Allgemeine Relativitätstheorie

Bearbeitet von
Torsten Fließbach

1. Auflage 2012. Buch. x, 382 S. Hardcover
ISBN 978 3 8274 3031 1
Format (B x L): 16,8 x 24 cm
Gewicht: 823 g

II Spezielle Relativitätstheorie

3 Lorentztransformationen

Das Verständnis der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) setzt die Kenntnis der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) voraus. In den folgenden Kapiteln 3 – 8 werden die wichtigsten Ergebnisse der SRT zusammengestellt[1]*. Diese Zusammenstellung orientiert sich daran, was später für die Darstellung der ART gebraucht wird.*

Relativitätsprinzip: Galilei oder Einstein

Die Beschreibung physikalischer Vorgänge erfordert ein Bezugssystem. So müssen etwa für die Beschreibung der Bahn $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ eines Teilchens kartesische Koordinaten x, y, z und eine Zeitkoordinate t eingeführt werden. Ein Bezugssystem ist zum Beispiel durch einen konkreten Laborraum gegeben, dessen eine Ecke mit drei orthogonalen Kanten das kartesische Koordinatensystem bildet und in dem eine Uhr die Zeit t anzeigt. Ein Bezugssystem mit festgelegter Koordinatenwahl nennen wir auch Koordinatensystem.

In bestimmten Bezugssystemen, die *Inertialsysteme* (IS) genannt werden, erscheinen physikalische Vorgänge einfacher als in anderen Bezugssystemen. Insbesondere gelten die Newtonschen Bewegungsgleichungen nur in IS. Experimentell stellt sich heraus, dass IS solche Systeme sind, die sich relativ zum Fixsternhimmel mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Nicht-IS sind Bezugssysteme, die relativ dazu beschleunigt sind (zum Beispiel ein Karussell).

Die Beschreibung physikalischer Vorgänge in einem IS ist unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der das IS sich gegenüber dem Fixsternhimmel bewegt. Dieser experimentelle Befund wurde von Galilei als *Relativitätsprinzip* formuliert: „Alle IS sind gleichwertig“. Unter Gleichwertigkeit wird dabei verstanden, dass grundlegende physikalische Gesetze in allen IS die gleiche Form haben. Formal heißt dies, dass die Gesetze *kovariant* sind unter den Transformationen, die von einem IS zu einem anderen IS$'$ führen. Kovariant bedeutet hier forminvariant; die Gleichungen sind also in jedem IS von derselben Form. Wir betrachten zunächst die Transformationen zwischen den IS, wie sie von Galilei angenommen wurden.

[1] Der Inhalt der Kapitel 3 – 5 ist wesentlich ausführlicher in Teil IX meiner *Mechanik* [7] dargestellt.

T. Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie,*
DOI 10.1007/978-3-8274-3032-8_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

Mit x, y, z, t (im Folgenden auch mit x^1, x^2, x^3, t bezeichnet) wird ein *Ereignis* in IS definiert. Damit kann etwa der Ort eines bestimmten Teilchens zur Zeit t gemeint sein, oder der Ort, an dem zwei Teilchen zur Zeit t zusammenstoßen. Dasselbe Ereignis hat dann in einem anderen IS$'$ andere Koordinaten x', y', z', t'. Die allgemeine *Galileitransformation* zwischen den Koordinaten dieses einen Ereignisses in IS und IS$'$ lautet:

$$x'^{i} \;=\; \alpha^{i}_{k}\, x^{k} + a^{i} + v^{i}\, t \tag{3.1}$$

$$t' \;=\; t + t_0 \tag{3.2}$$

Dabei sind x^i, v^i und a^i die kartesischen Komponenten von Vektoren (etwa $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i$ mit den Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_z$). Als *Summenkonvention* führen wir ein, dass über gleiche Indizes, von denen einer hoch und einer tief gestellt ist, summiert wird. Dies bedeutet, dass in (3.1) über k zu summieren ist; der freie Index i nimmt dagegen wahlweise einen der Werte 1, 2 oder 3 an. Als Konvention wird ferner vereinbart, dass lateinische Indizes die Werte 1, 2, 3 annehmen, griechische dagegen 0, 1, 2, 3.

