

Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen

Bearbeitet von
Dr. Marcus Kriele, Prof. Dr. Jochen Wolf

1. Auflage 2012. Buch. X, 374 S. Kartoniert
ISBN 978 3 642 25805 3

[Wirtschaft > Betriebswirtschaft > Finanzwirtschaft, Banken, Börse](#)

Zu [Inhaltsverzeichnis](#)

schnell und portofrei erhältlich bei


DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

Kapitel 2

Risikomaß

2.1 Die Idee des Risikomaßes

Umgangssprachlich wird unter Risiko einfach die Möglichkeit verstanden, dass „ungünstige Ereignisse“ auftreten. Abweichungen hin zum Positiven („Chance“) werden also in der Regel ausgeblendet. Wenn man aber „Risiko“ quantitativ zu erfassen versucht, zeigt sich, dass Risiko ein sehr vielschichtiges Phänomen ist.

Eine Möglichkeit, Risiko mathematisch zu beschreiben, besteht darin, Risiko generell mit Schwankung (zum Beispiel Wertschwankungen) zu identifizieren. Damit werden sowohl „ungünstige“ als auch „günstige“ Abweichungen betrachtet. Ein solcher Ansatz wird zum Beispiel verfolgt, wenn man als Risikomaß die Standardabweichung (siehe unten) wählt.

Ein anderer Fokus wäre, finanzielle Risiken mit einem Geldbetrag zu identifizieren, der einen Hinweis darauf gibt, wie viel man bei einer Manifestation des Risikos verlieren kann. Dies wird der von uns hauptsächlich verfolgte Ansatz sein. Hierfür sind je nach Situation unterschiedliche Maße geeignet. Besonders beliebt sind Maße, deren Ergebnis operativ als der Kapitalbetrag interpretiert werden kann, den das Unternehmen seiner Risikoaversion entsprechend vorhalten muss, um sein Geschäft betreiben zu können.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer σ -Algebra \mathcal{A} und Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{P} . Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ den Raum der \mathbb{R}^k -wertigen Zufallsvariablen

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \omega \mapsto X(\omega),$$

also der bzgl. \mathcal{A} und der Borelschen σ -Algebra messbaren Abbildungen. Wenn wir die σ -Algebra \mathcal{A} hervorheben wollen, sprechen wir auch von \mathcal{A} -messbaren Abbildungen bzw. von bzgl. \mathcal{A} messbaren Abbildungen.

Definition 2.1. Ein *Risikomaß* ist eine Abbildung

$$\rho: \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \mapsto \rho(X),$$

wobei $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Omega, \mathbb{R})$ ein (von ρ abhängiger) geeigneter Vektorunterraum ist.

Anmerkung 2.1. Die Beschränkung auf einen Teilraum ist notwendig, da aus Anwendungssicht interessante Risikomaße häufig nicht auf ganz $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ definiert sind. Wenn wir im folgenden die Notation $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ benutzen, ist immer ein aus dem Kontext ersichtlicher geeigneter Unterraum von $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ gemeint.

2.2 Beispiele von Risikomaßen

Es sei Y eine Zufallsvariable, die ein unsicheres finanzielles Ergebnis beschreibt. Dann gibt $X = -Y$ den möglichen Verlust an. Viele Risikomaße enthalten einen Parameter $\alpha \in]0, 1[$, über den das durch dieses Maß beschriebene (intuitive) Sicherheitsniveau festgelegt wird. Wir wollen hier diesen Parameter *Konfidenzniveau* nennen und den Begriff *Sicherheitsniveau* in seiner intuitiven Bedeutung reservieren. Eine mathematische Konkretisierung erfährt das Sicherheitsniveau durch Angabe eines Risikomaßes, eines Konfidenzniveaus und des Zeithorizonts, auf den sich die Erfolgs- bzw. Verlustgrößen beziehen. Die Terminologie geht in der Literatur jedoch bunt durcheinander, so dass sich die gemeinte Bedeutung nur jeweils im Zusammenhang erschließt.

2.2.1 Maße, die auf Momenten basieren

2.2.1.1 Maße, die auf der Standardabweichung basieren

Ein mathematisch sehr einfaches Risikomaß ist die Standardabweichung

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)} = \sqrt{\mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))^2\right)} = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{\text{var}(Y)}.$$

Sie gibt an, wie weit im Durchschnitt die Ergebnisse vom erwarteten Wert abweichen, wobei das „Abweichungsmaß“ einfach an die euklidische Geometrie angelehnt wird. Als Risikomaß wird die Standardabweichung auch in der Form

$$\rho(X) = a\mathbb{E}(X) + b\sigma(X) \tag{2.1}$$

genutzt, wobei $a, b > 0$ vorgegebene Parameter sind. Ein traditionelles Anwendungsgebiet für dieses Maß ist die Prämienbestimmung. Ein verwandtes Prinzip der Prämienbestimmung ist das Varianzprinzip mit Risikomaß

$$\rho(X) = a\mathbb{E}(X) + b\sigma^2(X). \tag{2.2}$$

Beim Varianzprinzip ist zu beachten, dass die Varianz nicht wie der Erwartungswert einen Geldbetrag, sondern einen quadratischen Geldbetrag darstellt und somit die Summe aus $aE(X)$ und $b\sigma^2(X)$ schwer zu interpretieren ist.

Das Risikomaß (2.1) hat die unangenehme Eigenschaft, dass positive Abweichungen auf die Standardabweichung den gleichen Einfluss haben wie negative Abweichungen. Es ist damit unempfindlich dafür, ob ein Ereignis „günstig“ oder „ungünstig“ ist. Um diese Probleme zu umgehen, könnte man nur Verluste berücksichtigen, die den Erwartungswert übersteigen, indem man die einseitige Standardabweichung $\sigma_+ = \sqrt{E(\max(0, X - E(X)))^2}$ betrachtet.

2.2.1.2 Risikomaße, die auf höheren Momenten basieren

Risikomaße, die nur auf dem Erwartungswert und der Standardabweichung basieren, ignorieren, dass Verlustverteilungen im allgemeinen sehr unsymmetrisch sind. Beispiele dafür bilden Schadenhöhenverteilungen in der Sachversicherung und die Überschussbeteiligung in Lebensversicherungsverträgen mit Garantiezins. Dieser Asymmetrie kann durch das Einbeziehen höherer Momente in das Risikomaß Rechnung getragen werden.

2.2.1.3 Shortfallmaße

Die Gefahr der Überschreitung einer vorgegebenen Verlustschwelle a messen die sogenannten Shortfallmaße. Die oberen und unteren partiellen Momente gewichten dabei die Abweichung mit einer Potenzfunktion.

Für Verlustgrößen betrachtet man die *oberen partiellen Momente* (upper partial moments):

$$\text{UPM}_{(h,a)}(X) = \begin{cases} E\left(\max(0, X - a)^h\right) & \text{für } h > 0 \\ \mathbf{P}(X \geq a) & \text{für } h = 0. \end{cases}$$

Spezialfälle sind die Überschreitungswahrscheinlichkeit der kritischen Grenze a ($h = 0$), die mittlere Überschreitung ($h = 1$) und die Semivarianz ($h = 2$).

Für Ertragsgrößen ergeben sich analog die *unteren partiellen Momente* (lower partial moments):

$$\text{LPM}_{(h,a)}(Y) = \begin{cases} E\left(\max(0, a - Y)^h\right) & \text{für } h > 0 \\ \mathbf{P}(Y \leq a) & \text{für } h = 0. \end{cases}$$

2.2.1.4 Allgemeine Probleme mit momentenbasierten Maßen

Das schwerwiegendste Problem mit momentenbasierten Maßen ist die Tatsache, dass sie finanziell nur schlecht interpretierbar sind. Am ehesten lässt sich noch die

Standardabweichung als „durchschnittlicher Abstand zum Erwartungswert“ interpretieren. Jedoch ist ein euklidischer Abstand zwar ein gutes Entfernungsmaß, aber eben kein natürliches Maß für finanzielle Risiken.

Für viele in der Versicherungsindustrie angewendete Verteilungen existieren höhere Momente nicht. Bei der Modellierung operationaler Risiken mit Hilfe der GPD (Generalized Pareto Distribution) ist für in der Praxis vorkommende Parameter mitunter noch nicht einmal der Erwartungswert definiert. In einem solchen Fall wird das Unternehmen auf Dauer nicht bestehen können, wenn das Risikomanagement für operationale Risiken nicht deutlich verbessert wird.

2.2.2 Value at Risk

Der Value at Risk ist dagegen ein direktes und einfaches finanzmathematisches Maß. Es beschreibt den Betrag, den man mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit α höchstens „verlieren“ wird.

Definition 2.2. Der *Value at Risk* (oder kurz *VaR*) $\text{VaR}_\alpha(X)$ ist durch die Formel

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\},$$

gegeben, wobei F_X die Verteilungsfunktion von X ist.

Der Value at Risk, $\text{VaR}_\alpha(X)$, ist der *minimale* Verlust, der in $100(1 - \alpha)\%$ der schlechtesten Szenarien für das Portfolio entsteht (siehe Abbildung 2.1).

Mit anderen Worten, wenn ein Unternehmen mit der Wahrscheinlichkeit α nicht im Laufe einer Periode sein Eigenkapital verzehren möchte, muss es als Eigenkapital *mindestens* den Betrag $\text{VaR}_\alpha(X)$ vorhalten, wobei X den Verlust in dieser Periode bezeichnet. Dieses Maß eignet sich somit für einen Aktionär, der nur mit dem Geld, das er investiert hat, haftet. Für das interne Risikomanagement, wo man auch an höheren Risiken jenseits des Quantils interessiert ist, ist das Maß nicht immer geeignet.

Anmerkung 2.2. In Ausnahmefällen kann $\text{VaR}_\alpha(X)$ auch für hohes α negativ sein. Dann würde dieser Wert einem Gewinn und keinem Verlust entsprechen.

In der Sprache der Statistik stellt der Value at Risk das untere α -Quantil der Verteilung von X dar. Im Spezialfall, dass F_X invertierbar ist, ergibt sich $\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$.

Lemma 2.1. Für alle $\alpha \in]0, 1[$ gilt $F_X(\text{VaR}_\alpha(X)) = \alpha$.

Beweis. Dies folgt direkt aus der Rechtsstetigkeit der Verteilungsfunktion. □

Die beiden folgenden Lemmata verdeutlichen, dass der Value at Risk als eine „Pseudo-Inverse“ der Verteilungsfunktion von X aufgefasst werden kann.

Lemma 2.2. Ist F_X die Verteilungsfunktion von X , so gilt $\text{VaR}_{F(X)}(X) = X$ f.s.

Beweis. Aufgrund der Rechtsstetigkeit von F_X gilt

$$Y := \text{VaR}_{F_X \circ X}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq F_X \circ X\} \leq X \text{ f.s.}$$

Aus Lemma 2.1 folgt außerdem $F_X(Y(\omega)) = F_X(X(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$. Dies bedeutet, dass X auf $\{\omega : Y(\omega) < X(\omega)\}$ Werte in Konstantheitsintervallen von F_X annimmt. Folglich ist $\mathbf{P}(Y < X) = 0$. \square

Lemma 2.3. Es sei U eine Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(U \leq u) = u$ für alle $u \in]0, 1[$. Dann hat die Zufallsvariable $\text{VaR}_{U(\cdot)}(X)$ die gleiche Verteilungsfunktion wie X .

Beweis. Es sei $\omega \in \Omega$ mit $U(\omega) \leq F_X(x)$. Dann gilt offenbar

$$\inf\{y : U(\omega) \leq F_X(y)\} \leq x,$$

da x die Bedingung für y selbst erfüllt. Umgekehrt folgt aus der Rechtsstetigkeit von F_X , dass die Gleichung $U(\omega) \leq F_X(y)$ auch für das Infimum über die y erfüllt ist. Wir haben also

$$\{\omega \in \Omega : U \leq F_X(x)\} = \{\omega \in \Omega : \inf\{y : U \leq F_X(y)\} \leq x\}$$

gezeigt, und es folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \leq x) &= \mathbf{P}(\inf\{y : F_X(y) \geq U\} \leq x) \\ &= \mathbf{P}(U \leq F_X(x)) \\ &= F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x). \end{aligned}$$

\square

Lemma 2.4. Es sei $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ und $\alpha \in]0, 1[$. Dann gilt

$$\mathbf{P}(X < \text{VaR}_\alpha(X)) \leq \alpha \leq \mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X))$$

Gilt außerdem $\mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X)) = 0$, so folgt insbesondere $\alpha = \mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X))$.

Beweis. Es sei U eine Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(U \leq u) = u$ für alle $u \in]0, 1[$. Da der Value at Risk monoton mit dem Konfidenzniveau wächst, haben wir

$$\begin{aligned} \{\omega : \text{VaR}_{U(\omega)}(X) < \text{VaR}_\alpha(X)\} &\subseteq \{\omega : U(\omega) < \alpha\} \\ &\subseteq \{\omega : \text{VaR}_{U(\omega)}(X) \leq \text{VaR}_\alpha(X)\}. \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.3 folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X < \text{VaR}_\alpha(X)) &= \mathbf{P}(\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) < \text{VaR}_\alpha(X)) \\
&\stackrel{=\alpha}{\leq} \mathbf{P}(U(\cdot) < \alpha) \\
&\leq \mathbf{P}(\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \leq \text{VaR}_\alpha(X)) = \mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X)).
\end{aligned}$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X)) = 0$ entarten die Ungleichungen zu Gleichungen, da dann $\mathbf{P}(X < \text{VaR}_\alpha(X)) = \mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X))$ gilt. \square

Für die wichtige Klasse der normalverteilten Zufallsvariablen lässt sich der Value at Risk direkt angeben:

Proposition 2.1. *Es sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert m und Standardabweichung s . Ist $\Phi_{0,1}$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und $f: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Abbildung, so gilt*

$$\text{VaR}_\alpha(f \circ X) = f(m + s \Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)).$$

Beweis. Da $F_{f \circ X}$ streng monoton wachsend ist, wird der Value at Risk eindeutig durch $F_{f \circ X}(\text{VaR}_\alpha(f \circ X)) = \alpha$ bestimmt. Die Behauptung folgt also aus

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(f \circ X \leq f(m + s \Phi_{0,1}^{-1}(\alpha))) &= \mathbf{P}(X \leq m + s \Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{X - m}{s} \leq \Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)\right) \\
&= \Phi_{0,1}(\Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)) = \alpha,
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass f auf $X(\Omega)$ invertierbar ist und $\omega \mapsto \frac{X-m}{s}$ standardnormalverteilt ist. \square

Beispiel 2.1. Ist X lognormalverteilt mit Parametern m und s^2 , so gilt $\text{VaR}_\alpha(X) = \exp(m + s \Phi_{0,1}^{-1}(\alpha))$.

2.2.3 Tail Value at Risk und Expected Shortfall

Der Tail Value at Risk gewichtet gegenüber dem Value at Risk auch höhere Verluste.

Definition 2.3. Der Tail Value at Risk ist durch die bedingte Erwartung

$$\text{TailVaR}_\alpha(X) = \mathbf{E}(X | X > \text{VaR}_\alpha(X))$$

gegeben.

Er liefert damit aus der Sicht des internen Risikomanagements die interessantere Information, nämlich den *erwarteten* Verlust der 100 $(1 - \alpha)$ % schlechtesten Szenarien. Es ist klar, dass der Tail Value at Risk zum gleichen Konfidenzniveau

α immer größer als der (oder im Extremfall gleich dem) Value at Risk ist. Siehe Abbildung 2.1 und 2.2.

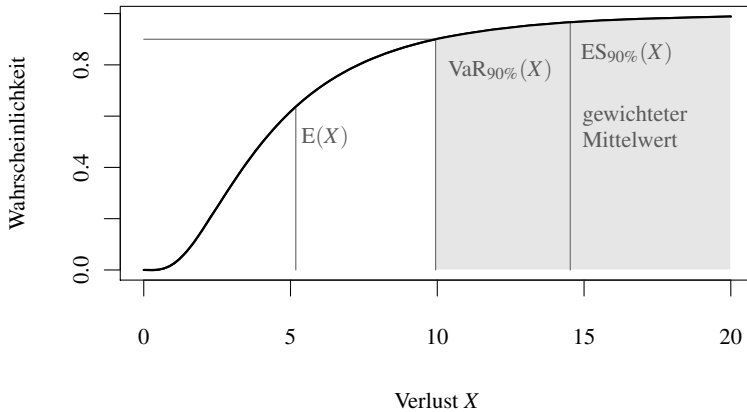


Abb. 2.1 Value at Risk und Tail Value at Risk aus der Perspektive der Verteilungsfunktion.

Der Tail Value at Risk erlaubt eine klare ökonomische Interpretation. Für stetige Verteilungsfunktionen X_1, X_2 hat er außerdem, wie wir später sehen werden, die wichtige Subadditivitätseigenschaft

$$\text{TailVaR}_\alpha(X_1 + X_2) \leq \text{TailVaR}_\alpha(X_1) + \text{TailVaR}_\alpha(X_2),$$

die intuitiv ausdrückt, dass das Risiko in einem diversifizierten Kollektiv geringer ist als die Summe der Einzelrisiken. Diese Eigenschaft gilt allerdings im allgemeinen nicht für Zufallsvariablen X_1, X_2 mit Verteilungsfunktionen, die Sprünge haben. Dagegen erfüllt das eng verwandte Risikomaß „Expected Shortfall“ die Subadditivitätseigenschaft für alle Zufallsvariablen (siehe Abschnitt 2.3).

Definition 2.4. Der *Expected Shortfall* ist durch die Formel

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_z(X) dz$$

gegeben.

In der Literatur wird der Expected Shortfall gelegentlich auch *Average Value at Risk* genannt.

Wir werden nun eine alternative Formel für $\text{ES}_\alpha(X)$ herleiten, die zeigt, dass für stetige Verteilungsfunktionen $\text{ES}_\alpha(X)$ mit $\text{TailVaR}_\alpha(X)$ übereinstimmt.

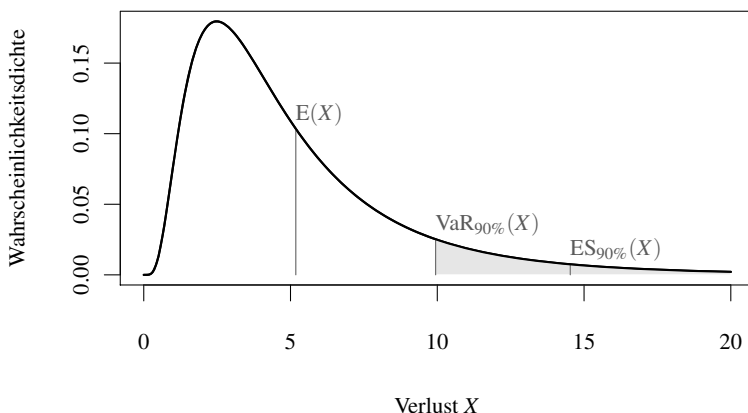


Abb. 2.2 Value at Risk und Tail Value at Risk aus der Perspektive der Dichte.

Lemma 2.5. *Es sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $x \in \mathbb{R}$. Wir setzen*

$$1_{X,x,\alpha} = 1_{\{X>x\}} + \beta_{X,\alpha}(x) 1_{\{X=x\}},$$

wobei

$$\beta_{X,\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{\mathbf{P}(X \leq x) - \alpha}{\mathbf{P}(X=x)} & \text{falls } \mathbf{P}(X=x) > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

- (i) $1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha}(\omega) \in [0, 1]$ für alle $\omega \in \Omega$,
- (ii) $\mathbf{E}(1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha}) = 1 - \alpha$,
- (iii) $\mathbf{E}(X 1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha}) = (1 - \alpha) \text{ES}_\alpha(X)$.

Beweis. (i): Die Behauptung ist in den Spezialfällen $\mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X)) = 0$ und $\omega \notin \{X = \text{VaR}_\alpha(X)\}$ klar. Indem wir Lemma 2.4 zweimal anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X)) - \alpha \\ &= \mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X)) + \mathbf{P}(X < \text{VaR}_\alpha(X)) - \alpha \\ &\leq \mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X)). \end{aligned}$$

Gilt $\mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X)) > 0$, so folgt daher für $\omega \in \{X = \text{VaR}_\alpha(X)\}$

$$1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha}(\omega) = \frac{\mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X)) - \alpha}{\mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X))} \in [0, 1].$$

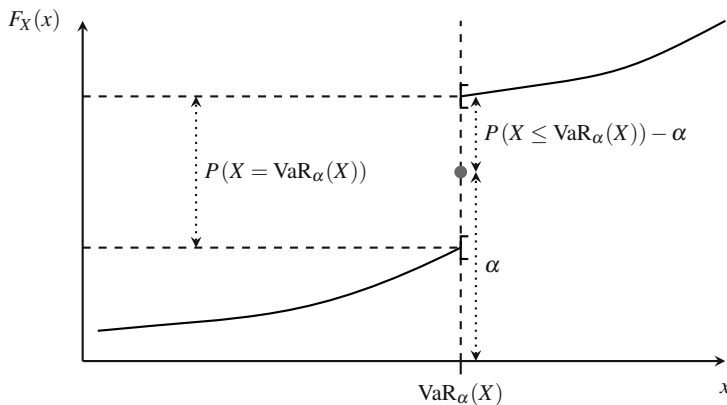


Abb. 2.3 Zum Beweis von Lemma 2.5.

