Mathematik für Wirtschaftsingenieure

Lehr- und Übungsbuch

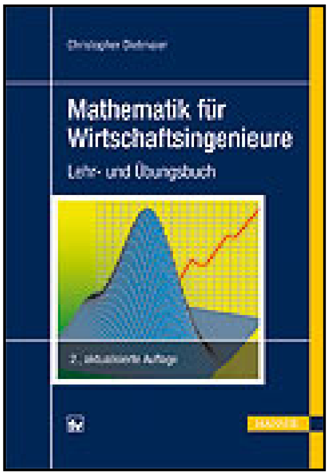
Bearbeitet von
Prof. Dr. Christopher Dietmaier

2., aktualisierte Auflage 2013. Buch. 600 S. Gebunden
ISBN 978 3 446 43801 9
Format (B x L): 17,7 x 240,6 cm
Gewicht: 1228 g

Wirtschaft > Wirtschaftswissenschaftliche Nachbardisziplinen > Statistik, Mathematik, Ökonometrie

Zu Inhaltsverzeichnis

HANSER



Leseprobe

Christopher Dietmaier

Mathematik für Wirtschaftsingenieure

Lehr- und Übungsbuch

ISBN (Buch): 978-3-446-43801-9

ISBN (E-Book): 978-3-446-43832-3

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43801-9

sowie im Buchhandel.

Ist $f(\vec{r})$ an der Stelle $\vec{r}_0$ zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt:

$f(\vec{r})$ hat an der Stelle $\vec{r}_0$ ein lokales Extremum $\Rightarrow \operatorname{grad} f(\vec{r}_0) = \vec{0}$

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{grad} f(\vec{r}_0) = \vec{0} \\ \text{und} \\ \det H_f(\vec{r}_0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\vec{r}) \text{ hat an der Stelle } \vec{r}_0 \text{ ein isoliertes Extremum} \tag{10.24}$$

Für ein isoliertes Extremum an der Stelle $\vec{r}_0$ gilt:

$$f_{xx}(\vec{r}_0) > 0 \Rightarrow f(\vec{r}) \text{ hat an der Stelle } \vec{r}_0 \text{ ein isoliertes Minimum} \tag{10.25}$$

$$f_{xx}(\vec{r}_0) < 0 \Rightarrow f(\vec{r}) \text{ hat an der Stelle } \vec{r}_0 \text{ ein isoliertes Maximum} \tag{10.26}$$

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{grad} f(\vec{r}_0) = \vec{0} \\ \text{und} \\ \det H_f(\vec{r}_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\vec{r}) \text{ hat an der Stelle } \vec{r}_0 \text{ kein lokales Extremum} \tag{10.27}$$

Bemerkungen:

1. Hat $f(\vec{r})$ an der Stelle $\vec{r}_0$ ein isoliertes Extremum, dann sind die Vorzeichen von $f_{xx}(\vec{r}_0)$ und $f_{yy}(\vec{r}_0)$ gleich. Deshalb genügt es, das Vorzeichen von $f_{xx}(\vec{r}_0)$ zu überprüfen.
2. Ist $\operatorname{grad} f(\vec{r}_0) = \vec{0}$ und hat die Funktion $f(\vec{r})$ an der Stelle $\vec{r}_0$ kein lokales Extremum, dann spricht man von einem ***Sattelpunkt*** an der Stelle $\vec{r}_0$.
3. Ist $\operatorname{grad} f(\vec{r}_0) = \vec{0}$ und $\det H_f(\vec{r}_0) = 0$, so ist keine allgemeine Aussage über die Existenz eines Extremums an der Stelle $\vec{r}_0$ möglich.

Beispiel 10.13 $f(x,y) = x^2 + y^2 + 10$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2x, 2y) = \vec{0}$ für $(x,y) = (0,0) = (x_0, y_0)$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = H_f(x_0, y_0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \det H_f(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\ f_{xx}(x_0,y_0) = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{isoliertes Minimum an der Stelle } (x_0,y_0) = (0,0)$$

Der Graph der Funktion ist in den Bildern 10.16 bis 10.20 dargestellt.

