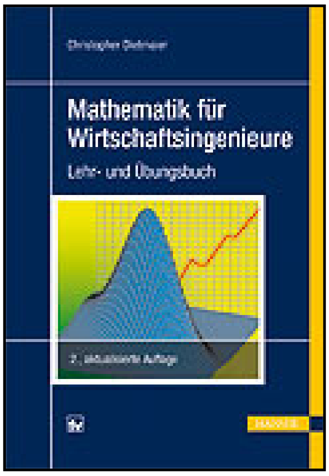
Mathematik für Wirtschaftsingenieure

Lehr- und Übungsbuch

Bearbeitet von
Prof. Dr. Christopher Dietmaier

2., aktualisierte Auflage 2013. Buch. 600 S. Gebunden
ISBN 978 3 446 43801 9
Format (B x L): 17,7 x 240,6 cm
Gewicht: 1228 g



Leseprobe

Christopher Dietmaier

Mathematik für Wirtschaftsingenieure

Lehr- und Übungsbuch

ISBN (Buch): 978-3-446-43801-9

ISBN (E-Book): 978-3-446-43832-3

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43801-9

sowie im Buchhandel.

16 Lineare Optimierung

Einführungsbeispiel 16.1 Optimales Produktionsprogramm

Ein mittelständisches Unternehmen produziert zwei Artikel (Artikel A_1 und Artikel A_2). Der Artikel A_1 benötigt je Mengeneinheit eine Herstellungszeit von 0,5 Stunden auf Maschine M_1, zwei Stunden auf Maschine M_2 und 1,5 Stunden auf Maschine M_3. Der Artikel A_2 benötigt je Mengeneinheit eine Herstellungszeit von zwei Stunden auf Maschine M_1, drei Stunden auf Maschine M_2 und 0,5 Stunden auf Maschine M_3. Die Maschine M_1 steht täglich 12 Stunden, die Maschine M_2 23 Stunden und die Maschine M_3 12 Stunden zur Verfügung. Mit einer Mengeneinheit von Artikel A_1 erzielt man einen Gewinn von 2000 €, mit einer Mengeneinheit von Artikel A_2 einen Gewinn von 4000 €. Es werden täglich x_1 Mengeneinheiten von Artikel A_1 und x_2 Mengeneinheiten von Artikel A_2 produziert. Es stellt sich die Frage, wie x_1 und x_2 gewählt werden müssen, damit der Gewinn maximal wird.

16.1 Grafische Lösung und Simplex-Algorithmus

In vielen Fällen führt die Suche nach der optimalen Lösung einer Problemstellung auf die Suche nach dem Maximum oder Minimum einer bestimmten Größe, z.B. zur

- Maximierung des Gewinns
- Minimierung von Kosten

Die Größe, die maximiert oder minimiert werden soll, hängt i.d.R. von mehreren anderen Größen ab, die variiert werden können, um ein Optimum (Maximum oder Minimum) zu erhalten. Die mathematische Aufgabenstellung ist die Bestimmung des Extremums einer Funktion von mehreren Variablen. Die Größen, die variiert werden können (Variablen), dürfen i.d.R. jedoch nicht beliebig variiert werden, sondern müssen bestimmten Nebenbedingungen genügen. Sind die Nebenbedingungen und die zu maximierende bzw. minimierende Funktion linear in den Variablen, so spricht man von ***linearer Optimierung***. Für lineare Optimierung wird im Folgenden häufig die Kurzschreibweise ***LO*** verwendet. Beim Einführungsbeispiel 16.1 ist dies der Fall.

Die Suche nach dem optimalen Produktionsprogramm ist ein typisches Beispiel für lineare Optimierung. Anhand dieses Beispiels soll die Problemstellung und Lösung dargestellt werden.

Die Angaben im Einführungsbeispiel 16.1 führen zu folgenden Größen und Beziehungen:

Gewinn an einem Tag:	$G = x_1\,2000\,€ + x_2\,4000\,€$
	$= (x_1 + 2x_2)\,2000\,€$
Tägl. Einsatzzeit der Maschine M_1:	$t_1 = x_1\,0{,}5\text{h} + x_2\,2\text{h} \leq 12\text{h}$
Tägl. Einsatzzeit der Maschine M_2:	$t_2 = x_1\,2\text{h} + x_2\,3\text{h} \leq 23\text{h}$
Tägl. Einsatzzeit der Maschine M_3:	$t_3 = x_1\,1{,}5\text{h} + x_2\,0{,}5\text{h} \leq 12\text{h}$

Die mathematische Problemstellung lautet (Um ganze Zahlen zu erhalten, wurden zwei Ungleichungen mit der Zahl 2 multipliziert.):

Gesucht ist das Maximum der Funktion $Z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 23 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dieses Problem hat die Form eines LO-Problems in der Standard- oder Grundform.