(ii): Wir betrachten zunächst den Fall $\mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X)) = 0$. Dann impliziert Lemma 2.4

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha}) &= \mathbf{E}(1_{\{X > \text{VaR}_\alpha(X)\}}) \\ &= \mathbf{P}(\{X > \text{VaR}_\alpha(X)\}) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\{X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\}) = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Im Fall $\mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X)) > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha}) &= \mathbf{E}\left(1_{\{X > \text{VaR}_\alpha(X)\}} + \frac{\mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X)) - \alpha}{\mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X))} 1_{\{X = \text{VaR}_\alpha(X)\}}\right) \\ &= \mathbf{P}(X > \text{VaR}_\alpha(X)) + \frac{\mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X)) - \alpha}{\mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X))} \mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X)) \\ &= \mathbf{P}(X > \text{VaR}_\alpha(X)) + \mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X)) - \alpha = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

(iii): Es sei U eine Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(U \leq u) = u$ für alle $u \in]0, 1[$. Da $u \mapsto \text{VaR}_u(X)$ monoton wachsend ist, gilt

$$\{U \geq \alpha\} \subseteq \{\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)\}.$$

Ist $U(\omega) < \alpha$ und $\text{VaR}_{U(\omega)}(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)$, so muss (ebenfalls aufgrund der Monotonie) $\text{VaR}_{U(\omega)} = \text{VaR}_\alpha(X)$ gelten. Also erhalten wir die Beziehung

$$\{U < \alpha\} \cap \{\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)\} \subseteq \{\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) = \text{VaR}_\alpha(X)\}.$$

Insgesamt folgt

$$\{\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)\} = \{U \geq \alpha\} \cup (\{\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)\} \cap \{U < \alpha\}),$$

wobei $\text{VaR}_{U(\omega)}(X) = \text{VaR}_\alpha(X)$ für alle $\omega \in \{\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)\} \cap \{U < \alpha\}$ gilt. Hiermit und mit Lemma 2.3 folgt

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^1 \text{VaR}_u(X) \, du &= \mathbb{E}(\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \mathbf{1}_{\{U \geq \alpha\}}) \\
&= \mathbb{E}\left(\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \left(\mathbf{1}_{\{\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)\}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mathbf{1}_{\{\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)\} \cap \{U < \alpha\}}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \mathbf{1}_{\{\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)\}}\right) \\
&\quad - \text{VaR}_\alpha(X) \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)\} \cap \{U < \alpha\}}\right) \\
&= \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X \geq \text{VaR}_\alpha(X)\}}) - \text{VaR}_\alpha(X) \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)\} \setminus \{U \geq \alpha\}}\right) \\
&= \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X > \text{VaR}_\alpha(X)\}}) + \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X = \text{VaR}_\alpha(X)\}}) \\
&\quad - \text{VaR}_\alpha(X) \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\text{VaR}_{U(\cdot)}(X) \geq \text{VaR}_\alpha(X)\}}\right) + \text{VaR}_\alpha(X) \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{U \geq \alpha\}}\right) \\
&= \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X > \text{VaR}_\alpha(X)\}}) \\
&\quad + \text{VaR}_\alpha(X) (\mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X)) - \mathbf{P}(X \geq \text{VaR}_\alpha(X)) + 1 - \alpha) \\
&= \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X > \text{VaR}_\alpha(X)\}}) + \text{VaR}_\alpha(X) (\mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X)) - \alpha) \\
&= \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha}),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass Lemma 2.4 im Spezialfall

$$\mathbf{P}(X = \text{VaR}_\alpha(X)) = 0$$

die Gleichung $\mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X)) - \alpha = 0$ impliziert. \square

Proposition 2.2. *Es sei $\alpha \in [0, 1[$. Mit*

$$\lambda_\alpha = \frac{1 - \mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X))}{1 - \alpha}$$

gilt $\lambda_\alpha \in [0, 1]$ und

$$\text{ES}_\alpha(X) = \lambda_\alpha \text{TailVaR}_\alpha(X) + (1 - \lambda_\alpha) \text{VaR}_\alpha(X).$$

Insbesondere stimmen Tail Value at Risk und Expected Shortfall für stetige Verteilungen überein.

Beweis. $\lambda_\alpha \in [0, 1]$ folgt direkt aus Lemma 2.4. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha) \text{ES}_\alpha(X) &= \mathbb{E}(X 1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha}) \\
&= \mathbb{E}(X 1_{\{X > \text{VaR}_\alpha(X)\}}) + \text{VaR}_\alpha(X) (\mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X)) - \alpha) \\
&= \mathbf{P}(X > \text{VaR}_\alpha(X)) \text{TailVaR}_\alpha(X) \\
&\quad + \text{VaR}_\alpha(X) (1 - \alpha - (1 - \mathbf{P}(X \leq \text{VaR}_\alpha(X)))) \\
&= (1 - \alpha) \lambda_\alpha \text{TailVaR}_\alpha(X) - (1 - \alpha) \text{VaR}_\alpha(X) (1 - \lambda_\alpha).
\end{aligned}$$

Ist X stetig, so gilt aufgrund von Lemma 2.4 $\lambda_\alpha = 1$, so dass $\text{ES}_\alpha(X) = \text{TailVaR}_\alpha(X)$ folgt. \square

Im allgemeinen hat der Expected Shortfall bessere mathematische Eigenschaften als der Tail Value at Risk (siehe Abschnitt 2.3). Die folgende Darstellung des Expected Shortfall dient als Motivation in Abschnitt 2.4.4. Sie ermöglicht außerdem einen einfachen Beweis des in Proposition 2.4 gegebenen wichtigen Approximationsresultats.

Proposition 2.3. *Es sei $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}) \subseteq L^1(\Omega, \mathbb{R})$ und*

$$\mathcal{W}_\alpha = \left\{ \mathbf{Q}: \mathbf{Q} \text{ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit } \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \text{ und } \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \leq \frac{1}{1 - \alpha} \right\}.$$

Dann gilt für $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$

$$\text{ES}_\alpha(X) = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{W}_\alpha} \{\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(X)\}.$$

Beweis. Da X bezüglich \mathbf{P} integrierbar ist und $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ gilt sowie $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ beschränkt ist, ist X auch bezüglich \mathbf{Q} integrierbar. Die durch

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \frac{1}{1 - \alpha} 1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha}$$

definierte spezielle Wahl von \mathbf{Q} (siehe Lemma 2.5) erfüllt die beiden Bedingungen $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ und $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \leq (1 - \alpha)^{-1}$. Da

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E}(X 1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha}) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(X)$$

gilt (Lemma 2.5 (iii)), folgt

$$\text{ES}_\alpha(X) \leq \sup_{\mathbf{R} \in \mathcal{W}_\alpha} \{\mathbb{E}_{\mathbf{R}}(X)\}$$

Es sei nun \mathbf{R} ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß, das die beiden Bedingungen $\mathbf{R} \ll \mathbf{P}$ und $\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}} \leq (1 - \alpha)^{-1}$ erfüllt. Wir müssen $\mathbb{E}_{\mathbf{R}}(X) \leq \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(X)$ zeigen. Die Menge $A = \{\omega: 1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha}(\omega) > 0\}$ erfüllt $\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(1_A) = 1$. Nach Konstruktion von $1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha}$ gilt außerdem $X(\omega) \leq \inf_{\tilde{\omega} \in A} X(\tilde{\omega})$ für alle $\omega \in \Omega \setminus A$. Damit folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{R}}(X) &= E_{\mathbf{P}}\left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}}X 1_A\right) + E_{\mathbf{P}}\left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}}X 1_{\Omega \setminus A}\right) \\ &\leq E_{\mathbf{P}}\left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}}X 1_A\right) + \inf_{\tilde{\omega} \in A} X(\tilde{\omega}) \mathbf{R}(\Omega \setminus A). \end{aligned}$$

Aus

$$E_{\mathbf{P}}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} 1_A\right) = E_{\mathbf{P}}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) = E_{\mathbf{Q}}(1) = 1$$

folgt

$$E_{\mathbf{P}}\left(\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} - \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}}\right) 1_A\right) = 1 - \mathbf{R}(A) = \mathbf{R}(\Omega \setminus A).$$

Da für alle $\omega \in \left\{X > \inf_{\tilde{\omega} \in A} X(\tilde{\omega})\right\} \subseteq A$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \frac{1}{1-\alpha} \geq \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}}$$

gilt, haben wir auf dieser Menge die Ungleichung

$$X \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} - \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}}\right) \geq \inf_{\tilde{\omega} \in A} X(\tilde{\omega}) \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} - \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}}\right).$$

Diese Ungleichung ist trivialerweise auch auf $\left\{X = \inf_{\tilde{\omega} \in A} X(\tilde{\omega})\right\}$ erfüllt, so dass sie wegen $A \subseteq \left\{X \geq \inf_{\tilde{\omega} \in A} X(\tilde{\omega})\right\}$ auf A gilt. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{R}}(X) &\leq E_{\mathbf{P}}\left(X \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}} 1_A\right) + \inf_{\tilde{\omega} \in A} X(\tilde{\omega}) E_{\mathbf{P}}\left(\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} - \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}}\right) 1_A\right) \\ &\leq E_{\mathbf{P}}\left(X \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}} 1_A\right) + E_{\mathbf{P}}\left(X \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} - \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}}\right) 1_A\right) \\ &= E_{\mathbf{P}}\left(X \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} 1_A\right) = E_{\mathbf{Q}}(X). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. *Es seien Y eine integrierbare, positive Funktion und $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $|X_k| \leq Y$ fast sicher, die fast sicher punktweise gegen die Zufallsvariable X konvergiert. Dann gilt $ES_{\alpha}(X_n) \rightarrow ES_{\alpha}(X)$.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ und $\mathbf{Q} \in \mathcal{W}_{\alpha}$ mit $E_{\mathbf{Q}}(X) \geq ES_{\alpha}(X) - \varepsilon$. Da für jedes $\mathbf{R} \in \mathcal{W}_{\alpha}$ die Ungleichung $0 \leq \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}} \leq \frac{1}{1-\alpha}$ gilt, ist die Folge $\left\{\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} X_k\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ durch die integrierbare Zufallsvariable $\frac{1}{1-\alpha}Y$ dominiert. Ferner konvergiert $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} X_k$ fast überall gegen $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} X$. Der Satz von Lebesgue impliziert also $E_{\mathbf{Q}}(X_k) \rightarrow E_{\mathbf{Q}}(X)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, impliziert dies nach Proposition 2.3 $\liminf_{k \rightarrow \infty} ES_{\alpha}(X_k) \geq ES_{\alpha}(X)$.

Es existiert eine Teilfolge $\left\{X_{k_j}\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{ES}_\alpha \left(X_{k_j} \right) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \text{ES}_\alpha (X_k).$$

Es sei $\mathbf{Q}_{k_j} \in \mathscr{W}_\alpha$ mit

$$\left| \text{ES}_\alpha (X_{k_j}) - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_{k_j}} (X_{k_j}) \right| \leq \frac{1}{j}.$$

Da für jedes j die Radon-Nikodym-Ableitung $\frac{d\mathbf{Q}_{k_j}}{d\mathbf{P}}$ messbar ist und $0 \leq \frac{d\mathbf{Q}_{k_j}}{d\mathbf{P}} \leq \frac{1}{1-\alpha}$ erfüllt, ist $f = \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{d\mathbf{Q}_{k_j}}{d\mathbf{P}}$ eine messbare Funktion mit $0 \leq f \leq \frac{1}{1-\alpha}$. Das durch $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = f$ definierte Maß ist offenbar in \mathscr{W}_α , weshalb $\text{ES}_\alpha (X) \geq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} (X)$ gilt. Da die X_{n_k} fast überall gegen X konvergieren, gilt $\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{d\mathbf{Q}_{k_j}}{d\mathbf{P}} X_{k_j} = fX$. Wegen $\left| \frac{d\mathbf{Q}_{n_k}}{d\mathbf{P}} X_{n_k} \right| \leq \frac{1}{1-\alpha} X$ können wir das Lemma von Fatou anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} (X) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} (fX) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{d\mathbf{Q}_{k_j}}{d\mathbf{P}} X_{k_j} \right) \\ &\geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}} \left(\frac{d\mathbf{Q}_{k_j}}{d\mathbf{P}} X_{k_j} \right) \right) \\ &\geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \left(\text{ES}_\alpha (X_{k_j}) - \frac{1}{j} \right) \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} (\text{ES}_\alpha (X_k)). \end{aligned}$$

Also gilt auch $\text{ES}_\alpha (X) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \text{ES}_\alpha (X_k)$. \square

Proposition 2.4 legt nahe, den Expected Shortfall dem Tail Value at Risk vorzuziehen. Denn für hinreichend großes n ist es unmöglich, durch eine Messung zwischen X_n und X zu unterscheiden. Daher sollte auch der Wert der korrespondierenden Risikomaße praktisch ununterscheidbar sein. Dies ist nicht für den Tail Value at Risk erfüllt, aber Proposition 2.4 zeigt, dass der Expected Shortfall diese für die Interpretation notwendige Eigenschaft hat.

Lemma 2.6. *Es sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert m und Standardabweichung s . $f: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine streng monotone, stetige Abbildung. Wenn $\Phi_{0,1}$ die Verteilungsfunktion und $\varphi_{0,1} = \frac{d}{dx} \Phi_{0,1}$ die Dichte der Standardnormalverteilung bezeichnen, gilt*

$$\text{ES}_\alpha (f \circ X) = \int_{\Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)}^{\infty} f(m + sx) \varphi_{0,1}(x) dx = \text{TailVaR}_\alpha (f \circ X).$$

Beweis. Aus Proposition 2.1 folgt

$$\text{ES}_\alpha (f \circ X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_p (f \circ X) dp = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 f(m + s \Phi_{0,1}^{-1}(p)) dp.$$

Mittels der Substitution $p = \Phi_{0,1}(x)$ erhalten wir $dp = \varphi_{0,1}(x) dx$ und daher

$$\text{ES}_\alpha(f \circ X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)}^{\infty} f(m+sx) \varphi_{0,1}(x) dx.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Verteilungsfunktion gilt $\text{ES}_\alpha(f \circ X) = \text{TailVaR}_\alpha(f \circ X)$. \square

In den zwei wichtigen Spezialfällen normalverteilter Zufallsvariablen und log-normalverteilter Zufallsvariablen lässt sich das Integral explizit berechnen.

Proposition 2.5. *Es sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ . Wenn $\Phi_{0,1}$ die Verteilungsfunktion und $\varphi_{0,1} = \frac{d}{dx} \Phi_{0,1}$ die Dichte der Standardnormalverteilung bezeichnen, gilt*

$$\text{ES}_\alpha(X) = \mu + \sigma \frac{\varphi_{0,1}(\Phi_{0,1}^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} = \text{TailVaR}_\alpha(X).$$

Beweis. In diesem Fall haben wir in Lemma 2.6 $f(x) = x$, so dass sich das Integral zu

$$\text{ES}_\alpha(X) = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \int_{\Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)}^{\infty} x \varphi_{0,1}(x) dx$$

vereinfacht. Mit der Beziehung $\varphi'_{0,1}(x) = -x \varphi_{0,1}(x)$ erhalten wir

$$\text{ES}_\alpha(X) = \mu - \frac{\sigma}{1-\alpha} [\varphi_{0,1}(p)]_{\Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)}^{\infty} = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \varphi_{0,1}(\Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)).$$

\square

Proposition 2.6. *Es sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine lognormalverteilte Zufallsvariable, d.h. $\ln X \sim N(m, s^2)$. Wenn $\Phi_{0,1}$ die Verteilungsfunktion und $\varphi_{0,1} = \frac{d}{dx} \Phi_{0,1}$ die Dichte der Standardnormalverteilung bezeichnen, gilt*

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{\exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right)}{1-\alpha} \Phi_{0,1}(s - \Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)).$$

Beweis. In diesem Fall haben wir in Lemma 2.6 $f(x) = \exp(x)$. Das Integral vereinfacht sich also zu

$$\begin{aligned}
\text{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)}^{\infty} \exp(m+sx) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)}^{\infty} \exp\left(m + \frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}(x-s)^2\right) dx \\
&= \frac{\exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right)}{1-\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)-s}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \\
&= \frac{\exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right)}{1-\alpha} (1 - \Phi_{0,1}(\Phi_{0,1}^{-1}(\alpha) - s)) \\
&= \frac{\exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right)}{1-\alpha} \Phi_{0,1}(s - \Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der letzten Gleichung von der Symmetrie der Standardnormalverteilung Gebrauch gemacht. \square

2.2.4 Spektralmaße

Der Expected Shortfall lässt sich direkt verallgemeinern, um die individuelle Risikoaversion zu berücksichtigen. Statt über alle $\text{VaR}_z(X)$ mit $z \geq \alpha$ mit gleichem Gewicht zu mitteln, kann man eine allgemeinere Gewichtungsfunktion ϕ verwenden.

Definition 2.5. Es sei (A, \mathcal{A}, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit σ -Algebra \mathcal{A} und Wahrscheinlichkeitsmaß μ . Dann heißt eine integrierbare Abbildung $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}$ *Gewichtungsfunktion*, falls ϕ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) $\phi(\alpha) \geq 0$ für fast alle $\alpha \in A$,
- (ii) $\int_A \phi(\alpha) d\mu(\alpha) = 1$.

Definition 2.6. Es sei $\phi \in L^1([0, 1])$ eine Gewichtungsfunktion. Dann heißt das Risikomaß

$$M_\phi(X) = \int_0^1 \text{VaR}_p(X) \phi(p) dp$$

das *Spektralmaß* zu ϕ .

Mit einem Spektralmaß wird das Risiko auch in Abhängigkeit von der Seltenheit, mit der ein Verlust eintreten kann, gewichtet. Das Konzept des Spektralmaßes ermöglicht somit die Abbildung eines individuellen Profils der Risikoaversion. Offenbar ist ES_α ein Beispiel für ein Spektralmaß. Das Maß VaR kann als Grenzfall von Spektralmaßen verstanden werden, da $\text{VaR}_\alpha(X) = \int_0^1 \text{VaR}_p(X) \delta_\alpha(p) dp$ gilt, wobei δ_α die Dirac-Distribution bezeichnet.

2.3 Wahl eines guten Risikomaßes

2.3.1 Risikomaße und Risikointuition

Eine wichtige Forderung für ein gutes Risikomaß ist eine möglichst gute Beschreibung der Risikointuition des Benutzers. Ein Risikomaß, das ein Benutzer auf Anhieb gut zu verstehen glaubt, muss diese Forderung nicht erfüllen. Wir wollen diesen Punkt etwas genauer illustrieren. Die folgende Axiomatik von Artzner et.al. [3] beschreibt Eigenschaften, die unserem intuitiven Risikobegriff entsprechen.

Definition 2.7. Ein Risikomaß ρ heißt *kohärent*, falls es die folgenden Eigenschaften erfüllt:

Translationsinvarianz: $\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha$ für alle $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ und alle Konstanten α .

Positive Homogenität: $\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X)$ für alle $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ und alle positiven Konstanten α .

Monotonie: $X_1 \geq X_2$ fast überall $\Rightarrow \rho(X_1) \geq \rho(X_2)$ für alle $X_1, X_2 \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$.¹

Subadditivität: $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$ für alle $X_1, X_2 \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$.

Um zu sehen, inwieweit diese Axiome wirklich unsere Intuition für Risiko beschreiben, müssen wir betrachten, was jede dieser vier Bedingungen aussagt.

Translationsinvarianz besagt, dass sichere Verluste vollkommen mit Kapital hinterlegt werden müssen, aber nicht das Restrisiko beeinflussen: Ein sicherer Verlust ist kein Risiko, weil er vollkommen absehbar ist. Aus der Translationsinvarianz folgt außerdem $\rho(X - \rho(X)) = 0$. Das Risikokapital $\rho(X)$ ist also genau der Geldbetrag, der gehalten werden muss, um bezüglich des Risikomaßes das Risiko vollkommen abzufedern. In diesem Sinne sind Risikomaße, die die Translationsinvarianz erfüllen, *akzeptabel* [3].

Positive Homogenität ist eine Skalierungsinvarianz: Es ist unwesentlich, ob man das Risiko in Cent oder Euro misst. Gälte die positive Homogenität nicht, hätte die willkürlich gewählte Geldeinheit einen Einfluss auf das Kapital, was natürlich nicht sein sollte. Man kann die Homogenität auch in dem Sinne real interpretieren, dass eine Vervielfachung der Versicherungssummen eines Portfolios eine entsprechende Vervielfachung des Risikos nach sich zieht. Dies ist bei kleinen Beständen plausibel. Bei größeren Beständen werden die Liquiditätsrisiken jedoch zunehmend größer, da im Falle eines Versicherungsfalls größere Zahlungen geleistet werden müssen.

Monotonie bedeutet, dass ein Portfolio, das in jeder möglichen Situation höhere Verluste als ein anderes Portfolio aufweist, auch zu einem höheren Risikokapital führen muss. Denkbar wären zum Beispiel zwei identische Portfolios, wobei eines der Portfolios allerdings für die Prämien einen schadenabhängigen nachträglich gewährten Rabatt aufweist.

Subadditivität besagt, dass es bei der Kombination von risikobehafteten Portfolios Diversifizierungseffekte gibt. Subadditivität ist für einen Versicherer besonders

¹ Im Originalartikel von Artzner et.al. [3] wird vom Ergebnis $Y = -X$ ausgegangen, daher wird Monotonie dort anders definiert.

intuitiv, weil auf dem Diversifizierungseffekt das Geschäftsmodell der Versicherung beruht.² Auch hier kann argumentiert werden, dass Subadditivität nicht immer gelten muss. Wenn zum Beispiel zwei Unternehmen verschmelzen, kann es durch interne Machtkämpfe zu einer insgesamt schlechteren Risikolage kommen, so dass dem verschmolzenen Unternehmen in der Gesamtbetrachtung ein Risikokapital zuzuordnen wäre, das größer als die Summe der Einzelkapitale ist. Man kann auch argumentieren, dass bei einer Vervielfachung der Versicherungssumme wegen der höheren Liquiditätsrisiken Superadditivität anstelle der Subadditivität angemessen sei.

