Vahlens Übungsbücher der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften

Übungsbuch Beschaffung, Produktion und Logistik

Aufgaben, Lösungen und Implementierung in Excel

von
Prof. Dr. Dr. h.c. Hans-Ulrich Küpper, Prof. Dr. Christian Hofmann, Prof. Dr. Michael Gutiérrez

5., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

Verlag Franz Vahlen München 2015

Verlag Franz Vahlen im Internet:
www.vahlen.de
ISBN 978 3 8006 4702 6

Zu Inhaltsverzeichnis

Da ein Engpass vorliegt (gesamte Kapazitätsbelastung 1.100 Stunden), sind die relativen Deckungsbeiträge zu bestimmen:

Produkt	Preis	variable Kosten	absoluter DB	Produktions-koeffizient	relativer DB	Rang
A	80	60	20	3	6,67	3
B	60	40	20	2	10	2
C	90	80	10	2	5	4
D	100	82	18	1,5	12	1

Produktionsmengen:

Produkt	max. Absatz	Produktions-menge	Produktions-koeffizient	Kapazitätsbelastung
D	200	200	1,5	300
B	100	100	2	200
A	100	33,3	3	100
				$\sum = 600$

Der Zusatzauftrag für Produkt D wird in vollem Umfang angenommen, dafür wird die Produktionsmenge von Produkt A reduziert. Diese Umstellung erhöht den Gesamtdeckungsbeitrag, da Produkt A einen geringeren relativen Deckungsbeitrag aufweist, d. h. pro Einheit der begrenzten Kapazität einen geringeren Deckungsbeitrag erzielt. Der Gesamtdeckungsbeitrag ist: $DB = 6.266$.

Lösung 3.1.2: Programmplanung bei mehreren Beschränkungen

a) Formulierung des linearen Programms

Zielfunktion:

$$Max\ F(x_1, x_2) = 2x_1 + 1{,}4x_2$$

Nebenbedingungen:

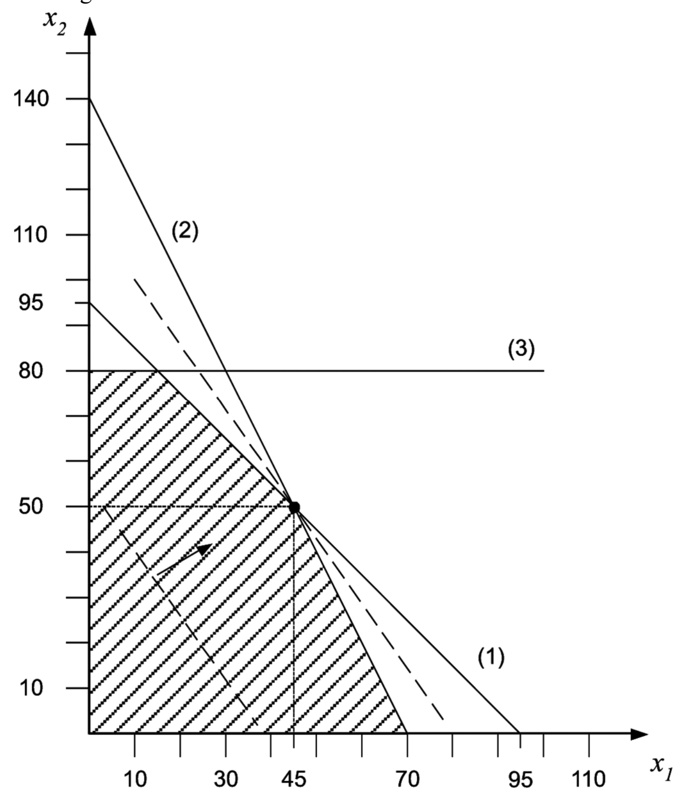
$$2x_1 + 2x_2 \leq 190 \quad (1)$$

$$3x_1 + 1{,}5x_2 \leq 210 \quad (2)$$

$$2{,}5x_2 \leq 200 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

b) Grafische Lösung



c) Grundlegende Annahmen

- Die Zielfunktion ist linear, d. h. die Preise sind konstant und es liegt eine linear limitationale Produktionsfunktion vor (lineare Kostenfunktion). Es exstieren keinerlei Zielinterdependenzen.
- Die Nebenbedingungen sind ebenfalls linear. Es liegen lediglich Mittelinterdependenzen vor.