Beispiel 10.14 $f(x,y)=x^2-y^2$

$\operatorname{grad} f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y))=(2x,-2y)=(0,0)$ für $(x,y)=(0,0)=(x_0,y_0)$.

$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=H_f(x_0,y_0)\qquad \det H_f(x_0,y_0)=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-4<0$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $(x_0,y_0)=(0,0)$

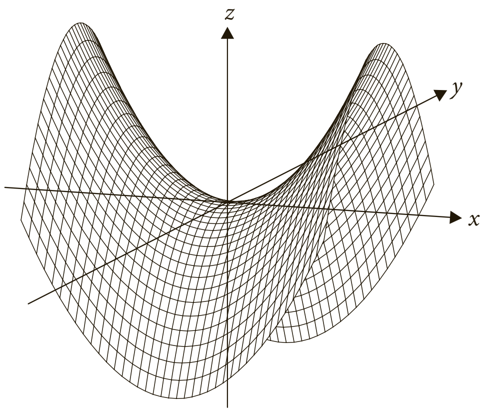


Bild 10.21

Beispiel 10.15 $f(x,y)=2x^3-3x^2-2y^3+3y^2$

$\operatorname{grad} f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y))=(6x^2-6x,-6y^2+6y)$

$6x^2-6x=6x(x-1)=0$ für $x=0$ oder $x=1$

$-6y^2+6y=-6y(y-1)=0$ für $y=0$ oder $y=1$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y)=(0,0)$ an den vier Stellen $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.

$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}12x-6 & 0\\ 0 & -12y+6\end{pmatrix}$

$\det H_f(0,0)=\begin{vmatrix}-6 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}=-36<0 \Rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $(0,0)$

$\left.\begin{array}{l}\det H_f(0,1)=\begin{vmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix}=36>0\\ f_{xx}(0,1)=-6<0\end{array}\right\}\Rightarrow$ isoliertes Maximum an der Stelle $(0,1)$

$\left.\begin{array}{l}\det H_f(1,0)=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}=36>0\\ f_{xx}(1,0)=6<0\end{array}\right\}\Rightarrow$ isoliertes Minimum an der Stelle $(1,0)$

$\det H_f(1,1)=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix}=-36<0 \Rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $(1,1)$

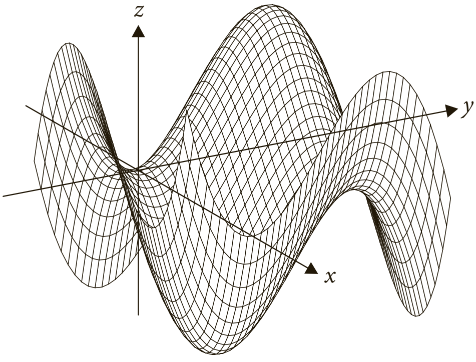


Bild 10.22

Für den Fall $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (0,0)$ und $\det H_f(x_0, y_0) = 0$ ist keine allgemeine Aussage möglich. Die nächsten drei Beispiele sollen dies demonstrieren.

Beispiel 10.16 $f(x,y) = x^4 + y^4$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (4x^3, 4y^3) = (0,0)$ für $(x,y) = (0,0) = (x_0, y_0)$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det H_f(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

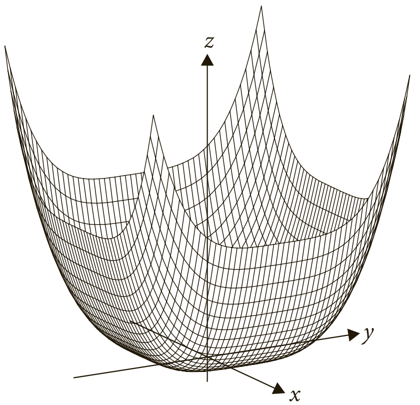


Bild 10.23

Die Funktion hat an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$ ein isoliertes Minimum.