Anmerkung 2.3. Die Kritik an der positiven Homogenität und der Subadditivität motiviert, Risikomaße zu betrachten, die lediglich translationsinvariant, monoton und konvex sind. *Konvexe Risikomaße* sind dadurch definiert, dass für jedes $\alpha \in [0, 1]$ und für je zwei Verlustverteilungen $X_1, X_2 \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ die Ungleichung

$$\rho(\alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2) \leq \alpha \rho(X_1) + (1 - \alpha) \rho(X_2)$$

gilt. Es ist klar, dass Konvexität eine schwächere Bedingung ist und aus Subadditivität und positiver Homogenität folgt.

Kohärente Risikomaße erfüllen intuitive Erwartungen in vielen Situationen. Es gibt allerdings Bereiche, wo die Erwartung an ein Risikomaß im Widerspruch zur Kohärenz steht. Dies ist im Einzelfall abzuwägen. Erfüllt umgekehrt ein Risikomaß nicht die Kohärenz-Anforderungen, so sollte abgewogen werden, inwieweit dies durch die beschriebene Situation bedingt ist und ob diese Eigenschaft erwünscht oder vernachlässigbar ist.

Das folgende technische Theorem ermöglicht die Konstruktion neuer kohärenter Risikomaße auf der Grundlage von existierenden kohärenten Risikomaßen. Wir werden es später für den Beweis von Theorem 2.4 verwenden, in dem eine anschaulichere Konstruktion von kohärenten Maßen angegeben wird.

Theorem 2.1. *Es sei (A, \mathcal{A}, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit σ -Algebra \mathcal{A} und Wahrscheinlichkeitsmaß μ . Es sei $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von Risikomaßen und \mathcal{M} ein Vektorraum von reellwertigen Zufallsvariablen X , für die $\rho_\alpha(X)$ μ -fast überall definiert und μ -integrierbar ist. Sind alle ρ_α translationsinvariant, positiv homogen, monoton bzw. subadditiv, so hat auch das Risikomaß $\rho: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \rho(X) = \int_A \rho_\alpha(X) d\mu(\alpha)$ die entsprechende Eigenschaft.*

Beweis. Es seien $c \in \mathbb{R}$ und X, Y beliebige Zufallsvariablen.

Translationsinvarianz:

² Es gibt eine subtile Unterscheidung zwischen Pooling und Diversifikation, wobei argumentiert wird, dass das Versicherungsgeschäft in erster Linie auf Pooling beruht. Die Unterscheidung beruht darauf, dass der Poolingeffekt nur unter Kosten hergestellt werden kann (Vermittler müssen Versicherungsnehmer finden), während Diversifikation im Prinzip umsonst ist (Ein diversifiziertes Aktienportfolio kostet genauso viel wie ein undiversifiziertes zum gleichen Kurs). In unserem Zusammenhang, in dem wir nur auf die Risikoeffekte abstellen, ist diese Unterscheidung jedoch sekundär.

$$\begin{aligned}\rho(X+c) &= \int_A \rho_\alpha(X+c) d\mu(\alpha) = \int_A (\rho_\alpha(X) + c) d\mu(\alpha) \\ &= \int_A \rho_\alpha(X) d\mu(\alpha) + c \int_A d\mu(\alpha) = \rho(X) + c,\end{aligned}$$

da μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Positive Homogenität: Für $c \geq 0$ gilt

$$\rho(cX) = \int_A \rho_\alpha(cX) d\mu(\alpha) = \int_A c \rho_\alpha(X) d\mu(\alpha) = c \rho(X).$$

Monotonie: Es gelte $X \geq Y$ fast überall. Dann folgt aus $\rho_\alpha(X) \geq \rho_\alpha(Y)$

$$\rho(X) = \int_A \rho_\alpha(X) d\mu(\alpha) \geq \int_A \rho_\alpha(Y) d\mu(\alpha) = \rho(Y).$$

Subadditivität:

$$\rho(X+Y) = \int_A \rho_\alpha(X+Y) d\mu(\alpha) \leq \int_A (\rho_\alpha(X) + \rho_\alpha(Y)) d\mu(\alpha) = \rho(X) + \rho(Y)$$

□

Im allgemeinen erfüllt das Risikomaß VaR_α , das auf den ersten Blick vielleicht am eingängigsten erscheint, nicht das wichtige Axiom der Subadditivität. Der Value at Risk ist damit nicht kohärent und beschreibt daher unsere Risikointuition nicht in dem Maße, in dem es wünschenswert wäre.

Beispiel 2.2. Die diskrete Verteilung X sei durch

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X = -1) &= 0.96 \\ \mathbf{P}(X = 10) &= 0.04 \end{cases}$$

gegeben. Wir können $-X$ als eine Gewinnverteilung für einen Versicherungsvertrag interpretieren. Die Prämie beträgt 1. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% tritt ein Schaden ein, und die Leistung ist im Schadenfall immer gleich 11. In diesem einfachen Beispiel werden Kosten und Kapitalerträge ignoriert. Das Geschäft ist profitabel, da $E(-X) = 0.56$ gilt. Wir sind am Risikomaß $\text{VaR}_{95\%}$ interessiert. Da der Schaden nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $4\% < 1 - 95\%$ eintritt, gilt

$$\text{VaR}_{95\%}(X) = -1.$$

Für unser geringes Konfidenzniveau gibt es also kein positives Risiko.

Wir betrachten nun eine zweite Verteilung $Y \sim X$, die von X unabhängig ist. Die Gesamtverteilung $X + Y$ ist dann vollständig durch

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X+Y = -2) &= 0.96^2 = 0.9216 \\ \mathbf{P}(X+Y = 9) &= 2 \times 0.96 \times 0.04 = 0.0768 \\ \mathbf{P}(X+Y = 20) &= 0.04^2 = 0.0016 \end{cases}$$

beschrieben. Offenbar gilt

$$\text{VaR}_{95\%}(X + Y) = 9 > 2(-1) = \text{VaR}_{95\%}(X) + \text{VaR}_{95\%}(Y).$$

Wenn man den Value at Risk als Risikomaß verwendete, würde man also folgern, dass die Diversifizierung das Risiko erhöht statt zu vermindern.

Es gibt jedoch Spezialfälle, für die das Risikomaß Value at Risk kohärent ist (siehe Theorem 2.2). Zunächst benötigen wir jedoch ein wenig Vorbereitung.

Anmerkung 2.4. Wir wollen hier einige Eigenschaften euklidischer Räume wiederholen, die wir für die Formulierung und den Beweis des folgenden Lemmas 2.7 benötigen werden. Wir betrachten den \mathbb{R}^n mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Das Paar $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt *euklidischer Raum* und bildet die Grundlage der elementaren Geometrie. Eine lineare Abbildung $O: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u \mapsto Ou$ heißt *orthogonal* (oder *Isometrie*), wenn $\langle Ox, Oy \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Insbesondere ist O invertierbar. Die *transponierte Abbildung* O^\top ist durch die Eigenschaft $\langle Ox, y \rangle = \langle x, O^\top y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiert. Es gilt $O^\top O = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, was aus

$$\langle O^\top Ox, y \rangle = \langle Ox, Oy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

folgt. O^\top ist selbst wieder eine orthogonale Abbildung, da

$$\langle O^\top Ox, O^\top Oy \rangle = \langle x, y \rangle = \langle Ox, Oy \rangle$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt und O invertierbar ist.

Lemma 2.7. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei eine Zufallsvariable und $\phi_X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto E(e^{i\langle u, X \rangle})$ ihre charakteristische Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Für jede orthogonale lineare Abbildung $O: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt $OX \sim X$.
- (ii) Es gibt eine Funktion $\psi_X: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi_X(u) = \psi_X(\|u\|^2)$.
- (iii) Für jedes $a \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle a, X \rangle \sim \|a\|X_1$, wobei X_1 die erste Vektorkomponente von X ist.

Beweis. „(i) \Rightarrow (ii)“: Für jede orthogonale lineare Abbildung O und jedes $u \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\phi_X(u) = \phi_{OX}(u) = E(e^{i\langle u, OX \rangle}) = E(e^{i\langle O^\top u, X \rangle}) = \phi_X(O^\top u)$$

Die charakteristische Funktion $\phi_X(\cdot)$ ist also unter orthogonalen Transformationen invariant und Eigenschaft (ii) folgt.

„(ii) \Rightarrow (iii)“: E sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann erhalten wir für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\phi_{\langle a, X \rangle}(t) = E(e^{it\langle a, X \rangle}) = E(e^{i\langle ta, X \rangle}) = \phi_X(ta) = \psi_X(t^2 \|a\|^2).$$

Andererseits gilt

$$\phi_{\|a\|X_1}(t) = E(e^{it\|a\|X_1}) = E(e^{i\langle t\|a\|e_1, X \rangle}) = \phi_X(t\|a\|e_1) = \psi_X(t^2 \|a\|^2),$$

und Eigenschaft (iii) folgt aus der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion.

„(iii) \Rightarrow (i)“: Wegen der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion genügt es zu zeigen, dass die charakteristische Funktion von X unter orthogonalen Transformationen O invariant ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\phi_{OX}(u) &= \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, OX \rangle}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle O^\top u, X \rangle}\right) = \phi_{\langle O^\top u, X \rangle}(1) = \phi_{\|O^\top u\|_{X_1}}(1) = \phi_{\|u\|_{X_1}}(1) \\ &= \phi_{\langle u, X \rangle}(1) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, X \rangle}\right) = \phi_X(u).\end{aligned}$$

□

Lemma 2.8. *Das Risikomaß VaR_α ist translationsinvariant, positiv homogen und monoton.*

Beweis. Es seien $a \in \mathbb{R}$ und X, Y beliebige Zufallsvariablen.

Translationsinvarianz: Offenbar gilt $F_{X+a}(x) = \mathbf{P}(X+a \leq x) = \mathbf{P}(X \leq x-a) = F_X(x-a)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\text{VaR}_\alpha(X+a) &= \inf\{x : F_{X+a}(x) \geq \alpha\} = \inf\{x : F_X(x-a) \geq \alpha\} \\ &= \inf\{x+a : F_X(x) \geq \alpha\} = a + \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\} \\ &= \text{VaR}_\alpha(X) + a.\end{aligned}$$

Positive Homogenität: Für $a = 0$ gilt die Homogenitätseigenschaft trivialerweise. Ist $a > 0$, so gilt $F_{aX}(x) = \mathbf{P}(aX \leq x) = \mathbf{P}(X \leq \frac{x}{a}) = F_X(\frac{x}{a})$. Somit folgt

$$\begin{aligned}\text{VaR}_\alpha(aX) &= \inf\{x : F_{aX}(x) \geq \alpha\} = \inf\left\{x : F_X\left(\frac{x}{a}\right) \geq \alpha\right\} \\ &= \inf\{ax : F_X(x) \geq \alpha\} = a \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\} \\ &= a \text{VaR}_\alpha(X).\end{aligned}$$

Monotonie: Es gelte $X \geq Y$ fast überall. Dann gilt $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) \leq \mathbf{P}(Y \leq x) = F_Y(x)$ und daher $\{x : F_X(x) \geq \alpha\} \subseteq \{x : F_Y(x) \geq \alpha\}$. Es folgt

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\} \geq \inf\{x : F_Y(x) \geq \alpha\} = \text{VaR}_\alpha(Y).$$

□

Theorem 2.2. *Eingeschränkt auf einen Vektorraum von normalverteilten Zufallsvariablen ist für jedes $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ das Risikomaß VaR_α kohärent.*

Beweis. Wegen Lemma 2.8 müssen wir nur die Subadditivität zeigen. Es seien $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige normalverteilte Zufallsvariablen aus dem Vektorraum. Aufgrund der Vektorraumeigenschaft sind alle Linearkombinationen von X und Y normalverteilt, so dass der Vektor (X, Y) multivariat normalverteilt ist. Folglich existieren ein zweidimensionaler standardnormalverteilter Zufallsvektor $Z = (Z_1, Z_2)$, eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sowie ein Vektor $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, so dass

$(X, Y)^\top = AZ + b$ gilt. Wegen $\phi_Z(u) = e^{-\|u\|^2/2}$ gilt nach Lemma 2.7 für jeden Vektor $a \in \mathbb{R}^2$ die Relation $\langle a, Z \rangle \sim \|a\| Z_1$. Wir haben

$$\begin{aligned} X - b_1 &= \langle A^\top \mathbf{e}_1, Z \rangle \sim \|A^\top \mathbf{e}_1\| Z_1, \\ Y - b_2 &= \langle A^\top \mathbf{e}_2, Z \rangle \sim \|A^\top \mathbf{e}_2\| Z_1, \\ X + Y - b_1 - b_2 &= \langle A^\top \mathbf{e}_1 + A^\top \mathbf{e}_2, Z \rangle \sim \|A^\top \mathbf{e}_1 + A^\top \mathbf{e}_2\| Z_1. \end{aligned}$$

Somit gilt aufgrund der Translationsinvarianz und der positiven Homogenität von VaR_α

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(X) &= \|A^\top \mathbf{e}_1\| \text{VaR}_\alpha(Z_1) + b_1, \\ \text{VaR}_\alpha(Y) &= \|A^\top \mathbf{e}_2\| \text{VaR}_\alpha(Z_1) + b_2, \\ \text{VaR}_\alpha(X + Y) &= \|A^\top \mathbf{e}_1 + A^\top \mathbf{e}_2\| \text{VaR}_\alpha(Z_1) + b_1 + b_2. \end{aligned}$$

Die Subadditivität folgt nun aus

$$\|A^\top \mathbf{e}_1 + A^\top \mathbf{e}_2\| \leq \|A^\top \mathbf{e}_1\| + \|A^\top \mathbf{e}_2\|$$

und $\text{VaR}_\alpha(Z_1) \geq 0$ für $\alpha \geq \frac{1}{2}$, da Z_1 standardnormalverteilt ist. \square

Anmerkung 2.5. Eine Zufallsvariable, die eine der äquivalenten Bedingungen in Lemma 2.7 erfüllt, heißt *sphärisch*. Die affine Transformation einer sphärischen Zufallsvariable heißt *elliptisch*. Im Beweis von Theorem 2.2 haben wir von der Normalverteilungseigenschaft lediglich benutzt, dass Multinormalverteilungen elliptisch sind. Das Theorem lässt sich also auf Verteilungen, die als Linearkombination von Komponenten elliptischer Verteilungen geschrieben werden können, verallgemeinern. Für eine genaue Formulierung dieser Verallgemeinerung siehe [40, Theorem 6.8].

Theorem 2.3. *Der Expected Shortfall ES_α ist kohärent.*

Beweis. Es sei dp das Lebesgue Maß. Dann folgen Translationsinvarianz, positive Homogenität und Monotonie direkt aus Theorem 2.1 und Lemma 2.8 mit $\rho_p = \text{VaR}_p$ und $(A, \mathcal{A}, \mu) = ([\alpha, 1], \mathcal{B}, \frac{1}{1-\alpha} dp)$.

Es bleibt die Subadditivität zu zeigen. Für beliebige Zufallsvariablen X, Y erhalten wir mit Lemma 2.5 (iii)

$$\begin{aligned} &(1 - \alpha) (\text{ES}_\alpha(X) + \text{ES}_\alpha(Y) - \text{ES}_\alpha(X + Y)) \\ &= \text{E} \left(X \mathbf{1}_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha} + Y \mathbf{1}_{Y, \text{VaR}_\alpha(Y), \alpha} - (X + Y) \mathbf{1}_{(X+Y), \text{VaR}_\alpha(X+Y), \alpha} \right) \\ &= \text{E} \left(X \left(\mathbf{1}_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha} - \mathbf{1}_{(X+Y), \text{VaR}_\alpha(X+Y), \alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. + Y \left(\mathbf{1}_{Y, \text{VaR}_\alpha(Y), \alpha} - \mathbf{1}_{(X+Y), \text{VaR}_\alpha(X+Y), \alpha} \right) \right). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck $E\left(X\left(1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha} - 1_{(X+Y), \text{VaR}_\alpha(X+Y), \alpha}\right)\right)$. Nach Konstruktion von $1_{X, \alpha}$ gilt für $X(\omega) < x$ die Gleichung $1_{X, \alpha}(\omega) = 0$ und für $X(\omega) > x$ die Gleichung $1_{X, \alpha}(\omega) = 1$. Da aufgrund von Lemma 2.5 (i) die Ungleichung

$$0 \leq 1_{X+Y, \text{VaR}_\alpha(X+Y), \alpha} \leq 1$$

gilt, erhalten wir

$$1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha} - 1_{(X+Y), \text{VaR}_\alpha(X+Y), \alpha} \begin{cases} \leq 0 & , \text{ falls } X(\omega) < \text{VaR}_\alpha(X) \\ \geq 0 & , \text{ falls } X(\omega) > \text{VaR}_\alpha(X). \end{cases}$$

Damit gilt in beiden Fällen (und trivialerweise auch für $X = \text{VaR}_\alpha(X)$) die Ungleichung

$$X\left(1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha} - 1_{(X+Y), \text{VaR}_\alpha(X+Y), \alpha}\right) \geq \text{VaR}_\alpha(X)\left(1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha} - 1_{(X+Y), \text{VaR}_\alpha(X+Y), \alpha}\right).$$

Lemma 2.5 (ii) impliziert nun

$$\begin{aligned} E\left(X\left(1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha} - 1_{(X+Y), \text{VaR}_\alpha(X+Y), \alpha}\right)\right) \\ \geq \text{VaR}_\alpha(X) E\left(\left(1_{X, \text{VaR}_\alpha(X), \alpha} - 1_{(X+Y), \text{VaR}_\alpha(X+Y), \alpha}\right)\right) \\ = \text{VaR}_\alpha(X) \left((1 - \alpha) - (1 - \alpha)\right) = 0. \end{aligned}$$

Das gleiche Argument impliziert auch $E\left(Y\left(1_{Y, \text{VaR}_\alpha(Y), \alpha} - 1_{(X+Y), \text{VaR}_\alpha(X+Y), \alpha}\right)\right) \geq 0$. Insgesamt erhalten wir also

$$(1 - \alpha) \left(\text{ES}_\alpha(X) + \text{ES}_\alpha(Y) - \text{ES}_\alpha(X + Y)\right) \geq 0 + 0 = 0.$$

□

Theorem 2.4. Ein Spektralmaß M_ϕ ist kohärent, wenn die Gewichtungsfunktion $\phi \in L^1([0, 1])$ (fast überall) monoton wachsend ist.

Beweis. Da ϕ monoton wachsend ist, können wir durch $\phi(p) =: \nu([0, p])$ ein Maß auf $([0, 1], \mathcal{B})$ definieren. Aus dem Theorem von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
M_\phi(X) &= \int_0^1 \text{VaR}_p(X) \phi(p) dp = \int_0^1 \text{VaR}_p(X) \left(\int_0^p dv(\alpha) \right) dp \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[0,p]}(\alpha) \text{VaR}_p(X) dv(\alpha) \right) dp \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[\alpha,1]}(p) \text{VaR}_p(X) dv(\alpha) \right) dp \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[\alpha,1]}(p) \text{VaR}_p(X) dp \right) dv(\alpha) = \int_0^1 \left(\int_\alpha^1 \text{VaR}_p(X) dp \right) dv(\alpha) \\
&= \int_0^1 (1 - \alpha) \text{ES}_\alpha(X) dv(\alpha),
\end{aligned}$$

wobei wir von der Identität $1_{[0,p]}(\alpha) = 1_{[\alpha,1]}(p)$ für $\alpha, p \in [0, 1]$ Gebrauch gemacht haben. Die Behauptung folgt nun aus Theorem 2.1 mit $d\mu(\alpha) = (1 - \alpha) dv(\alpha)$, da

$$\begin{aligned}
\int_0^1 d\mu(\alpha) &= \int_0^1 (1 - \alpha) dv(\alpha) = \int_0^1 \left(\int_\alpha^1 dp \right) dv(\alpha) \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[\alpha,1]}(p) dp \right) dv(\alpha) = \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[\alpha,1]}(p) dv(\alpha) \right) dp \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 1_{[0,p]}(\alpha) dv(\alpha) \right) dp = \int_0^1 v([0,p]) dp = \int_0^1 \phi(p) dp \\
&= 1
\end{aligned}$$

gilt. □

Ein Spektralmaß ist also genau dann kohärent, wenn die individuelle Risikoaversion höheren Verlusten auch höhere Gewichte zuordnet.

2.3.2 Praktische Erwägungen

Einige Risikomaße wie VaR_α oder TailVaR_α werden unter Angabe eines Konfidenzniveaus α definiert. Dieses Konfidenzniveau ermöglicht einen ersten intuitiven Eindruck über das angestrebte Sicherheitsniveau. Es ist jedoch eine gewisse Vorsicht geboten, da das Sicherheitsniveau sowohl vom Risikomaß als auch vom betrachteten Zeithorizont abhängt. So haben wir oben gesehen, dass ein Tail Value at Risk zum Konfidenzniveau α immer ein höheres Sicherheitsniveau bietet als ein Value at Risk zum gleichen Konfidenzniveau α . Ferner ist klar, dass je länger die Periode ist, auf die sich das Konfidenzniveau bezieht, desto höher das Sicherheitsniveau ist, das erreicht wird.

Eine weitere wichtige Forderung ist die der Praktikabilität des Risikomaßes.

- Ist die Klasse der Verteilung bekannt, so reduziert sich das Problem der Bestimmung des Risikos auf die Schätzung der Parameter der vorliegenden Verteilung.

Aber selbst wenn die Verteilungen der einzelnen Teilrisiken bekannt sind, wirft die Aggregation zur Gesamtverteilung bereits im einfachsten Fall der Unabhängigkeit erhebliche numerische Probleme auf. Daher berechnet man in der Praxis die Gesamtverteilung meist mittels Monte-Carlo-Simulation.