Lösung 3.1.3: Programmplanung bei mehreren Kapazitätsengpässen

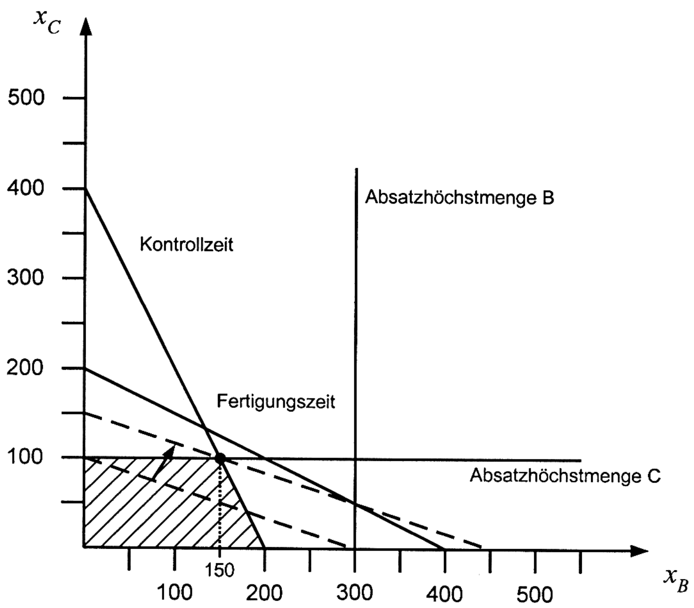
a) Optimales Produktionsprogramm

	relativer DB [€/Stück]	Rang	Produktionsmenge [Stück]	Kapazitätsbelastung
A	$(50-20)/0{,}5=60$	2	200	100
B	$(90-40)/1=50$	3	200	200
C	$(200-50)/2=75$	1	100	200
				$\sum=500$

b) Optimales Produktionsprogramm mit Endkontrolle

Produkt A wird weiter voll produziert, da es ja bereits nach Teilaufgabe a) bis zur Höchstmenge hergestellt wird und keine Kontrollzeit benötigt. Damit bleibt eine Fertigungszeit von $500-(200 \cdot 0{,}5)=400$ Stunden auf B und C zu verteilen.

Die Deckungsbeitragsfunktion für beide Produkte ist: $DB = 50 \cdot x_b + 150 \cdot x_c$.



Es sollten somit 200 Stück von Produkt A, 150 Stück von Produkt B und 100 Stück von Produkt C produziert werden.

Lösung 3.1.4: Standplanung eines Messeausstellers

a) Entscheidungsmodell

Entscheidungsvariablen:

x_1 : die für Drucker reservierte Fläche $[m^2]$

x_2 : die für Scanner reservierte Fläche $[m^2]$

Zielfunktion:

$$\text{Max } F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

Nebenbedingungen:

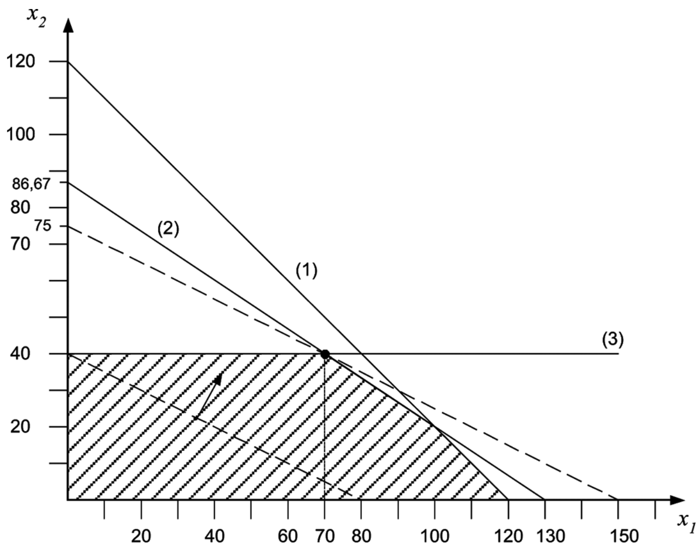
$$x_1 + x_2 \leq 120 \qquad (1)$$

$$6x_1 + 9x_2 \leq 780 \qquad (2)$$

$$x_2 \leq 40 \qquad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

b) Grafische Bestimmung der optimalen Lösung



c) Simplex-Algorithmus

Endtableau nach zwei Iterationen (primaler Simplex-Algorithmus):

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	0	1	–1/6	1/2	10
x_1	1	0	0	1/6	–3/2	70
x_2	0	1	0	0	1	40
F	0	0	0	1/6	1/2	150

Es ist optimal, 70 m^2 für Drucker und 40 m^2 für Scanner zu reservieren. Der maximale Deckungsbeitrag beträgt 150.000 €.