In (3.1, 3.2) gibt $\boldsymbol{v}$ die Relativgeschwindigkeit zwischen IS und IS$'$ an, $\boldsymbol{a}$ und t_0 eine konstante räumliche und zeitliche Verschiebung, und α^i_k eine relative Drehung der Koordinatenachsen. Die Matrix $\alpha = (\alpha^i_k)$ ist durch die Bedingung

$$\alpha^{i}_{n}\left(\alpha^{\mathrm{T}}\right)^{n}_{k} = \delta^{i}_{k} \quad \text{oder} \quad \alpha\,\alpha^{\mathrm{T}} = 1 \tag{3.3}$$

eingeschränkt. Die inverse Matrix ist gleich der transponierten, $\alpha^{-1} = \alpha^{\mathrm{T}}$; eine solche Matrix heißt orthogonal. Die Bedingung $\alpha\,\alpha^{\mathrm{T}} = 1$ garantiert die Invarianz des Wegelements $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Die durch α beschriebene Drehung lässt sich durch drei Eulerwinkel festlegen. Insgesamt stellen (3.1) und (3.2) eine 10-parametrige Gruppe von Transformationen dar (Galileigruppe).

Im Folgenden sehen wir von relativen Verschiebungen und Drehungen ab und legen die Relativgeschwindigkeit in x-Richtung. Dann erhalten wir die spezielle Galileitransformation für die in Abbildung 3.1 gezeigten Inertialsysteme:

$$x' = x - v\,t\,, \qquad t' = t \tag{3.4}$$

In der Formulierung von Galilei gilt das Relativitätsprinzip insbesondere für die Mechanik: Die Transformationen (3.1, 3.2) ändern nicht die Form der Newtonschen Bewegungsgleichungen; diese Gleichungen sind also kovariant. Die Maxwellgleichungen sind dagegen nicht kovariant unter Galileitransformationen, denn sie implizieren die feste Geschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$ für eine Wellenfront. Maxwell selbst betrachtete sie daher als nichtrelativistisch; sie sollten nur gültig sein in dem speziellen IS, das relativ zum tragenden Medium (wie etwa Luft für Schallwellen) ruht. Überraschenderweise stellten Michelson und Morley 1887 experimentell fest, dass Licht sich in verschiedenen IS mit derselben Geschwindigkeit c ausbreitet. Daher postulierte Einstein ein neues, modifiziertes Relativitätsprinzip: Die physikalischen Gesetze *inklusive* der Maxwellgleichungen gelten in allen IS. Dieses *Einsteinsche Relativitätsprinzip* erfordert eine andere Transformation zwischen den IS;

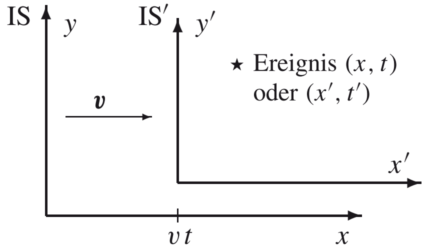

Abbildung 3.1 Ein bestimmtes Ereignis (⋆) habe die Koordinaten x, t im Inertialsystem IS. Welche Koordinaten x', t' hat dasselbe Ereignis dann in IS′, das sich relativ zu IS mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegt?

die Galileitransformation wird durch die *Lorentztransformation* ersetzt. Dies impliziert dann auch andere mechanische Gesetze. Im Folgenden bestimmen wir diese Lorentztransformationen.

Mit den Minkowskikoordinaten

$$x^0 = ct\,, \qquad x^1 = x\,, \qquad x^2 = y\,, \qquad x^3 = z \tag{3.5}$$

führen wir die Komponenten x^α eines Vektors in einem abstrakten 4-dimensionalen Raum ein. Wir werden Vierervektoren selbst (etwa $\boldsymbol{r} = x^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$) nicht verwenden, sondern lediglich ihre Darstellung durch die Komponenten x^α. Konkrete Rechnungen werden ohnehin in einem Bezugssystem und damit für die Größen x^α ausgeführt. In einer verkürzenden Sprechweise wird x^α selbst im Folgenden als Vektor (oder 4-Vektor) bezeichnet, anstelle von „Komponenten eines Vierervektors“.

In dem betrachteten IS sind die Koordinaten x, y und z gleich den physikalischen Abständen, die der Raumpunkt relativ zu den Koordinatenebenen hat; diese Abstände werden mit ruhenden Maßstäben vermessen. Die Koordinate t ist die Zeit, die in IS ruhende Uhren anzeigen.

Wir betrachten ein bestimmtes Ereignis mit den Koordinaten x^α in IS und x'^α in IS′. Der Zusammenhang zwischen diesen Koordinaten wird nach Galilei durch (3.1, 3.2) und nach Einstein durch eine Lorentztransformation (LT) gegeben. Die Homogenität von Raum und Zeit bedingt, dass die Transformation zwischen x^α und x'^α in jedem Fall *linear* ist:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta\, x^\beta + a^\alpha \tag{3.6}$$

Hierbei steht a^α für eine räumliche und zeitliche Translation. Die relative Drehung und Bewegung werden durch die 4×4 Matrix $\Lambda = (\Lambda^\alpha_\beta)$ beschrieben. Die Homogenität von Raum und Zeit impliziert zum Beispiel, dass die Transformation der Geschwindigkeit eines Teilchens nicht von dem Raum-Zeit-Punkt abhängen kann, an dem sich das Teilchen gerade befindet. Dies ist genau dann gewährleistet, wenn die Koeffizienten Λ^α_β nicht von x^α abhängen, also wenn die Transformation linear ist.