- Varianzreduktionstechniken können zur Verringerung der Anzahl der benötigten Szenarien herangezogen werden. Ferner kann eine approximative Portfoliobewertung den numerischen Aufwand reduzieren.
- Wenn wir davon ausgehen, dass die Risikoverteilung numerisch über eine Monte Carlo Simulation ermittelt wird, so sind VaR_α und Spektralmaße mit ähnlichem Aufwand zu berechnen. Wenn das Risiko genauer untersucht werden soll, haben Spektralmaße Vorteile, da sie über eine Integration und somit stabiler definiert sind. Auf diese Eigenschaft werden wir im Abschnitt 5.2 am Beispiel einer Definition für ein besonders intuitives Allokationsschema für das Risikokapital genauer eingehen.

Das Ergebnis des Risikomaßes $\rho: \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist selbst keine Zufallsvariable, sondern wie der Erwartungswert eine deterministische Größe. Bei der Monte-Carlo-Simulation wird diese deterministische Größe durch einen Schätzer, d.h. eine Zufallsvariable $R_k^{\rho, X}$ auf der Basis von k unabhängigen Realisierungen von X approximiert. Dabei bedeutet das „ungefähr“-Zeichen „ \approx “, dass für eine vorgegebene kleine Schranke $\varepsilon > 0$ und ein vorgegebenes „Meta-Konfidenzniveau“ $\tilde{\alpha}$ die Ungleichung

$$\mathbf{P}\left(\left|\rho(X) - R_k^{\rho, X}\right| > \varepsilon\right) < 1 - \tilde{\alpha} \quad (2.3)$$

gilt. Den theoretischen Hintergrund liefert das schwache Gesetz der großen Zahl.

Beispiel 2.3. Es sei $\rho = \text{VaR}_\alpha$. Um $\text{VaR}_\alpha(X)$ numerisch stabil schätzen zu können, müssen wir eine so hohe Anzahl k von Szenarien wählen, dass hinreichend viele Szenarien einen Verlust höher als $\text{VaR}_\alpha(X)$ liefern. Um zum Beispiel mehr als 100 Szenarien mit einem höheren Verlust zu erhalten, wählen wir $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(1 - \alpha)k > 100$ gilt. Wir bezeichnen mit

$$\text{MAX}_m(\{a_1, \dots, a_k\})$$

den m -höchsten Wert der Menge $\{a_1, \dots, a_k\}$. Nun können wir

$$R_k^{\text{VaR}_\alpha, X}(X_1, \dots, X_k) = \text{MAX}_{[(1-\alpha)k+1]}(\{X_1, \dots, X_k\})$$

setzen, wobei $[a]$ den ganzzahligen Anteil der reellen Zahl a bezeichne. Für gegebene $\varepsilon, \tilde{\alpha}$ wird nun k so groß gewählt, dass Ungleichung (2.3) erfüllt ist. Dass eine solche Wahl möglich ist, folgt intuitiv aus der Definition des Value at Risk und dem Gesetz der großen Zahlen. In der Praxis wird man keinen Beweis führen, sondern k einfach so groß wählen, dass sich der Wert von $R_k^{\rho, X}$ aufeinander folgender Evaluationen kaum unterscheidet.

Die Anzahl der Simulationen wird häufig pragmatisch durch die Rechnerkapazität und die praktisch vertretbare Laufzeit bestimmt. Das kann dazu führen, dass

die Ergebnisse nicht stabil sind. Insbesondere wenn X eine heavy-tailed-Verteilung (z.B. Paretoverteilung) ist, können leicht mehr als 100.000 Simulationen notwendig sein, um stabile Ergebnisse für $\text{VaR}_{99,5\%}(X)$ zu erhalten.

Man sieht leicht, dass der Schätzwert $R_k^{\text{VaR}_{\alpha}, X}(X_1, \dots, X_k)$ mit dem Value at Risk der empirischen Verteilungsfunktion F_k der Stichprobenwerte übereinstimmt; denn es gilt

$$F_k \left(R_k^{\text{VaR}_{\alpha}, X} \right) = 1 - \frac{[(1 - \alpha)k]}{k} \in [\alpha, \alpha + 1/k[.$$

Nach dem Satz von Glivenko-Cantelli konvergieren die empirischen Verteilungsfunktionen F_k gleichmäßig gegen die Verteilungsfunktion F von X , so dass hier der Value at Risk der empirischen Verteilungsfunktion als Approximation des Value at Risk der theoretischen Verteilungsfunktion verwendet wird.

Beispiel 2.4. Es sei $\rho = \text{ES}_{\alpha}$. Wir setzen nun

$$R_k^{\text{ES}_{\alpha}, X}(X_1, \dots, X_k) = \frac{\sum_{m=1}^{[(1-\alpha)k]} \text{MAX}_m(\{X_1, \dots, X_k\})}{[(1-\alpha)k]}$$

und verfahren ansonsten analog zu Beispiel (2.3).

Den theoretischen Hintergrund liefert das folgende Gesetz der großen Zahl [53].

Theorem 2.5. Für eine Folge $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von integrierbaren i.i.d. Zufallsgrößen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbf{P}) gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^{[(1-\alpha)k]} \text{MAX}_m(X_1, \dots, X_k)}{[(1-\alpha)k]} = \text{ES}_{\alpha}(X_1) \quad \text{fast sicher,}$$

wobei $[\]$ den ganzzahligen Anteil bezeichnet.

Beweis. Sei F die Verteilungsfunktion von X_1 . Dann ist

$$y \mapsto \text{VaR}_y(X_1) = \inf\{x : F(x) \geq y\}$$

integrierbar, da wegen Lemma 2.1

$$\int_0^1 |\text{VaR}_y(X_1)| dy = \int_0^1 |\text{VaR}_y(X_1)| dF(\text{VaR}_y(X_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty$$

gilt. Wir setzen $U_i := F(X_i)$, $i = 1, \dots, k$. Da $\mathbf{P}(\text{VaR}_{U_i}(X_i) = X_i) = 1$ nach Lemma 2.2 gilt, die X_i identisch verteilt und $t \mapsto \text{VaR}_t(X)$ monoton wachsend ist, gilt

$$\begin{aligned} \text{MAX}_m(X_1, \dots, X_k) &= \text{MAX}_m \left(\text{VaR}_{F_{X_1}}(X_1), \dots, \text{VaR}_{F_{X_k}}(X_k) \right) \\ &= \text{MAX}_m \left(\text{VaR}_{F_{X_1}}(X_1), \dots, \text{VaR}_{F_{X_k}}(X_1) \right) \\ &= \text{VaR}_{\text{MAX}_m(F(X_1), \dots, F(X_k))}(X_1) \\ &= \text{VaR}_{\text{MAX}_m(U_1, \dots, U_k)}(X_1) \quad \text{f.s.} \end{aligned}$$

Daher genügt es,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^{\lfloor (1-\alpha)k \rfloor} \text{VaR}_{\text{MAX}_m(U_1, \dots, U_k)}(X_1)}{\lfloor (1-\alpha)k \rfloor} = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_y(X_1) dy \quad \text{f.s.}$$

zu zeigen. Wir werden etwas allgemeiner zeigen, dass für jede integrierbare Funktion $g:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^{\lfloor (1-\alpha)k \rfloor} g(\text{MAX}_m(U_1, \dots, U_k))}{\lfloor (1-\alpha)k \rfloor} = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 g(x) dx \quad \text{f.s.}$$

gilt. Dazu definieren wir die bezüglich t stückweise konstanten Abbildungen

$$g_k:]0, 1[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

$k \in \mathbb{N}$, durch

$$g_k(t) := g(\text{MAX}_{\lfloor (1-t)k \rfloor + 1}(U_1, \dots, U_k)).$$

Es folgt

$$\int_{\lfloor (\alpha k) + 1 \rfloor / k}^1 g_k(t) dt = \sum_{m=1}^{\lfloor (1-\alpha)k \rfloor} g(\text{MAX}_m(U_1, \dots, U_k)).$$

Mit der Notation

$$J_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{\lfloor \alpha k \rfloor + 1}{k}, \\ \frac{k}{\lfloor (1-\alpha)k \rfloor} & \text{für } \frac{\lfloor \alpha k \rfloor + 1}{k} < t \leq 1. \end{cases}$$

genügt es also,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 g_k(t) J_k(t) dt = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 g(t) dt \quad \text{f.s.} \quad (2.4)$$

zu zeigen.

Wir zeigen zunächst, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 bezüglich (Ω, \mathbf{P})

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(\{t : |g_k(t) - g(t)| \geq \delta\}) = 0 \quad \forall \delta > 0 \quad (2.5)$$

gilt. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir nach dem Theorem von Lusin eine Borelmenge $B \subseteq]0, 1[$ und eine stetige Funktion $\tilde{g}:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, so dass $g = \tilde{g}$ auf $]0, 1[\setminus B$ und $\lambda(B) \leq \varepsilon$ gilt. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} \tilde{g}_k(t) &:= \tilde{g}(\text{MAX}_{\lfloor (1-t)k \rfloor + 1}(U_1, \dots, U_k)), \\ B_k &:= \{t : \text{MAX}_{\lfloor (1-t)k \rfloor + 1}(U_1, \dots, U_k) \in B\}. \end{aligned}$$

\tilde{g}_k ist ebenfalls stückweise konstant, und es gilt $\{t : \tilde{g}_k(t) \neq g_k(t)\} \subseteq B_k$. Da die U_i identisch verteilt und unabhängig sind, konvergiert

$$\lambda(B_k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 1_B(U_i)$$

nach dem starken Gesetz der großen Zahl f.s. gegen

$$E(1_B(U_1)) = \mathbf{P}(U_1 \in B) = \lambda(B) \leq \varepsilon,$$

so dass insbesondere $\limsup_k \lambda(B_k) \leq \varepsilon$ f.s. gilt. Da $\text{MAX}_{[(1-t)k]+1}(U_1, \dots, U_k)$ als $\frac{[tk]+1}{k}$ -Quantil der empirischen Verteilungsfunktion der Stichprobe (U_1, \dots, U_k) gegen das t -Quantil der Gleichverteilung konvergiert und \tilde{g} stetig ist, gilt ferner

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{g}_k(t) = \tilde{g} \quad \text{f.s.}$$

Insgesamt schließen wir

$$\begin{aligned} \limsup_k \lambda(\{t : |g_k(t) - g(t)| \geq \delta\}) &\leq \limsup_k \lambda(\{t : |\tilde{g}(t) - g(t)| \geq \delta\}) \\ &\quad + \limsup_k \lambda(\{t : |g_k(t) - \tilde{g}_k(t)| \geq \delta\}) \\ &\quad + \limsup_k \lambda(\{t : |\tilde{g}_k(t) - \tilde{g}(t)| \geq \delta\}) \\ &\leq \lambda(B) + \limsup_k \lambda(B_k) \\ &\quad + \limsup_k \lambda(\{t : |\tilde{g}_k(t) - \tilde{g}(t)| \geq \delta\}) \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Beziehung (2.5) gezeigt.

Da zudem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 |g_k| d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |g(U_i)| = \int_0^1 |g| d\lambda$$

gilt, können wir für fast jedes $\omega \in \Omega$ das Theorem von Vitali bzgl. $(]0, 1[, \lambda)$ anwenden, um

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 |g_k - g| d\lambda = 0 \quad \text{f.s.}$$

zu erhalten. Da die Folge $J_k, k \in \mathbb{N}$, beschränkt ist und gegen $\frac{1}{1-\alpha} \mathbf{1}_{(\alpha, 1)}$ konvergiert, erhalten wir schließlich die gesuchte Konvergenz (2.4). \square

2.4 Dynamische Risikomaße

Die Risikomaße, die wir bisher untersucht haben, werden in der Regel auf einen Beobachtungshorizont von einem Jahr bezogen. Andererseits stehen Versicherungsver-

träge und die damit verbundenen Verpflichtungen häufig für viele Jahre unter Risiko. Diese zeitliche Asymmetrie wirft die folgenden Fragen auf:

- Wie sollte das Risikomaß die neue Information, die im Laufe der Zeit zugänglich wird, widerspiegeln?
- Wie sollte das Risikomaß auf Änderungen des Risikoprofils während des mehrjährigen Beobachtungshorizonts reagieren?
- Wie sollte man zeitlichen Abhängigkeiten Rechnung tragen?

Zeitliche Abhängigkeiten können durch externe, für den Schadenverlauf relevante Trends induziert werden. Ein Beispiel in der Lebensversicherung ist die Verbesserung der Lebenserwartung aufgrund des medizinischen Fortschritts. Die Natur des versicherten Schadens kann sich ebenfalls mit der Zeit verändern. Zum Beispiel haben ältere Menschen eine höhere Sterblichkeitswahrscheinlichkeit als jüngere Menschen, und die zugehörige Volatilität ist ebenfalls größer. Daher haben Lebensversicherungen ein Risikoprofil, das sich mit der Zeit ändert. Dies kann Auswirkungen auf das notwendige Risikokapital haben.

Beispiel 2.5. Ein Unternehmen übernimmt zum Zeitpunkt $t = 0$ die Verpflichtungen eines Konkurrenten gegen einen Verkaufspreis V_0 . Der Bestand läuft in n Jahren aus. Das Unternehmen erwartet, im Jahr t die (zum Zeitpunkt 0 deterministisch berechneten) Reserven V_t (mit $V_n = 0$) stellen zu müssen. Ferner folge die Versicherungsleistung im Jahr t einer Normalverteilung L_t mit Erwartungswert μ_t und Standardabweichung σ_t .

Der Cashflow zur Zeit t ist dann durch

$$\text{Cf}_t = (1 + s_t)V_{t-1} - V_t - L_t$$

gegeben, wobei wir den (deterministisch angenommenen) risikofreien Zins mit s_t bezeichnet haben. Mit der Bezeichnung

$$v_t = \prod_{\tau=1}^t (1 + s_\tau)^{-1}$$

für den Diskontierungsfaktor ist der Barwert des Cashflows durch

$$W_1 = \sum_{t=1}^n v_t \text{Cf}_t = V_0 - \sum_{t=1}^n v_t L_t$$

gegeben. Offenbar ist W_1 ebenfalls normalverteilt, und es gilt

$$\text{E}(W_1) = V_0 - \sum_{t=1}^n v_t \mu_t.$$

Dabei bezieht sich der Index $_1$ auf den Anfang der ersten Zeitperiode, siehe auch Abbildung 6.4. Der Zufallsvektor $(L_1, \dots, L_n)^\top$ hat die Kovarianzmatrix

$$\text{cov} \left((L_1, \dots, L_n)^\top \right)_{ij} = \zeta_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

wobei wir $\text{corr}(L_s, L_t) = \zeta_{st}$ gesetzt haben. Wegen

$$\text{cov}\left(\sum_{t=1}^n v_t L_t\right) = (v_1, \dots, v_n) \text{cov}\left((L_1, \dots, L_n)^\top\right) (v_1, \dots, v_n)^\top$$

erhalten wir

$$\sigma(W_1) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \zeta_{ij} v_i \sigma_i v_j \sigma_j}$$

und mit Proposition 2.5

$$\text{ES}_\alpha(W_1) = -V_0 + \sum_{t=1}^n v_t \mu_t + \frac{\varphi_{0,1}\left(\Phi_{0,1}^{-1}(\alpha)\right)}{1-\alpha} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \zeta_{ij} v_i \sigma_i v_j \sigma_j},$$

wobei der Zeithorizont n Perioden beträgt. Die zeitliche Abhängigkeit der Versicherungsleistungen L_t vergrößert das Risiko und somit das notwendige Risikokapital, da für $\zeta_{ij} > 0$ die Ungleichung

$$\sum_{i,j=1}^n \zeta_{ij} v_i \sigma_i v_j \sigma_j - \sum_{i,j=1}^n (v_i \sigma_i)^2 = 2 \sum_{i < j} \zeta_{ij} v_i \sigma_i v_j \sigma_j > 0$$

gilt.

Dieses Beispiel zeigt, dass es nicht möglich ist, das Risiko über mehrere Perioden durch das einjährige Risiko zu beschreiben. Wenn wir mehrjährige Risiken korrekt erfassen wollen, müssen wir somit mehrperiodische Risikomaße betrachten. Für das Risikomanagement ist dann von Interesse, die Änderung des Risikos im Zeitverlauf zu beschreiben. Wir sind also nicht nur an $\text{ES}_\alpha(W_1)$ sondern auch an $\text{ES}_\alpha(W_t)$ interessiert, wobei $\text{ES}_\alpha(W_t)$ für den Zeithorizont $n-t$ bestimmt wird. Zur Zeit $t=0$ ist $\text{ES}_\alpha(W_t)$ eine Zufallsvariable, da der Schadenverlauf der ersten t Perioden noch unbekannt ist.

In Abschnitt 2.4.2 werden wir einen Rahmen zur Beschreibung dieser dynamischen Aspekte bereitstellen. Als Vorbereitung benötigen wir einige grundlegende Tatsachen über Filtrationen.

2.4.1 Filtrationen

In diesem Abschnitt führen wir Terminologie ein, die es ermöglicht, das Wechselspiel von Zeit und bekannter Information zu beschreiben.

Definition 2.8. Es sei $\mathbb{T} = \{0, \dots, n\}$ und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Eine *Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ist eine Menge von σ -Algebren auf Ω mit

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n.$$

Anmerkung 2.6. Die Bedingung, dass \mathcal{F}_0 die triviale σ -Algebra ist, wird häufig nicht gefordert. Wir fordern sie hier, um auszudrücken, dass die Anfangswerte als bekannt vorausgesetzt werden. Häufig wird aus technischen Gründen zusätzlich gefordert, dass (bezüglich eines vorgegebenen Maßes) \mathcal{F}_0 die von den Nullmengen erzeugte σ -Algebra ist. Diese zusätzliche Eigenschaft ist durch Vervollständigung der σ -Algebren immer zu erreichen, wird von uns jedoch nicht benötigt.

Anmerkung 2.7. Definition 2.8 lässt sich auf unendliche Indexmengen $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}$ und kontinuierliche Indexmengen $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ verallgemeinern. Für unsere Zwecke sind jedoch endlich viele diskrete Zeitschritte ausreichend.

Definition 2.9. Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ eine Filtration auf der Menge Ω . Ein *adaptierter stochastischer Prozess mit Werten in \mathbb{R}^k* ist eine Abbildung

$$X: \Omega \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad (\omega, t) \mapsto X_t(\omega),$$

wobei für jedes $t \in \mathbb{T}$ die Abbildung $X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ bezüglich \mathcal{F}_t messbar ist.

Diese Definition lässt sich wie folgt interpretieren: Jedes $\omega \in \Omega$ beschreibt eine mögliche Historie des betrachteten Prozesses. Zum Zeitpunkt t ist der Teil der Historie, der der Vergangenheit $\{0, \dots, t\}$ entspricht, bekannt. Die Adaptiertheitsbedingung bedeutet, dass der Wert $X_t(\omega)$ zum Zeitpunkt t mit Sicherheit bekannt ist. Diese Interpretation wird besonders augenfällig für Produktfiltrationen (Abschnitt 2.4.3), siehe Korollar 2.2.

Beispiel 2.6 (Endlich generierte Filtration). In der praktischen Modellierung auftretende σ -Algebren sind aufgrund der Benutzung von Computern meistens endlich generiert. Es sei $\mathcal{P}_1 = \{A_1, \dots, A_{m_1}\}$ eine endliche *Partition* von Ω . Mit anderen Worten, es gelte $A_j \subset \Omega, A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^{m_1} A_i = \Omega$. \mathcal{F}_1 sei die von dem Mengensystem \mathcal{P}_1 generierte σ -Algebra. Wir können nun induktiv eine Filtration als sukzessive Verfeinerung von \mathcal{P}_1 konstruieren. Für jedes $A \in \mathcal{P}_t$ wählen wir eine Partition $\mathcal{P}(A) = \{B_1(A), \dots, B_{k(A)}(A)\}$ und setzen $\mathcal{P}_{t+1} = \bigcup_{A \in \mathcal{P}_t} \mathcal{P}(A)$. Diese Familie von Teilmengen von Ω ist dann wieder eine Partition von Ω und definiert somit eine σ -Algebra \mathcal{F}_{t+1} . Ein konkretes Beispiel ist durch

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{P}_0 = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\} \\ \mathcal{P}_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\} \\ \mathcal{P}_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4, 5\}\} \\ \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\} \\ \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \\ \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\} \end{array} \right]$$

gegeben. Mit

$$X_t(\omega) = \begin{cases} t & \text{für } \omega = 1 \\ t & \text{für } \omega = 2 \\ 3t + 4t(t - 1) & \text{für } \omega = 3 \\ 3t & \text{für } \omega = 4 \\ 3t & \text{für } \omega = 5 \end{cases} \quad \text{und} \quad Y(\omega) = \begin{cases} t & \text{für } \omega = 1 \\ t & \text{für } \omega = 2 \\ 3t + 4t^2 & \text{für } \omega = 3 \\ 3t & \text{für } \omega = 4 \\ 3t & \text{für } \omega = 5 \end{cases}$$

ist X_t ein adaptierter stochastischer Prozess, nicht aber Y_t : Offenbar sind Y_0 und X_0 konstant und somit \mathcal{F}_0 -messbar. Es gilt $X_1(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in \{1, 2\} \in \mathcal{F}_1$ und $X_1(\omega) = 3 \Leftrightarrow \omega \in \{3, 4, 5\} \in \mathcal{F}_1$. Damit ist X_1 \mathcal{F}_1 -messbar. Andererseits gilt $Y_1(\omega) = 7 \Leftrightarrow \omega \in \{3\} \notin \mathcal{F}_1$, so dass Y_1 nicht \mathcal{F}_1 -messbar ist. Schließlich gilt $X_2(\omega) = 2 \Leftrightarrow \omega \in \{1, 2\} \in \mathcal{F}_2$, $X_2(\omega) = 14 \Leftrightarrow \omega \in \{3\} \in \mathcal{F}_2$ und $X_2(\omega) = 6 \Leftrightarrow \omega \in \{4, 5\} \in \mathcal{F}_2$, so dass X_2 auch \mathcal{F}_2 -messbar ist.