Beispiel 10.17 $f(x,y) = x^4 - y^4$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (4x^3, -4y^3) = (0,0)$ für $(x,y) = (0,0) = (x_0, y_0)$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix} \quad H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det H_f(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

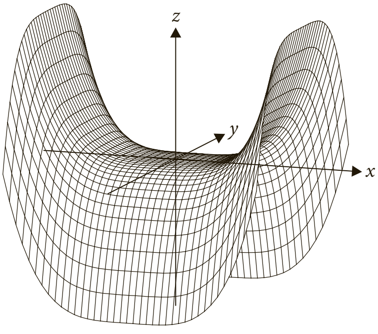


Bild 10.24

Die Funktion hat an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$ einen Sattelpunkt.

Beispiel 10.18 $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$

grad $f(x,y) = (4x(x^2 + y^2 - 1), 4y(x^2 + y^2 - 1)) = (0,0)$

für $(x,y) = (0,0)$ und für alle (x,y) mit $x^2 + y^2 = 1$ (Kreis mit Radius $R = 1$).

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4(x^2 + y^2 - 1) + 8x^2 & 8xy \\ 8xy & 4(x^2 + y^2 - 1) + 8y^2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16 > 0 \\ f_{xx}(0,1) = -4 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{isoliertes Maximum an der Stelle } (0,0)$$

Für alle Punkte (x,y) auf dem Einheitskreis mit $x^2 + y^2 = 1$ gilt

$$\det H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 8x^2 & 8xy \\ 8xy & 8y^2 \end{vmatrix} = 0$$

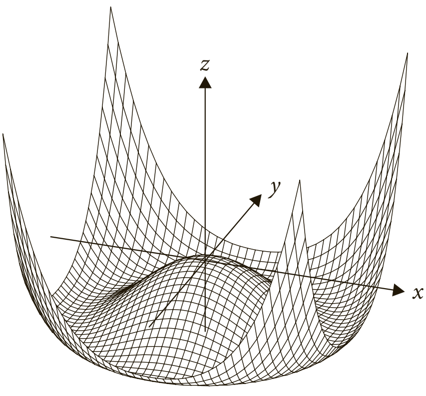


Bild 10.25

Die Funktion besitzt an jeder Stelle auf dem Einheitskreis ein nichtisoliertes Minimum: Jeder Punkt auf dem Einheitskreis besitzt eine Umgebung, in der es keine kleineren Funktionswerte gibt. Jede Umgebung eines Punktes auf dem Einheitskreis enthält aber Stellen mit gleich kleinen Funktionswerten.

Anwendungsbeispiel 10.19 Behälter mit minimaler Oberfläche

Wir wollen die Problemstellung des Einführungsbeispiels 10.1 lösen. Nach den Ausführungen zu Beginn des Abschnittes 10.4 müssen wir dazu ein Minimum der Funktion

$$f(x,y)=xy+\frac{2V}{y}+\frac{2V}{x}$$

suchen. Wir erhalten

$$\operatorname{grad} f(x,y)=(y-2Vx^{-2},x-2Vy^{-2}) \quad H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 4Vx^{-3} & 1 \\ 1 & 4Vy^{-3} \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen $y-2Vx^{-2}=0$ und $x-2Vy^{-2}=0$ sind erfüllt für

$$(x,y)=(x_0,y_0)=(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V})$$

Für die Hesse-Matrix an der Stelle (x_0,y_0) gilt

$$H_f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} 4Vx_0^{-3} & 1 \\ 1 & 4Vy_0^{-3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det H_f(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$$

Daraus folgt, dass die Funktion $f(x,y)$ und damit die Oberfläche minimal ist für

$$(x,y)=(x_0,y_0)=(\sqrt[3]{2V},\sqrt[3]{2V})$$

Um Kriterien für Funktionen von mehr als zwei Variablen formulieren zu können, benötigen wir folgende Begriffe (auf die Erläuterung dieser Begriffe verzichten wir):

Wir nennen eine *symmetrische* Matrix

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

positiv definit, wenn für alle k mit $1\le k\le n$ gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}>0$$

Wir nennen sie ***negativ definit***, wenn $-A$ positiv definit ist. Wir nennen sie ***indefinit***, wenn sie weder positiv definit, noch negativ definit ist und wenn $\det A\neq 0$ ist. Die Kriterien für Extrema von Funktionen von mehreren Variablen lassen sich damit folgendermaßen formulieren.