Grundform eines LO-Problems

Maximiere die Funktion

$$Z(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \tag{16.1}$$

unter den m Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \tag{16.2}$$

$$x_1, \ldots, x_n \geq 0 \tag{16.3}$$

Die Funktion $Z(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ heißt ***Zielfunktion***.
Die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ werden ***Strukturvariablen*** genannt.
Die Zahlen $b_1, \ldots, b_m$ heißen ***Restriktionswerte*** oder ***Primalwerte***.
Die Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ nennt man ***Zielfunktionskoeffizienten*** oder ***Dualwerte***.
Die Zahlen a_{ij} heißen ***technische Koeffizienten***.

16.1.1 Grafische Lösung

Hat man nur zwei Variablen, so kann man die Lösung eines LO-Problems grafisch ermitteln. Dies soll anhand des Einführungsbeispiels 16.1 geschehen.

Gesucht ist das Maximum der Funktion $Z(x_1,x_2)=x_1+2x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1+4x_2\le 24$$
$$2x_1+3x_2\le 23$$
$$3x_1+x_2\le 24$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

Die Nebenbedingungen können folgendermaßen formuliert werden:

$$x_2\le -\frac{1}{4}x_1+6$$
$$x_2\le -\frac{2}{3}x_1+\frac{23}{3}$$
$$x_2\le -3x_1+24$$
$$x_1\ge 0$$
$$x_2\ge 0$$

Die Menge der Punkte (x_1,x_2) in einem kartesischen Koordinatensystem, für welche diese fünf Nebenbedingungen erfüllt sind, wird eingegrenzt durch die fünf Geraden

$$g_1:\ x_2=-\frac{1}{4}x_1+6$$
$$g_2:\ x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{23}{3}$$
$$g_3:\ x_2=-3x_1+24$$
$$g_4:\ x_1=0$$
$$g_5:\ x_2=0$$

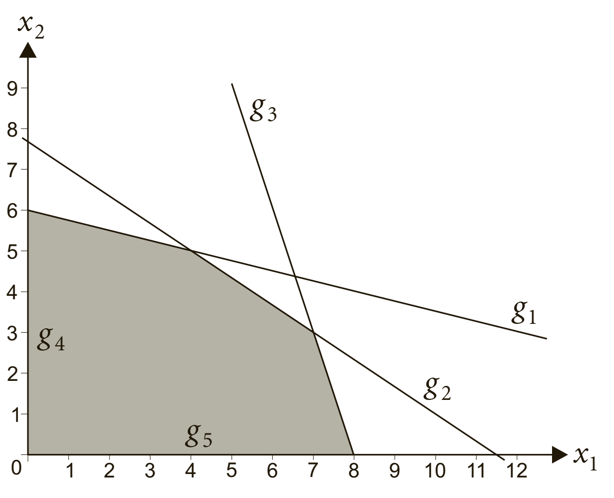


Bild 16.1

Diese in Bild 16.1 grau schattiert dargestellte Menge wird ***zulässiger Bereich*** genannt. Gesucht ist der Punkt im zulässigen Bereich, für den $Z = x_1 + 2x_2$ maximal wird. Für einen festen Wert von Z liegen die Punkte mit $Z = x_1 + 2x_2$ auf einer Geraden mit

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{Z}{2}$$

Die Steigung dieser Geraden ist $-\frac{1}{2}$. Sie schneidet die x_2-Achse bei dem x_2-Wert

$$x_2 = \frac{Z}{2}$$

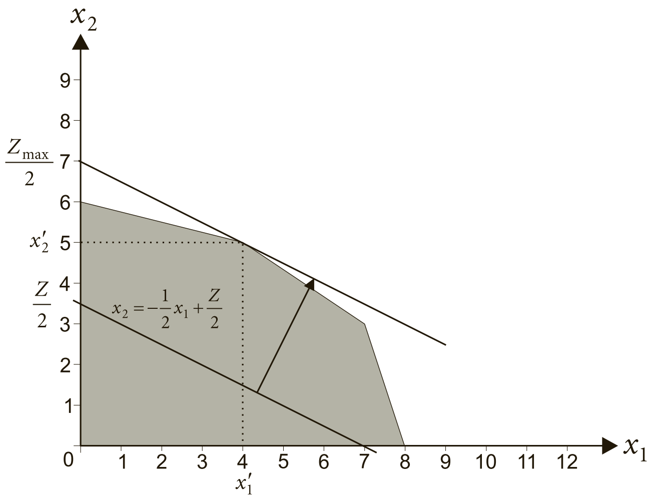


Bild 16.2

Durch Parallelverschiebung dieser Geraden (Beibehaltung der Steigung) nach oben vergrößern wir den Wert von Z. Dies tun wir so lange, bis gerade noch ein Punkt auf der Geraden im zulässigen Bereich liegt. Für diesen Punkt (x_1', x_2') beträgt der Wert der Zielfunktion

$$Z = x_1' + 2x_2' = Z_{\max}$$

Für jeden größeren Wert $Z > Z_{\max}$ liegen alle Punkte auf der Geraden

$$Z = x_1 + 2x_2$$

außerhalb des zulässigen Bereiches. Der Wert $Z_{\max}$ ist das gesuchte Maximum, die Werte x_1' und x_2' sind die gesuchten Werte von x und y, für welche die Zielfunktion maximal wird. In unserem Beispiel erhält man folgende Werte: $x_1' = 4$, $x_2' = 5$, $Z_{\max} = 14$.