Es sei X das Endresultat einer langfristigen Investition. Zum Zeitpunkt der Investition erwartet das Unternehmen das Ergebnis $E(X)$. Im Laufe der Zeit wird sich diese Einschätzung jedoch aufgrund von ökonomischen Unsicherheiten ändern. Dieser Aktualisierungsprozess kann durch bedingte Erwartungswerte auf einer Filtration beschrieben werden.

Definition 2.10. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\tilde{\mathcal{A}}$ eine Unter- σ -Algebra von \mathcal{A} und X eine \mathcal{A} -messbare Zufallsvariable. Der *bedingte Erwartungswert* von X bezüglich $\tilde{\mathcal{A}}$ ist die (f.s. eindeutig bestimmte) $\tilde{\mathcal{A}}$ -messbare Zufallsvariable $E(X | \tilde{\mathcal{A}})$ mit der Eigenschaft, dass

$$E(XZ) = E(E(X | \tilde{\mathcal{A}})Z)$$

für alle beschränkten $\tilde{\mathcal{A}}$ -messbaren Zufallsvariablen Z gilt.

Für die Wohldefiniertheit verweisen wir auf Theorem 23.4 in [34].

Lemma 2.9. *Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ eine Filtration auf Ω und X eine \mathcal{F}_n -messbare Zufallsvariable. Dann ist*

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega) := E(X | \mathcal{F}_t)|_{\omega}$$

ein adaptierter stochastischer Prozess.

Ferner erfüllt X_t die Martingaleigenschaft

$$E(X_{t+1} | \mathcal{F}_t) = X_t$$

für alle $t \in \{0, \dots, n-1\}$.

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der \mathcal{F}_t -Messbarkeit von $E(X | \mathcal{F}_t)$.

Für die zweite Aussage sei Z eine \mathcal{F}_t -messbare Funktion. Dann ist Z auch \mathcal{F}_{t+1} -messbar, und es gilt

$$E(X_{t+1}Z) = E(E(X | \mathcal{F}_{t+1})Z) = E(XZ) = E(E(X | \mathcal{F}_t)Z) = E(X_tZ).$$

Die Behauptung folgt aus der \mathcal{F}_t -Messbarkeit von X_t und der Eindeutigkeit des bedingten Erwartungswerts. \square

Aufgrund der Martingaleigenschaft kann man $E(X | \mathcal{F}_t)$ als den Best Estimate für das Endergebnis X zum Zeitpunkt t interpretieren. $E(X | \mathcal{F}_t)$ ist selbst eine Zufallsvariable, die die Unsicherheit zwischen den Zeitpunkten 0 und t widerspiegelt.

2.4.1.1 Produktfiltrationen

Für konkrete Anwendungen auf Cashflows werden Filtrationen in der Regel über sukzessiven Informationsgewinn konstruiert. Um diese konkreten Konstruktionen zu beschreiben, benötigen wir die folgende Notation:

Definition 2.11. $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ seien σ -Algebren auf den Mengen $\Omega_1, \dots, \Omega_k$. Die *Produkt- σ -Algebra* auf der Produktmenge $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_k$ ist dann durch

$$\bigotimes_{t=1}^k \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_k = \sigma(A_1 \times \dots \times A_k \mid A_t \in \mathcal{A}_t \text{ für } t \in \{1, \dots, k\})$$

gegeben, wobei wir die Konvention

$$A_1 \times \dots \times A_{t-1} \times \emptyset \times A_{t+1} \times \dots \times A_k = \emptyset$$

benutzen.

Im allgemeinen gilt $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \neq \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$. Die Gleichheit gilt jedoch, wenn \mathcal{A}_2 die triviale σ -Algebra ist.

Lemma 2.10. Ω_1, Ω_2 seien Mengen und \mathcal{A}_1 sei eine σ -Algebra auf Ω_1 . Dann gilt

$$A \in \mathcal{A}_1 \otimes \{\emptyset, \Omega_2\} \Leftrightarrow A = A_1 \times \Omega_2,$$

mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass die Mengen der Form

$$\{A_1 \times \Omega_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1\}$$

eine σ -Algebra bilden. □

Lemma 2.11 (Assoziativitätsgesetz). Es seien $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{j+k}$ σ -Algebren. Dann gilt

$$\left(\bigotimes_{t=1}^j \mathcal{A}_t \right) \otimes \left(\bigotimes_{t=j+1}^{j+k} \mathcal{A}_t \right) = \bigotimes_{t=1}^{j+k} \mathcal{A}_t.$$

Beweis. Siehe [5, Seite 161f]. □

Eine σ -Algebra modelliert, welche Ereignisse prinzipiell möglich sind. Für die Beschreibung einer ökonomischen Dynamik unterstellen wir, dass in jeder Zeitperiode prinzipiell die gleichen Ereignisse möglich sind. Zum Beispiel ist in jeder Periode t das Ereignis E_t möglich, dass der Aktienkurs eines Unternehmens um mehr als 10% steigt. Dagegen hängt die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse von der Dynamik ab und ist daher im allgemeinen für jede Zeitperiode unterschiedlich: Bringt das Unternehmen am Ende der Periode $t - 1$ ein neues, vielversprechendes Produkt auf den

Markt, so wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_t höher sein als die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_{t-1} . Mit diesem Ansatz ordnen wir also jeder (in Isolation betrachteten) Zeitperiode die gleiche σ -Algebra \mathcal{A} zu, aber nicht notwendiger Weise das gleiche Wahrscheinlichkeitsmaß. Das folgende Beispiel illustriert diese Idee:

Beispiel 2.7 (AR(1)-Prozess). Wir betrachten einen Aktienindex S_t , dessen Dynamik durch

$$S_t = \alpha S_{t-1} + s \omega_t, \quad t \in \{1, \dots, n\},$$

beschrieben wird, wobei $\alpha, s > 0$ konstant sind und $\omega_1, \omega_2, \dots$ unabhängig aus einer Standardnormalverteilung gezogen werden. Für jede feste Periode t ist unsere σ -Algebra gerade die Borel algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R} . Zur Beschreibung der gesamten Dynamik benötigen wir n Ziehungen, und offenbar ist die zugehörige σ -Algebra gerade die Borel algebra

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{t=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

auf der Menge $\Omega = \mathbb{R}^n$. Um die Dynamik bis zur Periode t zu beschreiben, böte sich an, als σ -Algebra die Borel algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^t)$ zu wählen. Dies hätte jedoch den Nachteil, dass sich die Menge, auf der die σ -Algebra definiert ist, bei jedem Zeitschritt ändert. Wenn wir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^t)$ mit $n-t$ Kopien der trivialen σ -Algebra $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ multiplizieren, ist die resultierende σ -Algebra auf dem gesamten Raum $\Omega = \mathbb{R}^n$ definiert. Sie hat außerdem die gleiche Messbarkeitsstruktur wie die σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^t)$. Denn da die bezüglich der σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^t) \times \bigotimes_{s=t+1}^n \mathcal{A}_0$ messbaren Abbildungen $f(\omega_1, \dots, \omega_n)$ nicht von $(\omega_{t+1}, \dots, \omega_n)$ abhängen, ist durch

$$\Psi(g)(\omega_1, \dots, \omega_n) = g(\omega_1, \dots, \omega_t)$$

eine Bijektion vom Raum der $\mathcal{B}(\mathbb{R}^t)$ -messbaren Abbildungen auf den Raum der $\mathcal{B}(\mathbb{R}^t) \times \bigotimes_{s=t+1}^n \mathcal{A}_0$ -messbaren Abbildungen definiert. Damit ist

$$\mathcal{F}_t = \bigotimes_{s=1}^t \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \bigotimes_{s=t+1}^n \mathcal{A}_0$$

die für unseren Prozess natürliche Filtration. Die Dynamik

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R}^n \times \{1, \dots, n\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\omega_1, \dots, \omega_n, t) &\mapsto S_t(\omega_1, \dots, \omega_n) \end{aligned}$$

ist für diese Filtration ein adaptierter, stochastischer Prozess. Man beachte, dass S_t nicht von $\omega_{t+1}, \dots, \omega_n$ abhängt. Dies drückt aus, dass die Zukunft unbekannt ist.

Man beachte, dass für $\alpha \notin \{0, 1\}$ weder die S_t für $t \in \{1, \dots, n\}$ noch die Zuwächse $S_{t+1} - S_t$ für $t \in \{1, \dots, n-1\}$ unabhängig verteilt sind. Die Verteilung des Prozesses S weist daher eine nicht-triviale Abhängigkeitsstruktur auf.

Die in Beispiel 2.7 beschriebene Konstruktion lässt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Definition 2.12. Es sei $\mathbb{T} = \{0, \dots, n\}$ und für $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ \mathcal{A}_t eine σ -Algebra auf der Menge Ω_t . Die Produktfiltration auf dem kartesischen Produkt $\Omega = \prod_{t=1}^n \Omega_t$ ist durch

$$\mathcal{F}_t = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\} & \text{falls } t = 0, \\ \otimes_{s=1}^t \mathcal{A}_s \otimes \otimes_{s=t+1}^n \{\emptyset, \Omega_s\} & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.6)$$

gegeben.

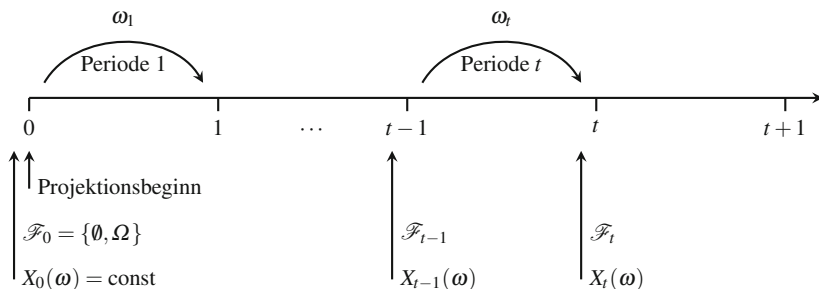


Abb. 2.4 Illustration zu Definition 2.12. Die während der Periode t auftretenden zufälligen Ereignisse werden durch die Ziehung $\omega_t \in \Omega_t$ beschrieben. Ist X_t ein adaptierter stochastischer Prozess, so sind zum Zeitpunkt t die Werte $X_0(\omega), \dots, X_t(\omega)$ bekannt, da sie nur von $(\omega_1, \dots, \omega_t)$ abhängen (siehe Korollar 2.2 weiter unten).

Die σ -Algebra \mathcal{F}_t kann als Einschränkung der gesamten σ -Algebra \mathcal{F}_n auf die Zeitspanne von 0 bis t verstanden werden (siehe Abbildung 2.4). In der praktischen Anwendung werden die \mathcal{A}_s fast immer gleich sein. Die etwas größere Allgemeinheit von Definition 2.12 bereitet jedoch zu keine zusätzlichen Schwierigkeiten.

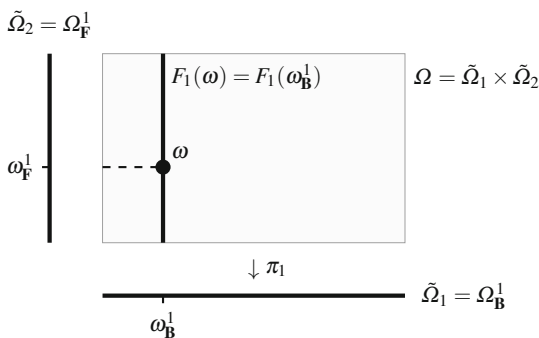


Abb. 2.5 Illustration der Produktstruktur in Definition 2.13 an einem zweidimensionalen Beispiel.

Definition 2.13. Es sei $\Omega = \prod_{t=1}^n \Omega_t$ und

$$\pi_t : \Omega \rightarrow \prod_{s=1}^t \Omega_s \quad \omega \mapsto \pi_t(\omega) = (\omega_1, \dots, \omega_t)$$

die Projektion auf die ersten t Faktoren. Für $\omega \in \Omega$ und $t \in \{1, \dots, n\}$ ist die t -Faser durch ω durch

$$F_t(\omega) = \pi_t^{-1}(\pi_t(\omega))$$

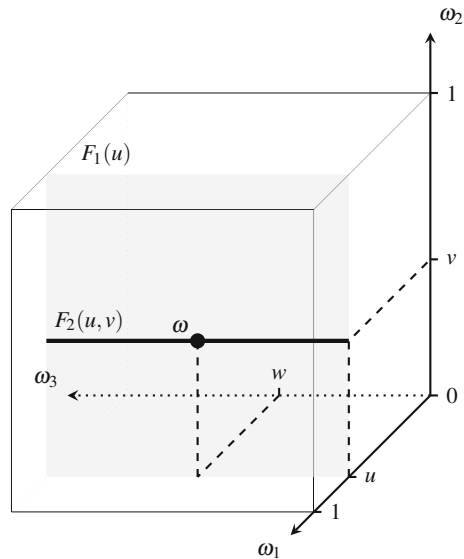
gegeben, und wir setzen $F_0(\omega) = \Omega$. Für $w \in \pi_t(\Omega)$ ist die t -Faser über w die Menge $F_t(w) = \pi_t^{-1}(w)$.

Wir schreiben $\Omega_{\mathbf{B}}^t = \prod_{s=1}^t \Omega_s$ und $\Omega_{\mathbf{F}}^t = \prod_{s=t+1}^n \Omega_s$.³ Außerdem benutzen wir die Schreibweise $\pi_t(\omega) = \omega_{\mathbf{B}}^t \in \Omega_{\mathbf{B}}^t$ und definieren $\omega_{\mathbf{F}}^t \in \Omega_{\mathbf{F}}^t$ durch $\omega = (\omega_{\mathbf{B}}^t, \omega_{\mathbf{F}}^t)$.

Korollar 2.1. Es sei $\Omega = \prod_{t=1}^n \Omega_t$. Für jedes $\omega \in \Omega$ gilt dann $\{\omega\} = F_n(\omega) \subseteq F_{n-1}(\omega) \subseteq \dots \subseteq F_1(\omega) \subseteq F_0(\Omega) = \Omega$.

Die Bezeichnungen in Definition 2.13 sind in dem Sinne konsistent, dass für alle $\omega \in \Omega$ die Gleichung $F_t(\omega) = F_t(\pi_t(\omega))$ gilt.

Abb. 2.6 Illustration zu Definition 2.13. Wir betrachten den Raum $\Omega =]0, 1[^3$, wobei \mathbf{P} das Lebesgue-Maß ist. $\omega = (u, v, w)$ ist der sich realisierende Zufallswert. Zum Zeitpunkt $t = 1$ zu Beginn der Periode $t + 1$ ist $\omega_1 = u$ bekannt. Die Faser $F_1(u)$ beschreibt den Wahrscheinlichkeitsraum für die verbleibende Unsicherheit. Zum Zeitpunkt $t = 2$ ist (u, v) bekannt und die Faser $F_2(u, v) \subseteq F_1(u)$ beschreibt die verbleibende Unsicherheit. Zum Zeitpunkt $t = 3$ ist ω bekannt. Da keine weitere Unsicherheit mehr besteht, reduziert sich die Faser $F_3(\omega)$ auf den Punkt ω .



Das folgende Lemma bzw. das nachfolgende Korollar zeigt, dass ein auf einer Produktfiltration definierter adaptierter, stochastischer Prozess zum Zeitpunkt t nur von der Unsicherheit bis zum Zeitpunkt t abhängt, nicht jedoch von zukünftigen Unwägbarkeiten. Dies entspricht der Erfahrung, dass die Gegenwart von Ereignissen in der Vergangenheit, nicht aber von Ereignissen in der Zukunft beeinflusst wird.

³ Der Index \mathbf{B} steht für „Basis“ und der Index \mathbf{F} für „Faser“.

Lemma 2.12. *Eine Abbildung $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann \mathcal{F}_t -messbar, wenn sie \mathcal{F}_n -messbar und auf den Fasern $F_t(\omega)$ konstant ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: g sei \mathcal{F}_t -messbar. Wegen $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_n$ ist g auch \mathcal{F}_n -messbar. Aus Lemma 2.10 folgt, dass \mathcal{F}_t aus den \mathcal{F}_n -messbaren Teilmengen der Form $A = \tilde{A} \times \Omega_{\mathbf{F}}^t$ besteht. Wir nehmen nun an, dass g auf den Fasern nicht konstant ist. Da $F_t(\omega) = \{\omega_{\mathbf{B}}^t\} \times \Omega_{\mathbf{F}}^t$ gilt, existieren $x, y \in \Omega_{\mathbf{F}}^t$ mit $g(\omega_{\mathbf{B}}^t, x) \neq g(\omega_{\mathbf{B}}^t, y)$. Dann existieren offene Intervalle B_x, B_y mit $g(\omega_{\mathbf{B}}^t, x) \in B_x$, $g(\omega_{\mathbf{B}}^t, y) \in B_y$ und $B_x \cap B_y = \emptyset$. Es folgt $g^{-1}(B_x) \cap g^{-1}(B_y) = \emptyset$. Da $(\omega_{\mathbf{B}}^t, x) \in g^{-1}(B_x) \setminus g^{-1}(B_y)$ gilt, folgt $g^{-1}(B_y) \cap F_t(\omega) \neq F_t(\omega)$. Damit ergibt sich ein Widerspruch zu $g^{-1}(B_y) \in \mathcal{F}_t$.

„ \Leftarrow “: Da g auf den Fasern $F_t(\omega)$ konstant ist, existiert für jede Borelmenge $B \subset \mathbb{R}$ eine Menge $A \subset \Omega_{\mathbf{F}}^t$ mit $g^{-1}(B) = A \times \Omega_{\mathbf{F}}^t$. Da $g^{-1}(B)$ bezüglich \mathcal{F}_n messbar ist, ist $g^{-1}(B)$ wegen Lemma 2.10 auch \mathcal{F}_t -messbar. \square

Korollar 2.2. *Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ eine Produktfiltration auf $\Omega = \prod_{t=1}^n \Omega_t$ und $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ ein adaptierter stochastischer Prozess. Dann hängt $X_t(\omega)$ nur von den ersten t Komponenten $\omega_1, \dots, \omega_t$ ab.*

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, dass $X_t(\omega)$ auf $F_t(\omega) = \{\omega_{\mathbf{B}}^t\} \times \prod_{s=t+1}^n \Omega_s$ konstant ist. \square

Da \mathcal{F}_t -messbare Funktionen g von ω lediglich über $\omega_{\mathbf{B}}^t$ abhängen, werden wir an einigen Stellen die Schreibweise $g(\omega_{\mathbf{B}}^t)$ anstelle von $g(\omega)$ benutzen.

Definition 2.14. Für $t \in \{1, \dots, n\}$ sei (Ω_t, μ_t) ein Maßraum und $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ die Produktfiltration auf $\Omega = \prod_{t=1}^n \Omega_t$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{P} auf (Ω, \mathcal{F}_n) sei bzgl. des Produktmaßes $\mu = \otimes_{t=1}^n \mu_t$ absolut stetig. Dann ist $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbf{P})$ eine *filtrierte Produktökonomie*.

Wir schreiben $\mu_{\mathbf{B}}^t = \otimes_{s=1}^t \mu_s$ und $\mu_{\mathbf{F}}^t = \otimes_{s=t+1}^n \mu_s$.

Anmerkung 2.8. Da es für jedes $A \subseteq F_t(\omega)$ eine eindeutig bestimmte Menge $\tilde{A} \subseteq \prod_{s=t+1}^n \Omega_s$ mit $A = (\omega_1, \dots, \omega_t) \times \tilde{A}$ gibt, induziert $\mu_{\mathbf{F}}^t$ durch

$$\mu_{\mathbf{F}}^{t, F_t(\omega)}(A) = \mu_{\mathbf{F}}^t(\tilde{A})$$

auf kanonische Weise ein Maß auf $F_t(\omega)$. Um die Notation zu erleichtern, benutzen wir die Schreibweise $\mu_{\mathbf{F}}^t$ auch für dieses Maß auf der Faser.

In einer filtrierten Produktökonomie werden n diskrete Zeitperioden modelliert, wobei in jeder Periode t die durch $\omega_t \in \Omega_t$ beschriebene zusätzliche ökonomische Unsicherheit entsteht. $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ beschreibt dann die kumulative Unsicherheit aller Perioden. Zu Beginn der Periode $t+1$ ist $\omega_{\mathbf{B}}^t$ ein bekannter Wert, während $F_t(\omega_{\mathbf{B}}^t)$ das verbleibende Risiko beschreibt. Eine ökonomische Produktökonomie bestimmt nicht die Preisbildung, sondern beschreibt nur die zufälligen Ereignisse, die die Preisbildung beeinflussen können. Die Preisdynamik von Gütern wird durch adaptierte stochastische Prozesse auf der ökonomischen Produktökonomie beschrieben (siehe Beispiel 2.7).

Anmerkung 2.9. Die Maße μ_t auf $(\Omega_t, \mathcal{A}_t)$ modellieren die Zufallsquellen der einzelnen Zeitperioden t . Durch die Wahl des Produktmaßes $\mu = \otimes_{t=1}^n \mu_t$ auf $\Omega = \prod_{t=1}^n \Omega_t$ unterstellen wir die Unabhängigkeit dieser Zufallsquellen. Jede Periode trägt also unabhängig von allen anderen Perioden einen Zufallseinfluss ω_t zur kumulierten Unsicherheit $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ bei. Dies ist jedoch lediglich ein mathematischer Trick, um die Modellierung zu vereinfachen, und das Produktmaß μ hat in der Regel keine direkte ökonomische Interpretation. Insbesondere bedeutet die Unabhängigkeit dieser Zufallsquellen nicht, dass eine ökonomische Preisdynamik auf $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mu)$ unabhängige Zuwächse aufweist, wie Beispiel 2.7 lehrt.