10.5 Aufgaben

Aufgabe 10.1

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle Stellen, an denen die Funktionen lokale Extrema besitzen und bestimmen Sie die Art der Extrema. Bestimmen Sie, ob es sich bei einem Extremum um ein Maximum oder Minimum handelt und ob das Extremum isoliert ist.

a) $f(x,y)=2x^3+4xy-2y^3+5$

b) $f(x,y)=\ln(xy)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$

c) $f(x,y)=x^4-2x^2-2y^3+3y^2$

d) $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$

e) $f(x,y)=x^3-3xy^2$

f) $f(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$

g) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+2z+x$

h) $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2+y^2+z^2)$

Aufgabe 10.2

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle Stellen, an denen die Funktionen Extrema unter den angegebenen Nebenbedingungen besitzen und bestimmen Sie die Art der Extrema (Maximum oder Minimum).

a) $f(x,y)=xy$ $\quad g(x,y)=x^2+y^2-1=0$

b) $f(x,y)=xy^2$ $\quad g(x,y)=x^2+y^2-1=0$

c) $f(x,y)=3x^3+3y^3-x-y$ $\quad g(x,y)=x+y-2=0$

d) $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)$ $\quad g(x,y)=x+y-2=0$

e) $f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ $\quad g(x,y)=x+y-1=0$

f) $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}$ $\quad g(x,y,z)=x+y+z-3=0$

g) $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$ $\quad g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$

h) $f(x,y,z)=-3x+y+5z$ $\quad g_1(x,y,z)=x+y+z=0$
$\quad g_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$

11 Integralrechnung mit Funktionen von mehreren Variablen

11.1 Bereichsintegrale

Einführungsbeispiel 11.1 Ladung auf einer Oberfläche

Befindet sich eine Punktladung Q im Abstand h über einer leitenden (unendlich ausgedehnten) Ebene (x-y-Ebene), so stellt sich auf der Ebene eine Ladungsverteilung ein, die durch folgende Flächenladungsdichte beschrieben wird:

$$\sigma(x,y)=-\frac{hQ}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+h^2)^3}}$$

Die Frage nach der Ladung Q_A auf einer Fläche $A\subset\mathbb{R}^2$ führt zu dem Bereichsintegral

$$Q_A=\iint_A\sigma(x,y)dF\ .$$

11.1.1 Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen

Um ein Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen zu erläutern und zu klären, wie es berechnet werden kann, betrachten wir das Einführungsbeispiel 11.1. Auf der in Bild 11.1 gezeigten Fläche A sei eine Ladung verteilt. Die Verteilung werde beschrieben durch eine Ladungsverteilungsfunktion $\sigma(x,y)$. Nimmt man an, dass die Funktion $\sigma(x,y)$ in A stetig oder sogar differenzierbar ist und in einer kleinen Teilfläche ΔA mit Flächeninhalt ΔF nicht sehr stark variiert, so ist die Ladung ΔQ auf der Teilfläche ΔA näherungsweise $\sigma(x,y)\Delta F$, wobei (x,y) eine Stelle auf der Fläche ΔA ist. Die Fläche A wird nun in n kleine Teilflächen ΔA_i mit den Flächeninhalten ΔF_i und den Ladungen $\Delta Q_i\approx\sigma(x_i,y_i)\Delta F_i$ zerlegt, wobei (x_i,y_i) eine Stelle auf der Fläche ΔA_i ist (s. Bild 11.2).