Lösung 3.1.5: Programmplanung einer Brauerei

a) Anwendung der linearen Programmierung

- Wenn im Produktionsbereich mehrere Engpässe vorliegen, kann die lineare Programmierung zur Bestimmung des optimalen Produktionsprogramms angewandt werden.
- Prämissen:

  – Prozessparameter vorgegeben (Lose, Reihenfolgen, ...)

  – gegebene und konstante Kapazitäten (keine Anpassungsformen)

  – gegebene und konstante Produktionskoeffizienten

  – gegebene und konstante Absatzpreise (horizontale Preis-Absatz-Funktion)

  – gegebene und konstante stückvariable Kosten (konstante Stückdeckungsbeiträge)

b) Gleichungssystem

Zielfunktion:

$$\text{Max } G(x_1, x_2) = 300x_1 + 500x_2 - 36.000$$

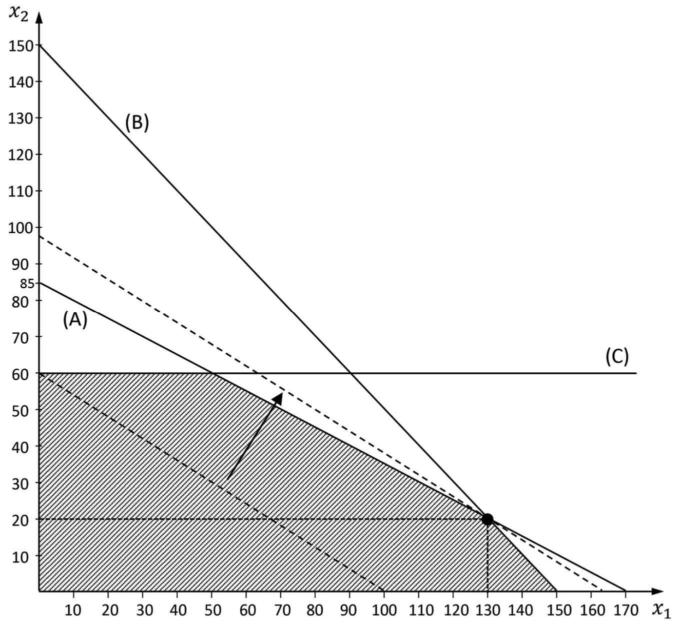
Die Fixkosten sind nicht entscheidungsrelevant. Für die Bestimmung des optimalen Produktionsprogramms kann daher folgende Zielfunktion zugrunde gelegt werden:

$$\text{Max } F(x_1, x_2) = 300x_1 + 500x_2$$

Nebenbedingungen:

$$x_1 + 2x_2 \le 170 \quad \text{(A)}$$
$$x_1 + x_2 \le 150 \quad \text{(B)}$$
$$3x_2 \le 180 \quad \text{(C)}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

c) Grafische Lösung



d) Simplex-Methode

Endtableau nach drei Iterationen (primaler Simplex-Algorithmus):

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	–1	2	0	130
x_5	0	0	–3	3	1	120
x_2	0	1	1	–1	0	20
F	0	0	200	100	0	49.000

Der optimale Gewinn beträgt 49.000 € – 36.000 € = 13.000 €.