Dadurch, dass wir das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{P} als absolut stetig bezüglich μ wählen, erreichen wir eine für die Praxis hinreichend allgemeine Modellierungsstruktur. Hängt nämlich das Unfallgeschehen einer Periode von den zufälligen Ergebnissen der Vorperioden ab, so ermöglicht in vielen Fällen die Dichte p von \mathbf{P} bezüglich μ die Abbildung dieser Abhängigkeit. Beispielsweise könnte der Konjunktoreinfluss dazu führen, dass der Parameter einer exponentialverteilten Schadensgröße vom Ergebnis der Vorperiode abhängt. In unserer Modellierung könnte z.B. ein Schadenprozess über zwei Perioden (X_1, X_2) auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathbf{P})$ abgebildet werden, wobei \mathbf{P} die Dichte

$$p(x_1, x_2) = \exp(-x_1) \frac{10}{11x_1} \exp(-10x_2/(11x_1)) 1_{(0, \infty) \times (0, \infty)}(x_1, x_2)$$

bezüglich des zweidimensionalen Lebesgue-Maßes hat. Diesem Modell liegt die Abhängigkeitsannahme zugrunde, dass der Erwartungswert des Schadens in der zweiten Periode den beobachteten Schaden der ersten Periode um 10% übersteigt. In jedem Simulationsschritt würde man also zunächst eine Zufallszahl ω_1 aus der Exponentialverteilung mit Parameter 1 ziehen und danach eine Zufallszahl ω_2 aus einer Exponentialverteilung mit Parameter $1.1\omega_1$.

Vom Standpunkt der praktischen Modellierung ist also die Verwendung eines bezüglich μ absolut stetigen Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbf{P} hinreichend allgemein und führt zu signifikanten technischen Vereinfachungen (siehe z.B. Lemma 2.13 und Proposition 2.7).

Lemma 2.13. *Es sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbf{P})$ eine filtrierte Produktökonomie. Auf der Faser $F_t(\omega)$ ist bezüglich der von \mathcal{F}_n induzierten σ -Algebra durch*

$$\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}}^t(A) = \frac{\int 1_A p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \omega_{\mathbf{F}}^t) d\mu_{\mathbf{F}}^t}{\int p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \omega_{\mathbf{F}}^t) d\mu_{\mathbf{F}}^t}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben, wobei p die Dichte von \mathbf{P} bzgl. μ ist.

Beweis. Offensichtlich ist $\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}}^t$ ein Maß auf $F_t(\omega) = \{\omega_1\} \times \dots \times \{\omega_t\} \times \Omega_{t+1} \times \dots \times \Omega_n$. Die Behauptung folgt daher aus

$$\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}}^t(F_t(\omega)) = \frac{\int 1_{F_t(\omega)} p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \omega_{\mathbf{F}}^t) d\mu_{\mathbf{F}}^t}{\int p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \omega_{\mathbf{F}}^t) d\mu_{\mathbf{F}}^t} = \frac{\int p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \omega_{\mathbf{F}}^t) d\mu_{\mathbf{F}}^t}{\int p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \omega_{\mathbf{F}}^t) d\mu_{\mathbf{F}}^t} = 1.$$

□

Wir haben bereits gesehen, dass ein Beobachter zum Zeitpunkt t den Anteil $\omega_{\mathbf{B}}^t$ seiner Historie ω kennt und dass die verbleibende Unsicherheit durch $F_t(\omega_{\mathbf{B}}^t)$ beschrieben wird. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t}$ dient dem Beobachter zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten zukünftiger Ereignisse.

Proposition 2.7. *Es sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbf{P})$ eine filtrierte Produktökonomie und $\mathbf{P} = p\mu$. Dann gilt \mathbf{P} -fast überall*

$$\mathbb{E}(g \mid \mathcal{F}_t)_{|\omega_{\mathbf{B}}^t} = \frac{\int_{\Omega_{\mathbf{F}}^t} g(\omega) p(\omega) d\mu_{\mathbf{F}}^t}{\int_{\Omega_{\mathbf{F}}^t} p(\omega) d\mu_{\mathbf{F}}^t}.$$

Beweis. Wegen Definition 2.10 erfüllt der bedingte Erwartungswert

$$\int_{\Omega} g(\omega) Z(\omega_{\mathbf{B}}^t) p(\omega) d\mu = \int_{\Omega} \mathbb{E}(g \mid \mathcal{F}_t)(\omega_{\mathbf{B}}^t) Z(\omega_{\mathbf{B}}^t) p(\omega) d\mu$$

für alle integrierbaren \mathcal{F}_t -messbaren Funktionen $\omega_{\mathbf{B}}^t \mapsto Z(\omega_{\mathbf{B}}^t)$ und ist durch diese Bedingung eindeutig bestimmt. Die Funktionen

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\omega_{\mathbf{B}}^t) &= \int_{\Omega_{\mathbf{F}}^t} g(\omega) p(\omega) d\mu_{\mathbf{F}}^t \\ \tilde{p}(\omega_{\mathbf{B}}^t) &= \int_{\Omega_{\mathbf{F}}^t} p(\omega) d\mu_{\mathbf{F}}^t \end{aligned}$$

sind offenbar \mathcal{F}_t -messbar. Also ist auch ihr Quotient \mathcal{F}_t -messbar. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(\omega) Z(\omega_{\mathbf{B}}^t) p(\omega) d\mu &= \int_{\Omega_{\mathbf{B}}^t} \tilde{g}(\omega_{\mathbf{B}}^t) Z(\omega_{\mathbf{B}}^t) d\mu_{\mathbf{B}}^t \\ &= \int_{\Omega_{\mathbf{B}}^t} \frac{\tilde{g}(\omega_{\mathbf{B}}^t)}{\tilde{p}(\omega_{\mathbf{B}}^t)} \tilde{p}(\omega_{\mathbf{B}}^t) Z(\omega_{\mathbf{B}}^t) d\mu_{\mathbf{B}}^t \\ &= \int_{\Omega} \frac{\tilde{g}(\omega_{\mathbf{B}}^t)}{\tilde{p}(\omega_{\mathbf{B}}^t)} Z(\omega_{\mathbf{B}}^t) p(\omega) d\mu. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt somit unmittelbar aus der Definition des bedingten Erwartungswerts. \square

2.4.2 Allgemeine dynamische Risikomaße

Definition 2.15. Es sei (Ω, \mathbf{P}) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, \dots, n\}}$ eine Filtration auf Ω . Für jedes t sei $\mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ ein Vektorraum \mathcal{F}_t -messbarer Funktionen. Ein *dynamisches Risikomaß* ist eine Familie $(\rho_t)_{t \in \{0, \dots, n\}}$ von Abbildungen

$$\rho_t: \mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R}),$$

so dass gilt:

- (i) $X_1 \geq X_2$ f.s. $\Rightarrow \rho_t(X_1) \geq \rho_t(X_2)$ f.s. (Monotonie);
- (ii) Für $K \in \mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ gilt $\rho_t(X + K) = \rho_t(X) + K$ f.s. (Translationsinvarianz).

Definition 2.16. Ein dynamisches Risikomaß $(\rho_t)_{t \in \{0, \dots, n\}}$ heißt *kohärent*, falls gilt:

- (i) $\rho_t(KX) = K\rho_t(X)$ f.s. für alle $K \in \mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ mit $K \geq 0$ f.s. und $KX \in \mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R})$ (Homogenität);
- (ii) $\rho_t(X_1 + X_2) \leq \rho_t(X_1) + \rho_t(X_2)$ f.s. (Subadditivität).

Diese Definitionen sind analog zu Definition 2.7. Die Abbildung ρ_t ist das zum Zeitpunkt t berechnete Risikomaß, bezogen auf den Zeithorizont $]t, n[$. Da ρ_t auf der Information über den Risikoverlauf bis zum Zeitpunkt t basiert, ist ρ_t keine reellwertige, sondern eine $\mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ -wertige Abbildung. Aus dem gleichen Grund wird K als Element von $\mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ vorausgesetzt.

Anmerkung 2.10. In der Literatur wird häufig $\mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R}) = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t)$ vorausgesetzt (siehe z.B. [46]).

In Abschnitt 2.4.3 werden wir dynamische Risikomaße auf filtrierten Produktökonomien untersuchen und dabei die Produktstruktur explizit ausnutzen. Dies wird uns zu dynamischen Risikomaßen mit praxisrelevanten Eigenschaften führen. In Abschnitt 2.4.4 beschreiben wir einen alternativen Zugang für allgemeine Filtrationen, der in der mathematischen Literatur favorisiert wird. Wir werden allerdings sehen, dass dieser alternative Zugang aus praktischer Sicht problematisch ist. Abschnitt 2.4.4 kann daher von Lesern, die primär an Anwendungen interessiert sind, übersprungen werden.

2.4.3 Dynamische Risikomaße auf filtrierten Produktökonomien.

Es sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbf{P})$ eine filtrierte Produktökonomie und $\rho: \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Risikomaß. Ist ρ „hinreichend generisch“, so kann es auf natürliche Weise „punktweise“ auf die Fasern $F_t(\omega) \subseteq \Omega$ übertragen werden, wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}}$ anstelle von \mathbf{P} benutzt wird. Dies liefert für jede Faser $F_t(\omega)$ ein Risikomaß $\rho_t(\omega): \mathcal{M}(F_t(\omega), \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Da die t -Faser durch $\tilde{\omega} \in F_t(\omega)$ gerade $F_t(\tilde{\omega}) = F_t(\omega)$ ist, würde man ferner erwarten, dass $\rho_t(\omega) = \rho_t(\tilde{\omega})$ gilt. Es liegt also nahe zu vermuten, dass $(\omega, X) \mapsto \rho_t(\omega)(X(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot))$ ein dynamisches Risikomaß definiert. In Theorem 2.6 wird diese allgemeine Konstruktionsidee für den Value at Risk und in Theorem 2.7 für den Expected Shortfall durchgeführt.

Definition 2.17. Es sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbf{P})$ eine filtrierte Produktökonomie, $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ der Raum der \mathcal{F}_t -messbaren Funktionen. Die durch $t \in \mathbb{T}$ parametrisierte Familie von Abbildungen

$$\text{VaR}_{\alpha,t}: \mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_1(\Omega, \mathbb{R}), \quad X \mapsto \text{VaR}_{\alpha,t}(X)$$

mit

$$\text{VaR}_{\alpha,t}(X)|_{\omega_{\mathbf{B}}^t} = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : \mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t} (X(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) \leq x) \geq \alpha \right\}$$

heißt *dynamischer Value at Risk*.

Theorem 2.6. *Der dynamische Value at Risk ist ein dynamisches Risikomaß.*

Beweis. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $\text{VaR}_{\alpha,t}$ gerade der gewöhnliche Value at Risk für den Wahrscheinlichkeitsraum $(F_t(\Omega), \mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t})$. Weil sich die Ungleichung $X > Y$ trivialerweise auf die Einschränkung auf Teilmengen überträgt, überträgt sich die Monotonie des Value at Risk punktweise für jedes $\omega_{\mathbf{B}}^t \in \Omega_{\mathbf{B}}^t$ auf $\text{VaR}_{\alpha,t}$.

Da \mathcal{F}_t -messbare Funktionen auf den Mengen

$$\{\omega_{\mathbf{B}}^t\} \times \Omega_{\mathbf{F}}^t \subseteq \Omega$$

konstant sind, liefert das gleiche punktweise Argument auch die Translationsinvarianz.

Es verbleibt, die \mathcal{F}_t -Messbarkeit von $\text{VaR}_{\alpha,t}(X)$ nachzuweisen. Wir nehmen zunächst an, dass X nach unten beschränkt ist. Dann gibt es eine steigende Folge $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ einfacher Funktionen mit $\limsup_{k \rightarrow \infty} X_k = \lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X$. Da X_k messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt, ist die Abbildung $\omega_{\mathbf{B}}^t \mapsto \text{VaR}_{\alpha,t}(X_k)|_{\omega_{\mathbf{B}}^t}$ ebenfalls messbar. Aufgrund der Monotonie von $\text{VaR}_{\alpha,t}$ ist $\{\text{VaR}_{\alpha,t}(X_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine steigende Folge messbarer, einfacher Funktionen, weshalb auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{VaR}_{\alpha,t}(X_k)$$

messbar ist. Wegen $X_k \leq X$ und der Monotonie gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{VaR}_{\alpha,t}(X_k) \leq \text{VaR}_{\alpha,t}(X).$$

Angenommen, es gäbe ein $\varepsilon > 0$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{VaR}_{\alpha,t}(X_k) < \text{VaR}_{\alpha,t}(X) - \varepsilon$. Weil X_k eine steigende Folge ist, gilt dann $\text{VaR}_{\alpha,t}(X_k) < \text{VaR}_{\alpha,t}(X) - \varepsilon$ für alle k . Dies impliziert

$$\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t} (X_k(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) \leq \text{VaR}_{\alpha,t}(X) - \varepsilon/2) \geq \alpha$$

für alle k . Da X_k gegen X konvergiert, folgt $\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t} (X(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) \leq \text{VaR}_{\alpha,t}(X) - \varepsilon/2) \geq \alpha$ im Widerspruch zur Definition von $\text{VaR}_{\alpha,t}$.

Ist X nicht nach unten beschränkt, so sei $\tilde{X}_k = \max(X, -k)$. $\{\tilde{X}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine fallende Folge von nach unten beschränkten, messbaren Funktionen, die punktweise gegen X konvergiert. Daher ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{VaR}_{\alpha,t}(\tilde{X}_k)$ messbar und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{VaR}_{\alpha,t}(\tilde{X}_k) \geq \text{VaR}_{\alpha,t}(X).$$

Gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $\liminf_{k \rightarrow \infty} \text{VaR}_{\alpha,t}(\tilde{X}_k) > \text{VaR}_{\alpha,t}(X) + \varepsilon$, so gälte

$$\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t} \left(\tilde{X}_k(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) \leq \text{VaR}_{\alpha,t}(X)|_{\omega_{\mathbf{B}}^t} + \varepsilon/2 \right) < \alpha$$

für alle k und wegen der Konvergenz von \tilde{X}_k

$$\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t} \left(X(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) \leq \text{VaR}_{\alpha,t}(X)|_{\omega_{\mathbf{B}}^t} + \varepsilon/2 \right) < \alpha$$

im Widerspruch zur Definition von $\text{VaR}_{\alpha,t}$. \square

Definition 2.18. Es sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbf{P})$ eine filtrierte Produktökonomie, $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ der Raum der integrierbaren, \mathcal{F}_t -messbaren Funktionen. Die durch $t \in \mathbb{T}$ parametrisierte Familie von Abbildungen

$$\text{ES}_{\alpha,t}: \mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_1(F_t, \mathbb{R}), \quad X \mapsto \text{ES}_{\alpha,t}(X)$$

mit

$$\text{ES}_{\alpha,t}(X)|_{\omega_{\mathbf{B}}^t} = \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{E}_{\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t}} \left(X(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) 1_{X(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot), \text{VaR}_{\alpha,t}(X)|_{\omega_{\mathbf{B}}^t}, \alpha} \right)$$

heißt *dynamischer Expected Shortfall*, wobei $1_{X, \cdot, \alpha}$ definiert ist wie in Lemma 2.5.

Theorem 2.7. *Der dynamische Expected Shortfall ist ein kohärentes, dynamisches Risikomaß.*

Beweis. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $\text{ES}_{\alpha,t}$ der gewöhnliche Expected Shortfall auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(F_t(\omega), \mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t})$. Daher übertragen sich Monotonie und Subadditivität direkt auf $\text{ES}_{\alpha,t}(X)$. Da \mathcal{F}_t -messbare Funktionen auf den Mengen

$$\{\omega_{\mathbf{B}}^t\} \times \Omega_{\mathbf{F}}^t \subseteq \Omega$$

konstant sind, liefert das gleiche punktweise Argument auch die Translationsinvarianz und die Homogenität.

Um die \mathcal{F}_t -Messbarkeit von $\text{ES}_{\alpha,t}(X)$ nachzuweisen, nehmen wir zunächst an, dass X nach unten beschränkt ist. Dann gibt es eine steigende Folge $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ einfacher Funktionen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X$ fast überall. Da X_k und $\text{VaR}_{\alpha,t}(X_k)$ messbar sind und nur endlich viele Werte annehmen, ist für jedes $w \in \pi_t(\omega)$ die Abbildung

$$\omega_{\mathbf{B}}^t \mapsto 1_{X_k(\omega_{\mathbf{B}}^t, w), \text{VaR}_{\alpha,t}(X_k), \alpha}$$

und daher auch

$$\omega_{\mathbf{B}}^t \mapsto \text{ES}_{\alpha,t}(X_k)|_{\omega_{\mathbf{B}}^t}$$

\mathcal{F}_t -messbar. Aufgrund der Monotonie von $\text{ES}_{\alpha,t}$ ist $\{\text{ES}_{\alpha,t}(X_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine steigende Folge messbarer, einfacher Funktionen, weshalb auch

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \text{ES}_{\alpha,t}(X_k) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_{F_t(\omega_{\mathbf{B}}^t)} 1_{X_k(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot), \text{VaR}_{\alpha,t}(X_k), \alpha} P(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) d\mu_{\mathbf{F}}^t}{(1-\alpha) \int_{F_t(\omega_{\mathbf{B}}^t)} P(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) d\mu_{\mathbf{F}}^t} = \text{ES}_{\alpha,t}(X)$$

messbar ist.

Ist X nicht nach unten unbeschränkt, so können wir die Folge

$$\tilde{X}_k = \{\max(X, -k)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

betrachten. Wir haben gerade gesehen, dass $\text{ES}_{\alpha,t}(\tilde{X}_k)$ für jedes k messbar ist. Also ist auch

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \text{ES}_{\alpha,t}(\tilde{X}_k) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_{F_t(\omega'_B)} 1_{X_k}(\omega'_B, \cdot) \text{VaR}_{\alpha,t}(\max(X, -k), \alpha) P(\omega'_B, \cdot) d\mu'_F}{(1 - \alpha) \int_{F_t(\omega'_B)} P(\omega'_B, \cdot) d\mu'_F} \\ &= \text{ES}_{\alpha,t}(X) \end{aligned}$$

messbar. □

Es ist denkbar, dass ein schlecht gewähltes dynamisches Risikomaß im Zeitverlauf zu widersprüchlichen Risikoeinschätzungen führen könnte. In der folgenden Definition formalisieren wir daher eine Minimalforderung an dynamische Risikomaße, die für in der Praxis benutzte Risikomaße nicht verletzt werden sollte.

Definition 2.19. Es sei (Ω, μ) ein Maßraum, $B \subset \Omega$ und $f: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Das *Essential Supremum* von f über B ist durch

$$\text{ess sup}_B(f) = \inf \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) > a\} \cap B) = 0\} \in \bar{\mathbb{R}}$$

und das *Essential Infimum* von f über B durch

$$\text{ess inf}_B(f) = \sup \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) < a\} \cap B) = 0\} \in \bar{\mathbb{R}}$$

definiert.

Definition 2.20. Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ eine Produktfiltration auf $\Omega = \prod_{s=1}^n \Omega_s$. Ein dynamisches Risikomaß $(\rho_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ist *zeitkonsistent*, falls es für jede Zufallsvariable X , fast jedes $\omega \in \Omega$ und jede \mathcal{F}_{t+1} -messbare Teilmenge $B \subseteq F_t(\omega)$ mit $\mathbf{P}_{\omega'_B}(B) > 0$ und

$$\text{ess inf}_B(\rho_{t+1}(X)) > \rho_t(X)|_\omega$$

eine \mathcal{F}_{t+1} -messbare Teilmenge $C \subseteq F_t(\omega)$ mit $\mathbf{P}_{\omega'_B}(C) > 0$ und

$$\text{ess sup}_C(\rho_{t+1}(X)) < \rho_t(X)|_\omega$$

gibt.

ρ_t sei ein zeitkonsistentes, dynamisches Risikomaß und $\rho_t(X)|_\omega = K$. Wenn zum Zeitpunkt t die Wahrscheinlichkeit größer als 0 ist, dass $\rho_{t+1}(X)|_\omega > K$ gilt, also Kapital nachgeschossen werden muss, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\rho_{t+1}(X)|_\omega < K$ gilt, also Kapital frei wird, auch größer als 0.

Definition 2.21. Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ eine Produktfiltration auf $\Omega = \prod_{s=1}^n \Omega_s$. Ein dynamisches Risikomaß ρ_t ist *schwach zeitkonsistent*, falls für fast jedes ω und jedes Paar (X, t)

$$\text{ess inf}_{F_t(\omega)} (\rho_{t+1}(X)) \leq \rho_t(X)|_\omega$$

gilt.

Anmerkung 2.11. Empirisch kann zwischen Zeitkonsistenz und schwacher Zeitkonsistenz nicht unterschieden werden. Denn falls ρ_t schwach zeitkonsistent und X eine gegebene Zufallsvariable ist, genügt eine beliebig kleine Änderung von X , um die Zeitkonsistenzbedingung für X zu erfüllen.

Korollar 2.3. *Zeitkonsistenz impliziert schwache Zeitkonsistenz.*

Angenommen, ein Unternehmen benutzt zur Kapitalbestimmung ein dynamisches Risikomaß ρ_t , das zum Zeitpunkt τ die schwache Zeitkonsistenz verletzt. Das Unternehmen stellt dann zum Zeitpunkt τ das ausreichende Kapital $\rho_\tau(X)$. Mit der Wahrscheinlichkeit 1 muss es aber eine Periode später Kapital nachschießen, obwohl in der Zwischenzeit keine Cashflows geflossen sind. Schlechteres Risikomanagement ist kaum vorstellbar. Aus diesem Grund wird man von jedem in der Praxis benutzten dynamischen Risikomaß fordern wollen, dass es zeitkonsistent ist.