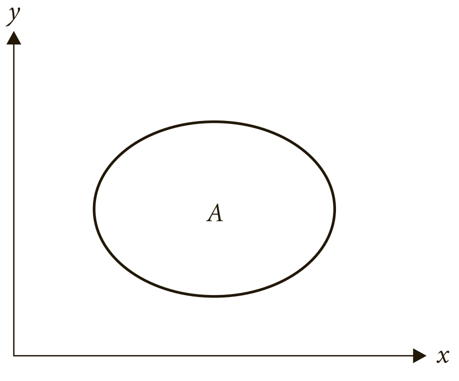


Bild 11.1

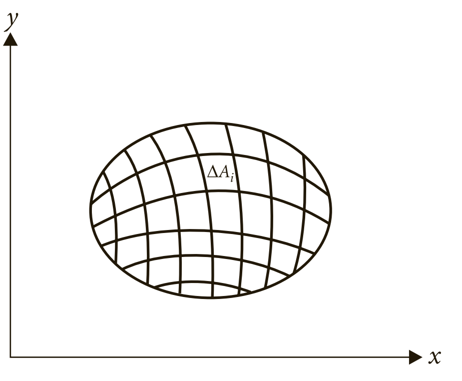


Bild 11.2

Für die Gesamtladung Q_A gilt

$$Q_A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i, y_i)\Delta F_i$$

Im Grenzprozess einer „unendlich feinen“ Zerlegung, d.h. für $n \to \infty$ und $\Delta F_i \to 0$ erhält man die Ladung Q_A exakt.

$$Q_A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta F_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i, y_i)\Delta F_i = \iint_A \sigma(x,y)dF \tag{11.1}$$

Dieser Grenzwert heißt ***Bereichs-, Gebiets- oder Flächenintegral*** der Funktion $\sigma(x, y)$ über den Bereich (Fläche) *A* und wird durch ein Zweifachintegral dargestellt.

Bereichsintegral einer Funktion von zwei Variablen

$A \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Bereich im $\mathbb{R}^2$ mit endlichem Flächeninhalt $F \neq 0$. Die Funktion $f(x, y)$ sei in *A* beschränkt und stetig. Z_n sei eine Zerlegung des Bereiches *A* in *n* Teilbereiche ΔA_i mit den Flächeninhalten ΔF_i und beliebigen Stellen $(x_i, y_i) \in \Delta A_i$. Gilt für alle Folgen (Z_n) von Zerlegungen mit $n \to \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta F_i = 0$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta F_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta F_i = I \tag{11.2}$$

dann heißt *I* das ***Bereichsintegral*** der Funktion $f(x, y)$ über den Bereich *A*.

Schreibweise: $I = \iint_A f(x, y)dF$

Für Bereichsintegrale von Funktionen von zwei Variablen gelten folgende Aussagen:

$a,b\in\mathbb{R}$ seien reelle Zahlen und $A,B\subset\mathbb{R}^2$ zwei Bereiche mit endlichen Flächeninhalten $F_A, F_B \neq 0$, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Dann gilt:

$$F_A = \iint\limits_A dF \tag{11.3}$$

$$\iint\limits_A (af(x,y)+bg(x,y))dF = a\iint\limits_A f(x,y)dF + b\iint\limits_A g(x,y)dF \tag{11.4}$$

$$\iint\limits_{A\cup B} f(x,y)dF = \iint\limits_A f(x,y)dF + \iint\limits_B f(x,y)dF \tag{11.5}$$

11.1.1.1 Integration in kartesischen Koordinaten

Um zu klären, wie das Bereichsintegral (11.1) berechnet werden kann, betrachten wir einen Bereich *A*, wie er in Bild 11.3 zu sehen ist. Für diesen Bereich *A* gilt

$$A = \{(x,y)\,|\,x_1 \le x \le x_2 \wedge y_1(x) \le y \le y_2(x)\} \tag{11.6}$$