16.1.2 Der Simplex-Algorithmus

Die Grundform eines LO-Problems lautet:

Maximiere die Funktion $Z(x_1,\ldots,x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ (16.4)

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned} \tag{16.5}$$

$$x_1,\ldots,x_n \ge 0 \tag{16.6}$$

Ein Punkt bzw. Element $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass die Zahlen $x_1,\ldots,x_n$ alle Nebenbedingungen (16.5) und (16.6) erfüllen, heißt ***zulässige Lösung*** des LO-Problems. Die Menge aller zulässigen Lösungen heißt ***zulässiger Bereich***. Bei zwei Variablen ist der zulässige Bereich ein Bereich im $\mathbb{R}^2$, der von Geraden eingegrenzt wird. Die Eckpunkte des zulässigen Bereiches sind Schnittpunkte zweier Geraden. Bei drei Variablen ist der zulässige Bereich ein Bereich im $\mathbb{R}^3$, der von Ebenen eingegrenzt wird. Die Eckpunkte des zulässigen Bereiches sind Schnittpunkte dreier Ebenen. Eine zulässige Lösung mit der Eigenschaft, dass es keine andere zulässige Lösung mit einem größeren Wert der Zielfunktion gibt, heißt die ***optimale Lösung*** des LO-Problems. Da die Ungleichung

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$$

äquivalent ist zu

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i - y_i \quad \text{mit} \quad y_i \ge 0$$

bzw. zu

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + y_i = b_i \quad \text{mit} \quad y_i \ge 0\,,$$

kann ein LO-Problem in der Grundform auch folgendermaßen formuliert werden:

Maximiere die Funktion $Z(x_1,\ldots,x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ (16.7)

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m &= b_m \end{aligned} \tag{16.8}$$

$$x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_m \ge 0 \tag{16.9}$$

Die Variablen $y_1,\ldots,y_m$ heißen ***Schlupfvariablen*** oder ***Leerlaufvariablen***. In dieser Formulierung lautet das LO-Problem des Einführungsbeispiels 16.1:

Maximiere die Funktion $Z(x_1,x_2)=x_1+2x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1+4x_2+y_1&=24\\ 2x_1+3x_2+y_2&=23\\ 3x_1+x_2+y_3&=24\\ x_1,x_2,y_1,y_2,y_3&\geq 0\end{aligned}$$

Auf jeder Geraden, die den zulässigen Bereich eingrenzt, ist eine Variable Null. An jedem Eckpunkt des zulässigen Bereiches (Schnittpunkt zweier Geraden) sind zwei Variablen Null.

Gerade	**Variable, die Null ist**
$x_1+4x_2=24$	y_1
$2x_1+3x_2=23$	y_2
$3x_1+x_2=24$	y_3
$x_1=0$	x_1
$x_2=0$	x_2

Eckpunkt	**Variablen, die Null sind**
$P_1=(0,0)$	x_1,x_2
$P_2=(0,6)$	x_1,y_1
$P_3=(4,5)$	y_1,y_2
$P_4=(7,3)$	y_2,y_3
$P_5=(8,0)$	y_3,x_2

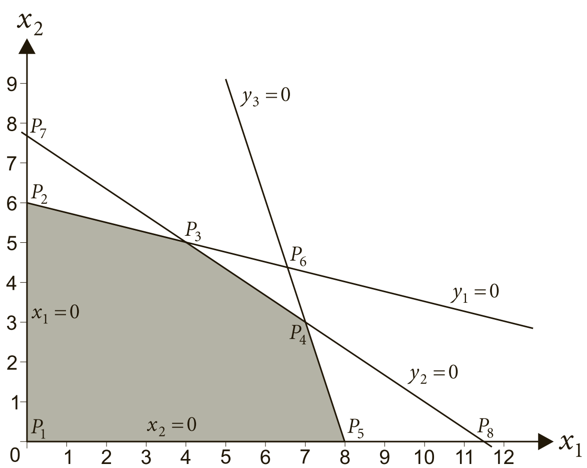


Bild 16.3

Nicht jeder Schnittpunkt ist Eckpunkt des zulässigen Bereiches. Die Punkte P_6,P_7,P_8 in Bild 16.3 gehören z.B. nicht zum zulässigen Bereich. Von den insgesamt zehn Schnittpunkten liegen fünf nicht im zulässigen Bereich. Diese Punkte sind dadurch gekennzeichnet, dass mindestens eine der drei Variablen, die nicht Null sind, einen negativen Wert hat.