Anmerkung 2.12. In der Literatur wird der Begriff „zeitkonsistent“ oft benutzt, um eine andere Bedingung, in der zwei Zufallsvariablen miteinander verglichen werden, auszudrücken (siehe Definition 2.23). Wir werden jedoch in Abschnitt 2.4.4 sehen, dass die Bedingung in Definition 2.23 für das praktische Risikomanagement weniger geeignet ist, als Zeitkonsistenz zu fordern.

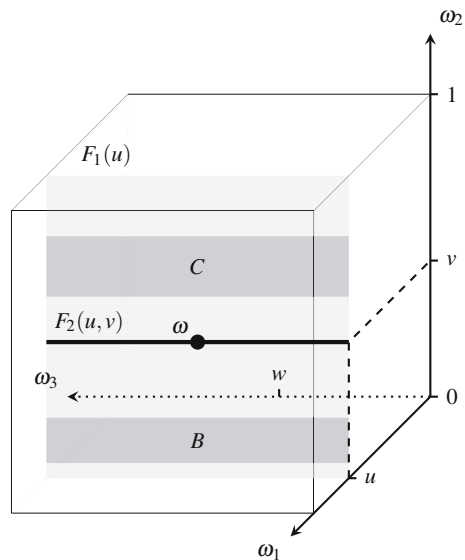


Abb. 2.7 Illustration zu Definition 2.20. Wir betrachten den Raum $\Omega =]0, 1[^3$, wobei \mathbf{P} das Lebesgue-Maß ist und schreiben $\omega = (u, v, w)$. Der Wert $\rho_1(u)$ ist auf $F_1(u)$ konstant und liegt zwischen den Werten des Risikomaßes ρ_2 auf B und bzw. C .

Anmerkung 2.13. Man beachte, dass Definitionen 2.20 und 2.21 nicht zeitsymmetrisch sind. Dies hat gute Gründe, denn das Risiko sollte sich verringern, wenn sich der Zeithorizont verkleinert, da in einem kürzeren Zeitraum weniger Schäden auftreten können.

Beispiel 2.8. Es sei $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, \mathbf{P} das Lebesgue-Maß auf Ω und $\alpha \in]0, 1[$. Die Zufallsvariable X sei durch

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{falls } \omega_1 < (1 - \alpha)/2, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Dann gilt $\text{VaR}_{\alpha,0}(X)|_{\omega} = 1$ für alle $\omega \in \Omega$ aber

$$\text{VaR}_{\alpha,1}(X)|_{\tilde{\omega}} = \begin{cases} 2 & \text{falls } \tilde{\omega}_1 < (1 - \alpha)/2, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies zeigt, dass der dynamische Value at Risk nicht zeitkonsistent ist.

Theorem 2.8. *Es sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbf{P})$ eine filtrierte Produktökonomie. Dann ist der auf $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbf{P})$ definierte dynamische Value at Risk schwach zeitkonsistent.*

Beweis. Es sei $\omega \in \Omega$. Für $t \in \{0, \dots, n-1\}$ setzen wir

$$G = \left\{ \tilde{\omega} \in F_t(\omega) : X(\tilde{\omega}) \geq \text{VaR}_{\alpha,t+1}(X)|_{\tilde{\omega}_B^{t+1}} \right\}.$$

Es sei $\tilde{\omega} \in F_t(\omega)$. Lemma 2.1 impliziert

$$\mathbf{P}_{\tilde{\omega}_B^{t+1}} \left(X(\tilde{\omega}_B^{t+1}, \cdot) \leq \text{VaR}_{\alpha,t+1}(X)|_{\tilde{\omega}_B^{t+1}} \right) = \alpha,$$

da $\text{VaR}_{\alpha,t+1}(X)|_{\tilde{\omega}_B^{t+1}}$ gerade der gewöhnliche Value at Risk für die Zufallsvariable $X(\tilde{\omega}_B^{t+1}, \cdot)$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(F_{t+1}(\tilde{\omega}), \mathbf{P}_{\tilde{\omega}_B^{t+1}})$ ist. Es folgt

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &\leq \mathbf{P}_{\tilde{\omega}_B^{t+1}} \left(X(\tilde{\omega}_B^{t+1}, \cdot) \geq \text{VaR}_{\alpha,t+1}(X) \right) \\ &= \frac{\int_{\Omega_F^{t+1}} 1_G p(\tilde{\omega}_B^{t+1}, \cdot) d\mu_F^{t+1}}{\int_{\Omega_F^{t+1}} p(\tilde{\omega}_B^{t+1}, \cdot) d\mu_F^{t+1}} \end{aligned}$$

für jedes $\tilde{\omega} \in F_t(\omega)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t}(G) \int_{F_t(\omega)} p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) d\mu_{\mathbf{F}}^t &= \int_{F_t(\omega)} 1_G p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) d\mu_{\mathbf{F}}^t \\
&= \int_{\Omega_{t+1}} \int_{\Omega_{\mathbf{F}}^{t+1}} 1_G p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1} d\mu_{t+1} \\
&\geq \int_{\Omega_{t+1}} (1 - \alpha) \int_{\Omega_{\mathbf{F}}^{t+1}} p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1} d\mu_{t+1} \\
&= (1 - \alpha) \int_{F_t(\omega)} p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) d\mu_{\mathbf{F}}^t.
\end{aligned}$$

Also gilt $\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t}(G) \geq 1 - \alpha$ und $X(\tilde{\omega}) \geq \text{ess inf}_{F_{t+1}(\tilde{\omega})}(\text{VaR}_{\alpha,t+1}(X))$ für fast alle $\tilde{\omega} \in G$. Dies impliziert $\text{VaR}_{\alpha,t}(X)|_{\omega} \geq \text{ess inf}_{F_t(\omega)}(\text{VaR}_{\alpha,t+1}(X))$. \square

Theorem 2.9. *Es sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbf{P})$ eine filtrierte Produktökonomie. Dann ist der auf $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbf{P})$ definierte dynamische Expected Shortfall zeitkonsistent.*

Beweis. Es sei $\omega \in \Omega$ und $u = \pi_t(\omega)$. Wir nehmen an, dass es eine Zufallsvariable X und eine \mathcal{F}_{t+1} -messbare Teilmenge $B \subseteq F_t(\omega)$ mit $\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t}(B) > 0$ und

$$\text{ess inf}_B(\text{ES}_{\alpha,t+1}(X)) > \text{ES}_{\alpha,t}(X)|_{\omega}$$

gibt. Wenn es keine \mathcal{F}_{t+1} -messbare Menge $C \subseteq F_t(\omega)$ mit $\mathbf{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t}(C) > 0$ und

$$\text{ess sup}_C(\text{ES}_{\alpha,t+1}(X)) < \text{ES}_{\alpha,t}(X)|_{\omega}$$

gibt, dann gilt für fast alle $v \in \Omega_{t+1}$

$$\text{ES}_{\alpha,t+1}(X)|_{(u,v)} \geq \text{ES}_{\alpha,t}(X)|_u. \quad (2.7)$$

Es genügt also, Ungleichung (2.7) zu einem Widerspruch zu führen.

Wir nehmen an, dass (2.7) gilt und setzen

$$\begin{aligned}
G &= \left\{ \tilde{\omega} \in F_t(\omega) : X(\tilde{\omega}) > \text{VaR}_{\alpha,t+1}(X)|_{\pi_{t+1}(\tilde{\omega})} \right\}, \\
H &= \left\{ \tilde{\omega} \in F_t(\omega) : X(\tilde{\omega}) = \text{VaR}_{\alpha,t+1}(X)|_{\pi_{t+1}(\tilde{\omega})} \right\}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\beta &: \Omega_{t+1} \rightarrow [0, 1], \\
v \mapsto \beta(v) &= \begin{cases} \frac{1 - \alpha - \mathbf{P}_{(u,v)}(G \cap F_t(\omega))}{\mathbf{P}_{(u,v)}(H \cap F_t(\omega))} & \text{falls } \mathbf{P}_{(u,v)}(H \cap F_t(\omega)) > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Man beachte, dass aufgrund der $(t+1)$ -faserweisen Definition von G und H im allgemeinen $G \neq \{X > \text{VaR}_{\alpha,t}(X)\}$ und $H \neq \{X(\tilde{\omega}) = \text{VaR}_{\alpha,t}(X)\}$ gilt.

Wegen Lemma 2.5 gilt für $v \in \Omega_{t+1}$

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha) \text{ES}_{\alpha, t+1}(X)_{|(u, v)} &= \int_{F_{t+1}(u, v)} X (1_G + \beta(v) 1_H) d\mathbf{P}_{(u, v)} \\
&= \frac{\int_{F_{t+1}(u, v)} X 1_G p d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1}}{\int_{F_{t+1}(u, v)} p d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1}} + \frac{\int_{F_{t+1}(u, v)} X \beta(v) 1_H p d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1}}{\int_{F_{t+1}(u, v)} p d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1}}.
\end{aligned}$$

Da wir Ungleichung (2.7) annehmen, auf der Menge $B \subset F_t(\omega)$ sogar die strikte Ungleichung gilt, und B keine \mathbf{P}_u -Nullmenge ist, erhalten wir durch Integration über v die Ungleichung

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha) \text{ES}_{\alpha, t}(X)_{|u} \int_{F_t(u)} p d\mu_{\mathbf{F}}^t &< \int_{F_t(u)} X 1_G p d\mu_{\mathbf{F}}^t \\
&\quad + \int_{\Omega_{t+1}} \beta \int_{F_{t+1}(u, \cdot)} X 1_H p d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1} d\mu_{t+1} \\
&= \left(\int_G X d\mathbf{P}_u + \int_H \beta X d\mathbf{P}_u \right) \int_{F_t(u)} p d\mu_{\mathbf{F}}^t. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Aus

$$\beta(v) \int_{F_{t+1}(u, v)} 1_H p d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1} = (1 - \alpha) \int_{F_{t+1}(u, v)} p d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1} - \int_{F_{t+1}(u, v)} 1_G p d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{t+1}} \beta \int_{F_{t+1}(u, \cdot)} 1_H p d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1} d\mu_{t+1} &= (1 - \alpha) \int_{\Omega_{t+1}} \int_{F_{t+1}(u, \cdot)} p d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1} d\mu_{t+1} \\
&\quad - \int_{\Omega_{t+1}} \int_{F_{t+1}(u, \cdot)} 1_G p d\mu_{\mathbf{F}}^{t+1} d\mu_{t+1} \\
&= (1 - \alpha) \int_{F_t(u)} p d\mu_{\mathbf{F}}^t - \int_{F_t(u)} 1_G p d\mu_{\mathbf{F}}^t
\end{aligned}$$

und somit $\int_G d\mathbf{P}_u + \int_H \beta d\mathbf{P}_u = 1 - \alpha$. Es sei

$$\begin{aligned}
V &= \left\{ \tilde{\omega} \in F_t(\omega) : X(\tilde{\omega}) > \text{VaR}_{\alpha, t}(X)_{|u} \right\}, \\
c &= \begin{cases} 1 - \frac{\int_{H \cap V} (1 - \beta) d\mathbf{P}_u}{\int_{H \setminus V} \beta d\mathbf{P}_u} & \text{falls } \int_{H \setminus V} \beta d\mathbf{P}_u > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= \int_G d\mathbf{P}_u + \int_H \beta d\mathbf{P}_u \\
&= \int_G d\mathbf{P}_u + c \int_{H \setminus V} \beta d\mathbf{P}_u + \int_{H \cap V} d\mathbf{P}_u \\
&= \int_{(G \cup H) \cap V} d\mathbf{P}_u + \int_{G \setminus V} d\mathbf{P}_u + c \int_{H \setminus V} \beta d\mathbf{P}_u. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt, dass außerdem

$$\int_H \beta X \, d\mathbf{P}_u \leq c \int_{H \setminus V} \beta X \, d\mathbf{P}_u + \int_{H \cap V} X \, d\mathbf{P}_u \quad (2.10)$$

gilt. Aus $\inf_{\tilde{\omega} \in H \cap V} X(\tilde{\omega}) \geq \sup_{\tilde{\omega} \in H \setminus V} X(\tilde{\omega})$ und $0 \leq \beta \leq 1$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{H \cap V} X \, d\mathbf{P}_u &\geq \int_{H \cap V} \left(\inf_{\tilde{\omega} \in H \cap V} X(\tilde{\omega})(1 - \beta) + \beta X \right) d\mathbf{P}_u \\ &\geq \sup_{\tilde{\omega} \in H \setminus V} X(\tilde{\omega}) \left(\int_{H \cap V} (1 - \beta) d\mathbf{P}_u \right) + \int_{H \cap V} \beta X \, d\mathbf{P}_u \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{H \cap V} \beta X \, d\mathbf{P}_u \int_{H \setminus V} \beta \, d\mathbf{P}_u &\leq \int_{H \cap V} X \, d\mathbf{P}_u \int_{H \setminus V} \beta \, d\mathbf{P}_u \\ &\quad - \sup_{\tilde{\omega} \in H \setminus V} X(\tilde{\omega}) \left(\int_{H \cap V} (1 - \beta) d\mathbf{P}_u \right) \int_{H \setminus V} \beta \, d\mathbf{P}_u \\ &\leq \int_{H \cap V} X \, d\mathbf{P}_u \int_{H \setminus V} \beta \, d\mathbf{P}_u \\ &\quad - \int_{H \setminus V} \beta X \, d\mathbf{P}_u \int_{H \cap V} (1 - \beta) d\mathbf{P}_u. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_H \beta X \, d\mathbf{P}_u \int_{H \setminus V} \beta \, d\mathbf{P}_u &= \int_{H \setminus V} \beta X \, d\mathbf{P}_u \int_{H \setminus V} \beta \, d\mathbf{P}_u + \int_{H \cap V} \beta X \, d\mathbf{P}_u \int_{H \setminus V} \beta \, d\mathbf{P}_u \\ &\leq \int_{H \setminus V} \beta X \, d\mathbf{P}_u \left(\int_{H \setminus V} \beta \, d\mathbf{P}_u - \left(\int_{H \cap V} (1 - \beta) d\mathbf{P}_u \right) \right) \\ &\quad + \int_{H \cap V} X \, d\mathbf{P}_u \int_{H \setminus V} \beta \, d\mathbf{P}_u \\ &= \int_{H \setminus V} \beta \, d\mathbf{P}_u \left(c \int_{H \setminus V} \beta X \, d\mathbf{P}_u + \int_{H \cap V} X \, d\mathbf{P}_u \right), \end{aligned}$$

was Ungleichung (2.10) impliziert.

Da H und G disjunkt sind, folgt aus den Ungleichungen (2.8) und (2.10)

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha) \text{ES}_{\alpha,t}(X)|_u &< \int_{G \cup (H \cap V)} X \, d\mathbf{P}_u + c \int_{H \setminus V} \beta X \, d\mathbf{P}_u \\
&= \int_{(G \cup H) \cap V} X \, d\mathbf{P}_u + \int_{G \setminus V} X \, d\mathbf{P}_u + c \int_{H \setminus V} \beta X \, d\mathbf{P}_u \\
&\leq \int_{(G \cup H) \cap V} X \, d\mathbf{P}_u + \inf_{\tilde{\omega} \in V} X(\tilde{\omega}) \left(\int_{G \setminus V} d\mathbf{P}_u + c \int_{H \setminus V} \beta d\mathbf{P}_u \right) \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_{(G \cup H) \cap V} X \, d\mathbf{P}_u + \inf_{\tilde{\omega} \in V} X(\tilde{\omega}) \left(1 - \alpha - \int_{(G \cup H) \cap V} d\mathbf{P}_u \right) \\
&\stackrel{(**)}{\leq} \int_V X \, d\mathbf{P}_u + \text{VaR}_{\alpha,t}(X)|_u \left(1 - \alpha - \int_V d\mathbf{P}_u \right) \\
&\stackrel{(**)}{=} (1 - \alpha) \text{ES}_{\alpha,t}(X)|_u,
\end{aligned}$$

wobei wir außerdem in (*) Gleichung (2.9) und in (**) die Definition der Menge V benutzt haben. Dies ist ein Widerspruch, so dass unsere Annahme

$$\text{ES}_{\alpha,t+1}(X)|_{(u,v)} \geq \text{ES}_{\alpha,t}(X)|_u \quad \text{für fast alle } v \in \Omega_{t+1}$$

falsch sein muss. □

Damit sind sowohl der dynamische Value at Risk als auch der dynamische Expected Shortfall gute Kandidaten für das mehrperiodische Risikomanagement.

2.4.4 Eine Klasse dynamischer Risikomaße auf allgemeinen Filtrationen

In der einschlägigen Literatur wird eine andere Klasse dynamischer Risikomaße studiert, die auf allgemeinen Filtrationen auf elegante Weise definierbar ist. Proposition 2.9 liefert das Konstruktionsverfahren für diese Klasse. Beispiel 2.9 liefert aus unserer Sicht einen Grund, warum diese Konstruktion trotz ihrer Eleganz für das praktische Risikomanagement kaum geeignet ist.

Für Proposition 2.9 benötigen wir eine Modifikation des (punktweisen) Supremums über eine Menge von Funktionen für Wahrscheinlichkeitsräume.

Definition 2.22. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{R})$ eine Teilmenge messbarer Funktionen. Dann ist das *Essential Supremum*

$$\text{ess sup}(\mathcal{S}) \in \mathcal{B}(\Omega, \bar{\mathbb{R}})$$

durch die folgenden Eigenschaften bestimmt:

- (i) Es gilt $\text{ess sup}(\mathcal{S}) \geq f$ f.s. für jedes $f \in \mathcal{S}$.
- (ii) Erfüllt $g \in \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{R})$ die Ungleichung $g \geq f$ f.s. für jedes $f \in \mathcal{S}$, so folgt $g \geq \text{ess sup}(\mathcal{S})$ f.s.

Man beachte, dass $\text{ess sup}(\mathcal{S})$ auf einer Menge mit echt positivem Maß den Wert ∞ annehmen kann.

Anmerkung 2.14. Es gilt $\text{ess sup}\{f\} = f$. Daher reduziert sich diese Definition für einelementige Mengen von Funktionen nicht auf Definition 2.19.

Lemma 2.14. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{R})$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Dann existiert $\text{ess sup}(\mathcal{S}) \in \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{R})$.*

Beweis. Es sei

$$\tilde{\mathcal{S}} = \left\{ \omega \mapsto \max_{g \in S} \{g(\omega)\} : S \subseteq \mathcal{S} \text{ ist eine endliche Menge} \right\}$$

die Menge der punktweisen Maxima aller endlichen Teilmengen von \mathcal{S} und

$$\theta(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = -\infty, \\ \arctan(x) & \text{falls } -\infty < x < \infty, \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x = \infty. \end{cases}$$

Da \mathbf{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und für jede messbare Funktion g die Komposition $\theta \circ g$ beschränkt und messbar ist, existiert $\int_{\Omega} |\theta \circ g| d\mathbf{P}$. Damit ist $\theta \circ g$ integrierbar und

$$\alpha = \sup \left\{ \int_{\Omega} \theta \circ g d\mathbf{P} : g \in \tilde{\mathcal{S}} \right\} \in \bar{\mathbb{R}}$$

ist wohldefiniert. Es sei $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$ eine Folge mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \theta \circ g_k d\mathbf{P} = \alpha.$$

Da wir für jedes k die Funktion g_k durch $\max\{g_1, \dots, g_k\}$ ersetzen können, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $g_{k+1} \geq g_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt. Da somit die Folge $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ wachsend ist, gilt für $f(\omega) = \sup_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega)$ und jedes $\omega \in \Omega$

$$f(\omega) = \lim_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) \in \bar{\mathbb{R}}.$$

f ist als Supremum messbarer Funktionen ebenfalls messbar, weshalb $\int_{\Omega} \theta \circ f d\mathbf{P}$ wohldefiniert ist. Da θ beschränkt ist, folgt aus dem Theorem der majorisierten Konvergenz und der Stetigkeit von θ

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \theta \circ g_k d\mathbf{P} = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} \theta \circ g_k d\mathbf{P} = \int_{\Omega} \theta \circ \lim_{k \rightarrow \infty} g_k d\mathbf{P} = \int_{\Omega} \theta \circ f d\mathbf{P}.$$

Es sei $g \in \mathcal{S}$. Da $\max(g_k, g) \in \tilde{\mathcal{S}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und

$$\max\{f, g\} = \max\left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} g_k, g \right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \max\{g_k, g\}$$

gilt, folgt

$$\int_{\Omega} \theta \circ \max\{f, g\} d\mathbf{P} = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} \theta \circ \max\{g_k, g\} d\mathbf{P} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \theta \circ \max\{g_k, g\} d\mathbf{P} \leq \alpha.$$

Also ist das Integral über $\theta \circ f - \theta \circ \max\{f, g\}$ nicht-negativ. Aufgrund der Monotonie von θ ist andererseits $\theta \circ \max\{f, g\} - \theta \circ f$ nicht-negativ. Dies ist nur möglich, wenn $\theta \circ \max\{f, g\} = \theta \circ f$ f.s. gilt. Es folgt $f \geq g$ f.s.

Es sei nun $g \in \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{R})$ eine messbare Funktion, die die Ungleichung $g \geq h$ f.s. für jedes $h \in \mathcal{S}$ erfüllt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt dann offenbar $g \geq g_k$. Es folgt $g \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} g_k = f$ und damit $f = \text{ess sup}(\mathcal{S})$. \square

Der Expected Shortfall einer Zufallsvariable X lässt sich als Supremum der Erwartungswerte von X bzgl. einer Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen darstellen (Proposition 2.3). Die folgende Proposition zeigt, dass diese Art der Darstellung in natürlicher Weise zu kohärenten Risikomaßen führt.