Im Folgenden betrachten wir (3.6) als Ansatz für die gesuchten Lorentztransformationen. Wir bestimmen die Λ^α_β so, dass sich das Quadrat des Wegelements

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = c^2 dt^2 - d\boldsymbol{r}^2 \tag{3.7}$$

bei der Transformation (3.6) nicht ändert. Dabei ist $\eta_{\alpha\beta}$ durch

$$\big(\eta_{\alpha\beta}\big) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

definiert. Der vierdimensionale Raum mit dem Wegelement (3.7) heißt *Minkowski-raum*.

Wir beziehen uns auf die spezielle, in Abbildung 3.1 gezeigte Anordnung und erläutern hierfür den Unterschied zwischen Galilei- und Lorentztransformation. Für beide Transformationen gilt $y' = y$ und $z' = z$; in Frage steht nur die Beziehung zwischen (x, t) und (x', t'). Wir betrachten eine Lichtwellenfront, die sich in IS$'$ mit der Geschwindigkeit $c = dx'/dt'$ bewegt. Die Geschwindigkeit in IS hängt dann davon ab, ob man die Galilei- oder die Lorentztransformation verwendet:

$$\frac{dx'}{dt'} = c \qquad \xrightarrow[\text{Galileitransformation}]{x' = x - vt,\;\; t' = t} \qquad \frac{dx}{dt} = c + v \tag{3.9}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = c \qquad \xrightarrow[\text{Lorentztransformation}]{c^2dt'^2 - dx'^2 = c^2dt^2 - dx^2} \qquad \frac{dx}{dt} = c \tag{3.10}$$

Das Michelsonexperiment zeigt, dass die Geschwindigkeit von Licht in jedem IS gleich c ist. Damit scheidet die Galileitransformation aus. Der Michelsonversuch verifiziert die Invarianz von ds^2 speziell für $ds^2 = 0$. Andere Experimente (etwa die Messung von ds^2 für ein materielles Teilchen) bestätigen die Invarianz von ds^2 auch für $ds^2 \neq 0$.

Transformationsmatrix der LT

Wir bestimmen jetzt die Transformationsmatrix $\Lambda^{\alpha}_{\ \beta}$ in (3.6). Dazu setzen wir (3.6) in die Invarianzbedingung $ds'^2 = ds^2$ ein:

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha}\, dx'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\alpha}_{\ \gamma}\, \Lambda^{\beta}_{\ \delta}\, dx^{\gamma}\, dx^{\delta} \stackrel{!}{=} \eta_{\gamma\delta}\, dx^{\gamma}\, dx^{\delta} \tag{3.11}$$

Hieraus folgt

$$\Lambda^{\alpha}_{\ \gamma}\, \Lambda^{\beta}_{\ \delta}\, \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta} \quad \text{oder} \quad \Lambda^{\mathrm{T}} \eta\, \Lambda = \eta \tag{3.12}$$

Dies ist mit (3.3) zu vergleichen; ebenso wie dort haben wir auch die zugehörige Matrixschreibweise angegeben. Die Translationen a^{α} spielen in (3.11) keine Rolle, da sie in den Differenzialen

$$dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\ \beta}\, dx^{\beta} \tag{3.13}$$

wegfallen. Die Rotationen sind als Spezialfall

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\ \beta}\, x^{\beta} \quad \text{mit} \quad \Lambda^{i}_{\ k} = \alpha^{i}_{\ k}, \quad \Lambda^{0}_{\ 0} = 1 \quad \text{und} \quad \Lambda^{i}_{\ 0} = \Lambda^{0}_{\ i} = 0 \tag{3.14}$$

in Λ enthalten. Hierbei haben die α^i_k die gleiche Bedeutung wie in (3.1). Die volle Gruppe der Lorentztransformationen heißt Poincaré-Gruppe; sie enthält wie die Galileigruppe 10 Parameter. Die Translationen und Rotationen bilden eine Untergruppe sowohl der Galileigruppe wie der Poincaré-Gruppe. Durch die Festlegungen $\det\alpha = 1$ und $\det\Lambda = 1$ schließen wir räumliche und zeitliche Spiegelungen aus (obwohl sie das Wegelement invariant lassen).

Im Folgenden betrachten wir keine Translationen und Rotationen, da sich die Galilei- und Lorentztransformationen bezüglich dieser Untergruppe (mit 7 Parametern) nicht unterscheiden. Wir nehmen also $a^\alpha = 0$ und $\alpha^i_k = \delta^i_k$ an und beschränken uns auf die Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ zwischen IS und IS$'$ (3 Parameter).