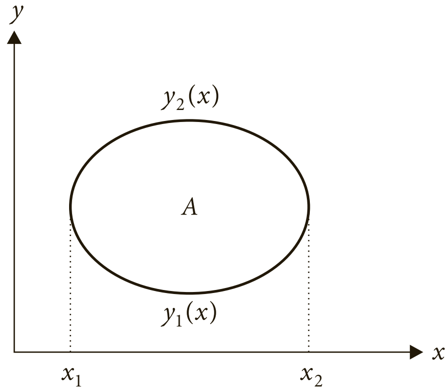


Bild 11.3

Wir zerlegen die Fläche *A* in streifenförmige Teilflächen ΔA_j der Breite Δx_j an den Stellen x_j und zerlegen jeden Streifen in Teilflächen ΔA_{jk} mit der Höhe Δy_k an den Stellen (x_j, y_k), wie in Bild 11.4 gezeigt. Außer der obersten und untersten Teilfläche sind alle diese Teilflächen Rechtecke mit den Seitenlängen $\Delta x_j, \Delta y_k$ und den Flächeninhalten $\Delta F_{jk} = \Delta x_j \Delta y_k$. Für die Ladung ΔQ_{jk} auf der Teilfläche ΔA_{jk} gilt

$$\Delta Q_{jk} \approx \sigma(x_j, y_k)\Delta x_j \Delta y_k$$

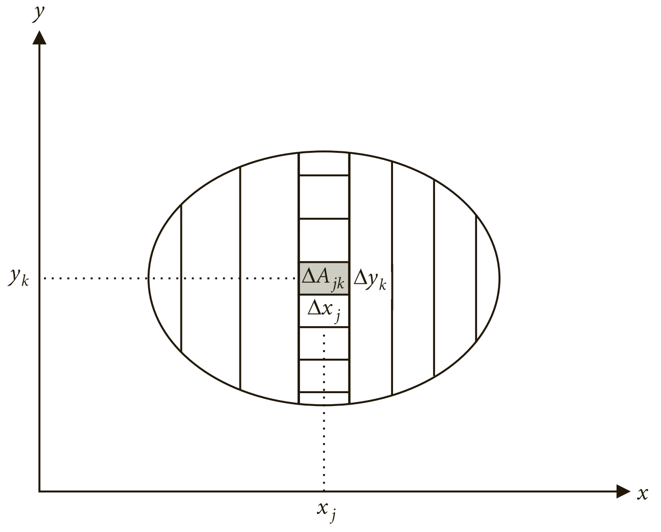


Bild 11.4

Für die Ladung ΔQ_j auf dem Streifen ΔA_j gilt

$$\Delta Q_j \approx \sum_k \sigma(x_j, y_k)\Delta x_j \Delta y_k = \left(\sum_k \sigma(x_j, y_k)\Delta y_k\right)\Delta x_j$$

Für die Ladung Q_A auf der Fläche A gilt

$$Q_A \approx \sum_j \left(\sum_k \sigma(x_j, y_k)\Delta y_k\right)\Delta x_j$$

Im Grenzprozess einer „unendlich feinen“ Zerlegung $\Delta y_k \to 0$ erhält man

$$\sum_j \left(\sum_k \sigma(x_j, y_k)\Delta y_k\right)\Delta x_j \to \sum_j \left(\int_{y_1(x_j)}^{y_2(x_j)} \sigma(x_j, y)dy\right)\Delta x_j \,.$$

Im Grenzprozess einer „unendlich feinen“ Zerlegung $\Delta x_j \to 0$ erhält man

$$\sum_j \left(\int_{y_1(x_j)}^{y_2(x_j)} \sigma(x_j, y)dy\right)\Delta x_j \to \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \sigma(x, y)dy\right)dx \,.$$

Damit ist die Berechnung dieses Flächenintegrals zurückgeführt auf zwei aufeinander folgende Integrationen. Die Integrationsgrenzen bei dem Integral mit der Integrationsvariablen y hängen von x ab und sind damit Funktionen von x. Die in Bild 11.3

gezeigte Fläche A könnte man statt in der Form (11.6) auch folgendermaßen beschreiben (s. Bild 11.5):

$$A = \{(x,y) \mid y_1 \le y \le y_2 \wedge x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