Proposition 2.8. *Es sei \mathcal{W} eine Teilmenge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Für jedes $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ und jedes $Q \in \mathcal{W}$ existiert $E_Q(X)$.*
- (ii) *$\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$ für alle $\mathbf{Q} \in \mathcal{W}$.*

Dann ist durch

$$\rho^{\mathcal{W}}(X) = \sup_{Q \in \mathcal{W}} \{E_Q(X)\}$$

ein kohärentes Risikomaß definiert.

Wir werden Proposition 2.8 in Anschluss an Proposition 2.9 als eine elementare Folgerung beweisen.

Wenn man als $\mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R})$ den Raum der fast überall beschränkten messbaren Funktionen wählt, kann man zeigen, dass eine große Klasse von kohärenten Risikomaßen über Proposition 2.8 dargestellt werden kann [15, Theorem 3.2]. Dies motiviert, kohärente dynamische Risikomaße ebenfalls über diese Darstellung zu konstruieren.

Proposition 2.9. *$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, \dots, n\}}$ sei eine Filtration mit $\mathcal{F}_n = \mathcal{A}$. Für $t \in \{0, \dots, n\}$ sei $\mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ der Vektorraum der f.s. beschränkten, \mathcal{F}_t -messbaren Funktionen. \mathcal{W} sei eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Ω .*

Dann ist die Familie von Abbildungen

$$\rho_t^{\mathcal{W}} : \mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R}), \quad X \mapsto \rho_t^{\mathcal{W}}(X) = \text{ess sup}_{Q \in \mathcal{W}} E_Q(X | \mathcal{F}_t)$$

ein kohärentes, dynamisches Risikomaß.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\rho_t^{\mathcal{W}}$ ein dynamisches Risikomaß ist.

Aufgrund von Lemma 2.14 existiert die Abbildung $\rho_t(X)$ und ist \mathcal{F}_t -messbar. Da X fast überall beschränkt ist, gilt $\rho_t(X)|_{\omega} \in \mathbb{R}$ f.s.

Monotonie: Es gelte $X_1 \geq X_2$ f.s. Dann gilt für jedes $\mathbf{Q} \in \mathscr{W}$ die Ungleichung $E_{\mathbf{Q}}(X_1) \geq E_{\mathbf{Q}}(X_2)$. Da die Beziehung „ \geq “ beim Übergang zum Supremum erhalten bleibt, folgt die Monotonie von $\rho_t^{\mathscr{W}}$.

Translationsinvarianz: Seien $K \in \mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ und $\mathbf{Q} \in \mathscr{W}$. Da K \mathcal{F}_t -messbar ist, gilt

$$E_{\mathbf{Q}}(X + K \mid \mathcal{F}_t) = E_{\mathbf{Q}}(X \mid \mathcal{F}_t) + K.$$

Der Übergang zum Supremum führt daher zu $\rho_t^{\mathscr{W}}(X + K) = \rho_t^{\mathscr{W}}(X) + K$.

Homogenität: Es sei $K \in \mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ mit $K \geq 0$ f.s. und $KX \in \mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R})$. Für $\mathbf{Q} \in \mathscr{W}$ gilt dann

$$E_{\mathbf{Q}}(KX \mid \mathcal{F}_t) = KE_{\mathbf{Q}}(X \mid \mathcal{F}_t)$$

und daher

$$\rho_t^{\mathscr{W}}(KX) = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathscr{W}} \{KE_{\mathbf{Q}}(X \mid \mathcal{F}_t)\} = K \sup_{\mathbf{Q} \in \mathscr{W}} \{E_{\mathbf{Q}}(X \mid \mathcal{F}_t)\} = K\rho_t^{\mathscr{W}}(X),$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen $K \geq 0$ benutzt haben.

Subadditivität: Für $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{Q} \in \mathscr{W}} \{E_{\mathbf{Q}}(X_1 + X_2 \mid \mathcal{F}_t)\} &= \sup_{\mathbf{Q} \in \mathscr{W}} \{E_{\mathbf{Q}}(X_1 \mid \mathcal{F}_t) + E_{\mathbf{Q}}(X_2 \mid \mathcal{F}_t)\} \\ &\leq \sup_{\mathbf{Q} \in \mathscr{W}} \{E_{\mathbf{Q}}(X_1 \mid \mathcal{F}_t)\} + \sup_{\mathbf{Q} \in \mathscr{W}} \{E_{\mathbf{Q}}(X_2 \mid \mathcal{F}_t)\}. \end{aligned}$$

□

Beweis von Proposition 2.8. Wir wenden Proposition 2.9 für $n = 1$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ an. Dann gilt $\rho_0^{\mathscr{W}}(X) = \text{ess sup}_{\mathbf{Q} \in \mathscr{W}} E_{\mathbf{Q}}(X \mid \mathcal{F}_0) = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathscr{W}} E_{\mathbf{Q}}(X) = \rho^{\mathscr{W}}(X)$ und aus der Definition eines kohärenten dynamischen Risikomaßes folgt unmittelbar, dass ρ_0 ein kohärentes Risikomaß ist. □

Es wäre mathematisch sehr naheliegend, den Expected Shortfall mittels Proposition 2.9 für eine gegebene Filtration zu einem dynamischen Risikomaß auszudehnen. In der Tat wird dieser Weg in der Literatur beschriftet (siehe z.B. [46, Example 25]). Leider ist diese Erweiterung für praktische Anwendungen wenig geeignet, da das erweiterte Risikomaß den Charakter des Expected Shortfall verliert (siehe Beispiel 2.9).

Beispiel 2.9. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\Omega, \mathbf{P}) = ([0, 1[\times]0, 1[, d\omega),$$

wobei Ω mit der Borel-Algebra $\mathcal{B}([0, 1[\times]0, 1[)$ ausgestattet und $d\mathbf{P} = d\omega_1 d\omega_2$ das Lebesgue Maß auf dem \mathbb{R}^2 sei. Wir wählen die Produktfiltration

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_1 = \{A \times]0, 1[: A \in \mathcal{B}([0, 1[)\}, \mathcal{F}_2 = \mathcal{B}([0, 1[\times]0, 1[)$$

Für $\alpha \in]0, 1[$ sei

$$\mathscr{W}_\alpha = \left\{ \mathbf{Q}: \mathbf{Q} \text{ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit } \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \text{ und } \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \leq \frac{1}{1-\alpha} \right\}.$$

Dann gilt nach Proposition 2.3 $\rho_0^{\mathscr{W}_\alpha} = \text{ES}_\alpha$ und $\rho_t^{\mathscr{W}_\alpha}$ ist das durch Proposition 2.9 aus dem Expected Shortfall gewonnene kohärente dynamische Risikomaß.

Für $\mu \in]0, 1[$ seien

$$\begin{aligned} A_\mu &= \left\{ \omega: 0 < \omega_1 < \frac{1}{4}, 0 < \omega_2 < 2(1-\mu)(1-\alpha) \right\}, \\ B_\mu &= \left\{ \omega: \frac{3}{4} \leq \omega_1 < 1, 0 < \omega_2 < 2(1-\mu)(1-\alpha) \right\}, \\ C_\mu &= \{ \omega: 1-\mu + \mu\alpha \leq \omega_2 < 1 \} \end{aligned}$$

(siehe Abbildung (2.8)). Nach Konstruktion gilt $A_\mu \cap B_\mu = B_\mu \cap C_\mu = C_\mu \cap A_\mu = \emptyset$ sowie

$$\mathbf{P}(A_\mu) = \mathbf{P}(B_\mu) = \frac{1}{2}(1-\mu)(1-\alpha), \quad \mathbf{P}(C_\mu) = \mu(1-\alpha),$$

so dass $\mathbf{P}(A_\mu \cup B_\mu \cup C_\mu) = 1-\alpha$ gilt. Damit ist das durch die Dichte

$$\frac{d\mathbf{Q}_\mu}{d\mathbf{P}} = \frac{1_{A_\mu} + 1_{B_\mu} + 1_{C_\mu}}{1-\alpha}$$

definierte Maß \mathbf{Q}_μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und erfüllt die Ungleichung

$$\frac{d\mathbf{Q}_\mu}{d\mathbf{P}} \leq \frac{1}{1-\alpha}.$$

Es gilt $\mathbf{Q}_\mu \in \mathscr{W}_\alpha$ und daher für alle beschränkten Zufallsvariablen X die Ungleichung

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_\mu}(X \mid \mathscr{F}_t) \leq \rho_t^{\mathscr{W}_\alpha}(X).$$

Wir betrachten nun eine Zufallsvariable

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto \xi(\omega_2),$$

wobei ξ nur von ω_2 abhängt und monoton wachsend ist. Für $\omega_1 \in]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$ gilt dann wegen Proposition 2.7

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_\mu}(X \mid \mathscr{F}_1)_{|\omega_1} &= \frac{\int_0^1 \xi(\omega_2) \frac{d\mathbf{Q}_\mu}{d\mathbf{P}}(\omega_1, \omega_2) d\omega_2}{\int_0^1 \frac{d\mathbf{Q}_\mu}{d\mathbf{P}}(\omega_1, \omega_2) d\omega_2} \\ &= \frac{\frac{1}{1-\alpha} \int_{1-\mu(1-\alpha)}^1 \xi(\omega_2) d\omega_2}{\frac{1}{1-\alpha} \int_{1-\mu(1-\alpha)}^1 d\omega_2} \\ &= \frac{1}{\mu(1-\alpha)} \int_0^{\mu(1-\alpha)} \xi(1-x) dx \end{aligned}$$

und somit

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} E_{\mathbf{Q}_\mu}(X \mid \mathcal{F}_1)_{|\omega_1} = \lim_{x \rightarrow 0} \xi(1-x) = \sup_{\omega_2 \in]0,1[} \xi(\omega_2) = \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega).$$

Es sei nun $\omega_1 \in]0, \frac{1}{4}[\cup]\frac{3}{4}, 1[$ und

$$\tilde{A}_\mu = \frac{1}{4} + A_\mu, \tilde{B}_\mu = -\frac{1}{4} + B_\mu.$$

Wir können die gleiche Analyse mit dem durch

$$\frac{d\tilde{\mathbf{Q}}_\mu}{d\mathbf{P}} = \frac{1_{\tilde{A}_\mu} + 1_{\tilde{B}_\mu} + 1_{C_\mu}}{1 - \alpha}$$

gegebenen Risikomaß $\tilde{\mathbf{Q}}_\mu$ wiederholen und erhalten

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} E_{\tilde{\mathbf{Q}}_\mu}(X \mid \mathcal{F}_1)_{|\omega_1} = \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

für alle $\omega_1 \in]0, \frac{1}{4}[\cup]\frac{3}{4}, 1[$. Wegen $\rho_1^{\mathcal{W}_\alpha}(X) \leq \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$ folgt also $\rho_1^{\mathcal{W}_\alpha}(X) = \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$ fast sicher. Damit hat das dynamische Risikomaß zum Zeitpunkt 1 den Charakter des Expected Shortfalls vollständig verloren. Dieses Risikomaß ist natürlich für das Risikomanagement zur Zeit $t = 1$ vollkommen ungeeignet. Ist ξ nicht fast sicher konstant, so folgt außerdem die Existenz eines $c > 0$, so dass

$$\rho_0^{\mathcal{W}_\alpha}(X) + c < \rho_1^{\mathcal{W}_\alpha}(X) \text{ f.s.}$$

gilt. Das Risikomaß $\rho_t^{\mathcal{W}_\alpha}$ ist nicht schwach zeitkonsistent und somit auch nicht zeitkonsistent.

Man beachte, dass dieses Beispiel zwar einfach, aber völlig unpathologisch ist: Der springende Punkt unseres Beispiels liegt darin, dass wir für jedes $\omega \in \Omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{Q} \in \mathcal{W}_\alpha$ finden können, das auf $F_t(\omega)$ nur in einer kleinen Umgebung des Supremums von X nicht verschwindet. Da $F_t(\omega)$ bezüglich \mathbf{P} eine Nullmenge ist, haben wir auf $\Omega \setminus F_t(\omega)$ genügend Platz, um das Maß \mathbf{Q} so fortzusetzen, dass $\mathbf{Q} \in \mathcal{W}_\alpha$ gilt. Es folgt $\rho_t^{\mathcal{W}_\alpha}(X) = \sup_{\hat{\omega} \in F_t(\omega)} \{X(\hat{\omega})\}$. Diese Konstruktion lässt sich für nahezu jedes praktische Beispiel durchführen.

In der Literatur wird häufig der Schluss gezogen, dass man bei Verwendung des Expected Shortfalls in einem dynamischen Kontext sehr vorsichtig sein muss bzw. dass der Expected Shortfall in einem dynamischen Kontext nicht geeignet ist (siehe zum Beispiel [4, Section 5.3], [46, Example 25]). Die Autoren beschränken sich auf eine Unterklasse dynamischer Risikomaße, die zusätzliche axiomatisch eingeführte Bedingungen zur zeitlichen Konsistenz erfüllen. Ein typisches Beispiel einer solchen Bedingung ist die folgende Bedingung (siehe [45, 46]).

Definition 2.23. Ein dynamisches Risikomaß ρ_t heißt *vergleichskonsistent*, falls für alle Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$

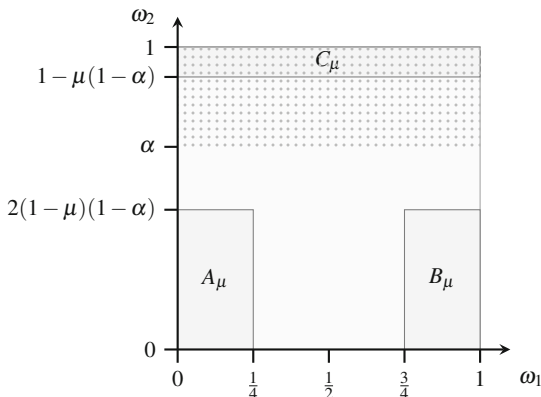


Abb. 2.8 Die Konstruktion des Maßes \mathbf{Q}_μ in Beispiel 2.9. Der Träger der Zufallsvariablen ist durch ein Punktmuster gekennzeichnet.

$$\rho_{t+1}(X) \geq \rho_{t+1}(Y) \text{ f.s.} \Rightarrow \rho_t(X) \geq \rho_t(Y) \text{ f.s.}$$

gilt.

Anmerkung 2.15. In [45, 46] wird von „zeitkonsistent“ anstelle von „vergleichskonsistent“ gesprochen. Wir sind jedoch der Ansicht, dass die Konsistenzbedingung in Definition 2.23 nicht plausibel ist. Da das Risikomaß zu Beginn der Periode t keine vollständige Beschreibung der zukünftigen Cashflows darstellt, ist es möglich dass aufgrund neuer Information zu Beginn der Periode $t + 1$ das Risiko einer Zufallsgröße X größer als das mit Y verbundene Risiko sein kann, selbst wenn die Relation in der vorigen Periode umgekehrt war. Beispiel 2.10 zeigt, wie dieser Informationsgewinn zu einer Verletzung der Vergleichskonsistenz führen kann.

Daher möchten wir den Begriff „zeitkonsistent“ für die in Definition 2.20 gegebene Variante reservieren.

Der Expected Shortfall hat Eigenschaften, die sich im Risikomanagement im einperiodischen Fall bewährt haben. Dass der mit Hilfe von Proposition 2.9 ausgedehnte Expected Shortfall seinen Charakter grundlegend ändert, wenn man die Periode in mehrere Teilperioden aufteilt, ist nicht dem Expected Shortfall, sondern der speziellen Konstruktion zur Erweiterung anzulasten. In der Tat ist die in Definition 2.18 gegebene Verallgemeinerung des Expected Shortfall zeitkonsistent und behält ihren Charakter mit fortschreitender Zeit.

Bei einem dynamischen Risikomaß der Form $\rho_t^{\mathscr{W}}(X) = \text{ess sup}_{\mathbf{Q} \in \mathscr{W}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(X \mid \mathcal{F}_t)$ hängt die definierende Menge \mathscr{W} nicht von der Zeit t ab. Es ist daher schwierig, über diese Konstruktion den mit fortschreitender Zeit entstehenden Informationsgewinn über die Risikolage zu beschreiben. Dies scheint das Hauptproblem dieser Konstruktion zu sein und ist unabhängig von der Wahl des speziellen Risikomaßes „Expected Shortfall“.

Das folgende Beispiel zeigt, dass der dynamische Expected Shortfall zwar zeitkonsistent, aber nicht vergleichskonsistent ist.

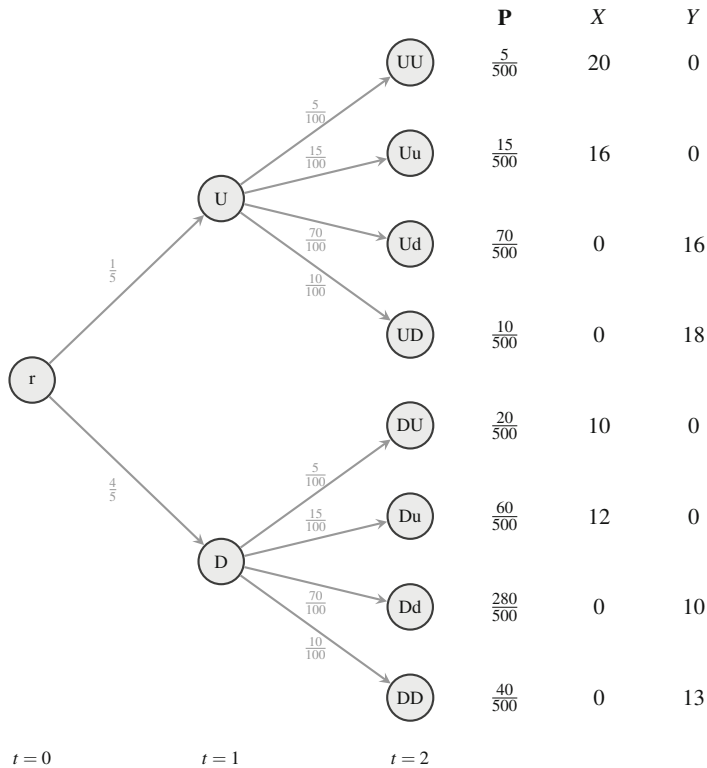


Abb. 2.9 Verletzung der Vergleichskonsistenz durch den Expected Shortfall.

Beispiel 2.10. Abbildung 2.9 zeigt ein Beispiel, in dem die Vergleichskonsistenz für den dynamischen Expected Shortfall $ES_{80\%,t}$ verletzt ist. Man beachte, dass dieses diskrete Beispiel über eine auf einer Borel algebra basierenden filtrierten Produktökonomie konstruiert werden kann (siehe Abbildung 2.4.4). Mit Lemma 2.5 erhalten wir zum Zeitpunkt $t = 1$ die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
 ES_{80\%,1}(X)_{|(U)} &= \frac{20 \times 5 + 16 \times 15}{20} = \frac{340}{20} = 17, \\
 ES_{80\%,1}(X)_{|(D)} &= \frac{12 \times 15 + 10 \times 5}{20} = \frac{230}{20} = 11.5, \\
 ES_{80\%,1}(Y)_{|(U)} &= \frac{18 \times 10 + 16 \times 10}{20} = \frac{340}{20} = 17, \\
 ES_{80\%,1}(Y)_{|(D)} &= \frac{13 \times 10 + 10 \times 10}{20} = \frac{230}{20} = 11.5,
 \end{aligned}$$

so dass die Werte des Risikomaßes zum Zeitpunkt 1 für X und Y übereinstimmen. Die Vergleichskonsistenz würde daher implizieren, dass dann auch

$$\text{ES}_{80\%,0}(X)_{|(r)} = \text{ES}_{80\%,0}(Y)_{|(r)}$$

gilt. Die direkte Berechnung liefert jedoch für den Zeitpunkt $t = 0$

$$\text{ES}_{80\%,0}(X)_{|(r)} = \frac{20 \times 5 + 16 \times 15 + 12 \times 60 + 10 \times 20}{100} = \frac{1260}{100} = 12.6$$

$$\text{ES}_{80\%,0}(Y)_{|(r)} = \frac{18 \times 10 + 16 \times 70 + 13 \times 20}{100} = \frac{1560}{100} = 15.6$$

Indem wir $\tilde{Y} = Y - c$ für $c \in]0, 3[$ setzen, erhalten wir die scheinbar stärkere Aussage

$$\text{ES}_{80\%,0}(\tilde{Y}) > \text{ES}_{80\%,0}(X), \text{ aber } \text{ES}_{80\%,1}(\tilde{Y}) < \text{ES}_{80\%,1}(X) \text{ f.s.}$$

Wir interpretieren dieses Ergebnis dahingehend, dass das Portfolio \tilde{Y} gegenüber dem Portfolio X zur Zeit $t = 1$ an Kapitaleffizienz gewinnt. Die Vergleichskonsistenz ist einfach deshalb verletzt, weil wir bei der Ermittlung von $\text{ES}_{80\%,0}$ beide Zweige, U und D, zu den 20% höchsten Verlusten beitragen, während zum Zeitpunkt 1 die Wahl der 20% höchsten Verluste auf jeweils einen der Zweige U bzw. D eingeschränkt ist. Der relevante Informationsgewinn im Knoten U besteht somit darin, dass die verlustbringenden Ereignisse in D nicht mehr eintreten können. Analog erhält man im Knoten D die Information, dass die verlustbringenden Ereignisse in U nicht mehr eintreffen können. Eine Konsistenzverletzung im umgangssprachlichen Sinn sehen wir darin nicht.



<http://www.springer.com/978-3-642-25805-3>

Wertorientiertes Risikomanagement von
Versicherungsunternehmen

Kriele, M.; Wolf, J.

2012, X, 374 S. 42 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-25805-3