
- 2 Potenzreihen
- 3 Taylor-Reihen

**Kapitel VII: Komplexe Zahlen und Funktionen**

- 1 Definition und Darstellung einer komplexen Zahl
- 2 Komplexe Rechnung
- 3 Anwendungen der komplexen Rechnung
- 4 Ortskurven

**Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben**

# Inhaltsübersicht Band 2

## **Kapitel I: Lineare Algebra**

- 1 Vektoren
- 2 Reelle Matrizen
- 3 Determinanten
- 4 Ergänzungen
- 5 Lineare Gleichungssysteme
- 6 Komplexe Matrizen
- 7 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix

## **Kapitel II: Fourier-Reihen**

- 1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion
- 2 Anwendungen

## **Kapitel III: Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen**

- 1 Funktionen von mehreren Variablen
- 2 Partielle Differentiation
- 3 Mehrfachintegrale

## **Kapitel IV: Gewöhnliche Differentialgleichungen**

- 1 Grundbegriffe
- 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung
- 3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 4 Anwendungen in der Schwingungslehre
- 5 Lineare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 6 Numerische Integration einer Differentialgleichung
- 7 Systeme linearer Differentialgleichungen

**Kapitel V: Fourier-Transformationen**

- 1 Grundbegriffe
- 2 Spezielle Fourier-Transformationen
- 3 Wichtige „Hilfsfunktionen“ in den Anwendungen
- 4 Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationsätze)
- 5 Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich
- 6 Anwendungen der Fourier-Transformation

**Kapitel VI: Laplace-Transformationen**

- 1 Grundbegriffe
- 2 Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationsätze)
- 3 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion
- 4 Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich
- 5 Anwendungen der Laplace-Transformation

**Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben**



<http://www.springer.com/978-3-658-11923-2>

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3  
Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische  
Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung

Papula, L.

2016, XXI, 870 S. 550 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-11923-2