Lösung 3.1.6: Programmplanung bei mehrstufigem Produktionsprozess

a) Lineares Programm und Simplex-Algorithmus

Zielfunktion:

$$\text{Max } F(x_1, x_2, x_3) = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad &\leq 110 \quad \text{(Bohrerei)} \\ x_2 + 3x_3 &\leq 90 \quad \text{(Lackiererei)} \\ x_1 + \qquad 2x_3 &\leq 80 \quad \text{(Montagewerkstatt)} \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Endtableau nach zwei Iterationen (primaler Simplex-Algorithmus):

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_2	0	1	–2/3	1/3	0	–1/3	10
x_5	0	0	11/3	–1/3	1	1/3	80
x_1	1	0	2	0	0	1	80
F	0	0	80	10	0	50	5.100

b) Auslastung der Werkstätten

Die Werte der Schlupfvariablen betragen $x_4^* = 0$, $x_5^* = 80$ und $x_6^* = 0$. Damit sind die Bohrerei und die Montage voll ausgelastet, die Lackiererei hat eine freie Kapazität in Höhe von 80 Stunden je Woche.

c) Preisobergrenze für Kapazitätserweiterung

Aus der Zielfunktionszeile des Endtableaus entnehmen wir für die Bohrerei einen Schattenpreis von 10 €. Bei Erhöhung der Kapazität der Bohrerei um eine Stunde je Woche steigt der Gesamtdeckungsbeitrag um 10 € abzüglich der zusätzlichen Kosten für die Kapazitätserweiterung. Für eine zusätzliche Stunde Arbeitszeit in der Bohrerei zahlt die Unternehmensleitung daher höchstens 10 €.

Für die Lackiererei ist der Schattenpreis 0 €. Da die Lackiererei nicht vollständig ausgelastet ist, kann eine Kapazitätserweiterung ökonomisch nicht sinnvoll sein.

Bei dem Montageprozess schließlich ist der Schattenpreis 50 €. Eine Erhöhung der Wochenarbeitszeit um eine Stunde steigert den Gesamtdeckungsbeitrag um 50 € abzüglich der zusätzlichen Kosten für die Kapazitätserweiterung. Die Unternehmensleitung ist daher nur bereit, maximal 50 € für eine zusätzliche Stunde Arbeitszeit in der Montagewerkstatt zu zahlen.

Lösung 3.1.7: Lineare Programmierung

a) Simplex-Algorithmus

Endtableau nach zwei Iterationen (primaler Simplex-Algorithmus):

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	0	1	–3/2	–5/4	2
x_2	0	1	0	1/4	1/8	1
x_1	1	0	0	1/2	3/4	6
F	0	0	0	30	40	320

b) Auslastung der Nebenbedingungen

Die Nebenbedingungen 2 und 3 sind vollkommen ausgeschöpft; die Nebenbedingung 1 weist dagegen einen Schlupf in Höhe von 2 auf.

c) Vergrößerung von x_4

Eine Vergrößerung von x_4 um eine Einheit bewirkt eine Verringerung von F um 30 € sowie eine Verringerung der Mengen x_1 um 1/2 Einheit und x_2 um 1/4 Einheit.

d) Vergrößerung von x_5

Eine Vergrößerung von x_5 um eine Einheit bewirkt eine Verringerung von F um 40 € sowie eine Verringerung der Mengen x_1 um 3/4 Einheiten und x_2 um 1/8 Einheit.

e) Vergrößerung von x_2

Eine Vergrößerung von x_2 um eine Einheit kann nicht durchgeführt werden, da für $x_2 = 2$ keine Konstellation denkbar ist, bei der die Nebenbedingungen 1 und 2 gleichzeitig erfüllt sind.

**Lösung 3.1.8: Produktionsprogrammplanung*

a) Optimale Lösung

Endtableau nach einer Iteration mit dem dualen und einer Iteration mit dem primalen Simplex-Algorithmus:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	3/2	0	1	–1/2	0	40
x_5	–1/2	0	0	1/2	1	40
x_2	1/2	1	0	1/2	0	60
F	1	0	0	2	0	240

b.1) Kapazität Maschine 1

Bei Maschine 1 sind 40 Kapazitätseinheiten ungenutzt ($x_3^* = 40$). Die Kapazität von Maschine 1 darf daher maximal bis auf 100 – 40 = 60 absinken, ohne dass sich die optimale Lösung verändert.

b.2) Kapazität Maschine 2

Maschine 2 ist voll ausgelastet ($x_4^* = 0$). Bei einem Absinken der Kapazität ändert sich daher die optimale Lösung.

b.3) Mindestproduktionsmenge

Wegen $x_5^* = 40$ könnte die geforderte Mindestproduktions- und Absatzmenge bis auf 20 + 40 = 60 ansteigen, ohne dass sich die optimale Lösung verändert. *m* darf also maximal den Wert 60 annehmen.

b.4) Kapazitätserweiterung

Erhöht man die Kapazität von Maschine 1 um eine Einheit, so steigt *F* um null Einheiten, da der Schattenpreis von Maschine 1 gleich null ist. Die Kapazitätserhöhung lohnt sich daher nicht. Erhöht man die Kapazität von Maschine 2 um eine Einheit, so steigt *F* um 2 Einheiten, da der Schattenpreis von Maschine 2 den Wert 2 hat. Die Kapazitätserhöhung lohnt sich, falls die zusätzlichen Kosten der Erweiterung um eine Kapazitätseinheit weniger als 2 Geldeinheiten betragen.