Für das Bereichsintegral über die Fläche A gilt damit:

$$\iint_A \sigma(x,y)\,dF = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \sigma(x,y)\,dx \right) dy$$

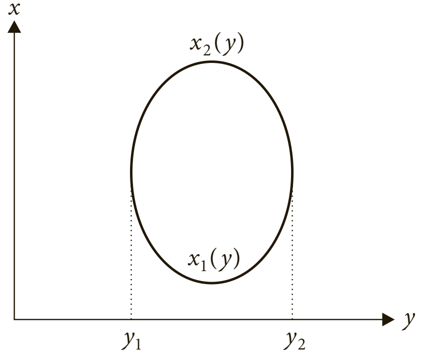


Bild 11.5

Die Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Bereichsintegrale im $\mathbb{R}^2$ in kartesischen Koordinaten

$f(x,y)$ sei eine in $A \in \mathbb{R}^2$ stetige Funktion. Ist A gegeben durch

$$A = \{(x,y) \mid x_1 \le x \le x_2 \wedge y_1(x) \le y \le y_2(x)\} \tag{11.7}$$

mit zwei stetigen Funktionen $y_1(x), y_2(x)$, dann gilt

$$\iint_A f(x,y)\,dF = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \tag{11.8}$$

Ist A gegeben durch

$$A = \{(x,y) \mid y_1 \le y \le y_2 \wedge x_1(y) \le x \le x_2(y)\} \tag{11.9}$$

mit zwei stetigen Funktionen $x_1(y), x_2(y)$, dann gilt

$$\iint_A f(x,y)\,dF = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \tag{11.10}$$

Mengen A mit der Eigenschaft (11.7) oder (11.9) heißen ***Normalbereiche***.

Beispiel 11.2 Flächenmoment eines Viertelkreises

A sei ein Viertelkreis mit Radius R und Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung:

$$A=\{(x,y)\,|\,0\le x\le R\wedge 0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\}$$

Für das Flächenmoment $I_x=\iint\limits_A y^2\,dF$ erhält man

$$I_x=\iint\limits_A y^2\,dF=\int\limits_0^R\left(\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}y^2\,dy\right)dx=\int\limits_0^R\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\frac{1}{3}\int\limits_0^R\sqrt{R^2-x^2}^{\,3}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{x}{4}\sqrt{R^2-x^2}^{\,3}+\frac{3}{8}R^2x\sqrt{R^2-x^2}+\frac{3}{8}R^4\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right]_0^R$$

$$=\frac{1}{8}R^4\arcsin(1)=\frac{\pi}{16}R^4$$

Beispiel 11.3 Flächeninhalt eines Halbkreises

A sei ein Halbkreis mit Radius R und Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung:

$$A=\{(x,y)\,|\,-R\le x\le R\wedge 0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\}$$

$$F=\iint\limits_A dF=\int\limits_{-R}^R\left(\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\right)dx=\int\limits_{-R}^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right]_{-R}^R$$

$$=\frac{R^2}{2}\arcsin(1)-\frac{R^2}{2}\arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}R^2$$

Beispiel 11.4 Geometrischer Schwerpunkt eines Halbkreises

$$A=\{(x,y)\,|\,-R\le x\le R\wedge 0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\}$$

Die y-Komponente y_S des geometrischen Schwerpunktes ist

$$y_S=\frac{1}{F}\iint\limits_A y\,dF=\frac{1}{F}\int\limits_{-R}^R\left(\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}y\,dy\right)dx=\frac{1}{F}\int\limits_{-R}^R\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\frac{1}{2F}\int\limits_{-R}^R(R^2-x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{2F}\cdot\frac{4}{3}R^3=\frac{4}{3\pi}R$$

Für rechteckige Normalbereiche mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind die Integrationsgrenzen Konstanten.