Für die spezielle Lorentztransformation von Abbildung 3.1 ist Λ wegen $x^2 = x'^2$ und $x^3 = x'^3$ von der Form

$$\Lambda = (\Lambda^\alpha_{\ \beta}) = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} & 0 & 0 \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Wir schreiben (3.12) im x^0-x^1–Unterraum an:

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 0} \\ \Lambda^0_{\ 1} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Ausmultipliziert sind dies vier Bedingungen, von denen aber zwei gleich sind. Die drei verbleibenden Bedingungen lauten

$$\left(\Lambda^0_{\ 0}\right)^2 - \left(\Lambda^1_{\ 0}\right)^2 = 1\,, \quad -\left(\Lambda^1_{\ 1}\right)^2 + \left(\Lambda^0_{\ 1}\right)^2 = -1\,, \quad \Lambda^0_{\ 0}\,\Lambda^0_{\ 1} - \Lambda^1_{\ 0}\,\Lambda^1_{\ 1} = 0 \tag{3.17}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $\Lambda^1_{\ 0} = -\sinh\psi$ und $\Lambda^0_{\ 1} = -\sinh\phi$ gesetzt werden. Dann folgt $\Lambda^0_{\ 0} = \pm\cosh\psi$ und $\Lambda^1_{\ 1} = \pm\cosh\phi$. Wir schließen Spiegelungen aus und beschränken uns daher auf das positive Vorzeichen. Aus der letzten Bedingung in (3.17) folgt $\phi = \psi$, also

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Für den Ursprung von IS$'$ gilt (siehe Abbildung 3.1)

$$x'^1 = 0 = \Lambda^1_{\ 0}\,c\,t + \Lambda^1_{\ 1}\,v\,t \tag{3.19}$$

Hieraus folgt

$$\tanh\psi = -\frac{\Lambda^1_{\ 0}}{\Lambda^1_{\ 1}} = \frac{v}{c} \tag{3.20}$$

Die Lorentztransformation ist nun durch (3.15), (3.18) und (3.20) festgelegt. Als Funktion der Geschwindigkeit v lauten die Matrixelemente

$$\Lambda^0_{\ 0} = \Lambda^1_{\ 1} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \qquad \Lambda^0_{\ 1} = \Lambda^1_{\ 0} = \frac{-v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.21}$$

Die betrachtete spezielle Lorentztransformation lässt sich damit als

$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \quad ct' = \frac{ct - xv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \tag{3.22}$$

schreiben. Diese Transformation ist nur für $v < c$ definiert. Tatsächlich lassen sich auch nur Inertialsysteme realisieren, die sich relativ zueinander mit $v < c$ bewegen; dies folgt aus den Bewegungsgleichungen von Kapitel 4. Für $v/c \ll 1$ wird (3.22) zur speziellen Galileitransformation

$$x' = x - vt\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z\,, \qquad t' = t \tag{3.23}$$

Die Verallgemeinerung von (3.21) für eine beliebige Richtung der Geschwindigkeit lautet:

$$\Lambda^0_{\ 0} = \gamma\,, \qquad \Lambda^0_{\ j} = \Lambda^j_{\ 0} = -\gamma\, v^j/c\,, \qquad \Lambda^i_{\ j} = \delta^i_j + (\gamma - 1)\,\frac{v^i\, v^j}{\boldsymbol{v}^2} \tag{3.24}$$

In diesem Fall (ohne Drehungen) ist die Matrix Λ symmetrisch, $\Lambda^{\mathrm{T}} = \Lambda$. Auf der rechten Seite sind die Geschwindigkeitskomponenten $(v^1, v^2, v^3) = (v_x, v_y, v_z)$ einzusetzen. Die Umkehrtransformation erhält man durch die Ersetzung $\boldsymbol{v} \to -\boldsymbol{v}$.

Additionstheorem

Die in (3.20) definierte Größe

$$\boxed{\psi = \operatorname{artanh} \frac{v}{c} \qquad \text{Rapidität}} \tag{3.25}$$

heißt *Rapidität*. Der Zusammenhang zwischen der Rapidität ψ und der Geschwindigkeit v ist in Abbildung 3.2 gezeigt.

Die Nützlichkeit der Rapidität zeigt sich unter anderem bei der Addition von Geschwindigkeiten. So ergibt die Multiplikation von zwei Matrizen (3.18) mit ψ_1 und ψ_2 wieder eine Matrix dieser Form, und zwar mit

$$\boxed{\psi = \psi_1 + \psi_2 \qquad \begin{array}{c}\text{Addition paralleler}\\ \text{Geschwindigkeiten}\end{array}} \tag{3.26}$$