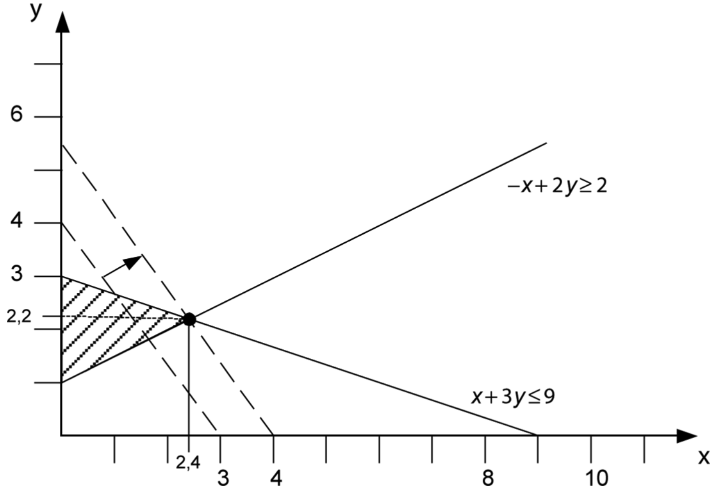
c) Relative Deckungsbeitragsrechnung

Produkt	Stück-Deckungs-beitrag	Produktions-koeffizient Maschine 1	Produktions-koeffizient Maschine 2	Engpass-bezogener DB Maschine 1	Engpass-bezogener DB Maschine 2	Rang
1	1	2	1	1/2	1	2
2	4	1	2	4	2	1

Die engpassbezogenen Deckungsbeiträge führen in Bezug auf beide Maschinen zur gleichen Rangfolge der Produkte 1 und 2. Daher wird nur Produkt 2 hergestellt. Die Betrachtung der Nebenbedingungen für Maschine 1 und 2 liefert $x_2^* = 60$ (Nebenbedingung Maschine 2 bindend). Mit $x_2^* = 60$ ist auch die dritte Nebenbedingung eingehalten.

*Lösung 3.1.9: Lineare Programmierung

a) Grafische Lösung



b) Dualer Simplex-Algorithmus

Endtableau nach einer Iteration mit dem dualen und einer Iteration mit dem primalen Simplex-Algorithmus:

BV	x	y	z_1	z_2	b_i
x	1	0	2/5	3/5	12/5
y	0	1	1/5	–1/5	11/5
F	0	0	11/5	9/5	81/5

**Lösung 3.1.10: Operative Programmplanung*

a) Entscheidungsmodell

Entscheidungsvariable:

x_i : Produzierte und abgesetzte Menge von Produkt i

Herleitung der Zielfunktionskoeffizienten:

$$d_1 = 500 - 300 = 200$$
$$G = d_1 \cdot x_1 + d_2 \cdot x_2 - K_f$$
$$0 = 200 \cdot 30 + d_2 \cdot 40 - 10.000 \Rightarrow d_2 = 100$$

Zielfunktion:

$$Max\ G(x_1, x_2) = 200 x_1 + 100 x_2 - 10.000$$

Die Fixkosten sind nicht entscheidungsrelevant. Für die Bestimmung des optimalen Produktionsprogramms kann daher folgende Zielfunktion zugrunde gelegt werden:

$$Max\ F(x_1, x_2) = 200 x_1 + 100 x_2$$

Nebenbedingungen:

$x_1 + 2x_2 \leq 120$	Fertigungsmaschine	(1)
$x_1 + x_2 \leq 80$	Filteranlage	(2)
$x_1 \leq 60$	Absatzobergrenze	(3)
$x_1 + x_2 \geq 70$	Mindestproduktions- und Absatzmenge	(4)
$x_1, x_2 \geq 0$		