Übungsbuch zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

450 Klausur- und Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

von
Prof. Dr. Michael Merz

1. Auflage

Thematische Gliederung:

Mathematik und Statistik

Verlag Franz Vahlen München 2013

Verlag Franz Vahlen im Internet:
www.vahlen.de
ISBN 978 3 8006 4720 0

* Aufgabe 11.4 (MC-Aufgaben zu Eigenschaften von Folgen)

Kreuzen Sie an, welche der Aussagen a) bis e) wahr und welche falsch sind:

a) Jede beschränkte Folge ist konvergent.
b) Jede konvergente Folge ist monoton.
c) Eine konvergente Folge kann mehr als einen Häufungspunkt besitzen.
d) Eine streng monotone Folge kann divergent sein.
e) Eine Folge mit zwei konvergenten Teilfolgen zu unterschiedlichen Grenzwerten ist divergent.

	a)	b)	c)	d)	e)
Wahr					
Falsch					

Lehrbuch: Abschnitte 11.1, 11.3, 11.4 und 11.6

Lösung: Zu a): Falsche Aussage. Die Beschränktheit einer Folge ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für ihre Konvergenz (vgl. Satz 11.18 im Lehrbuch). Zum Beispiel ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n = (-1)^n$ beschränkt, obwohl sie nicht konvergent ist.

Zu b): Falsche Aussage. Zum Beispiel ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ alternierend, obwohl sie gegen den Grenzwert 0 konvergiert.

Zu c): Falsche Aussage. Eine konvergente Folge besitzt stets genau einen Häufungspunkt (vgl. Satz 11.32 im Lehrbuch).

Zu d): Wahre Aussage. Eine (streng) monotone Folge ist genau dann divergent, wenn sie nicht beschränkt ist (vgl. Satz 11.23 im Lehrbuch).

Zu e): Wahre Aussage. Die Existenz von zwei konvergenten Teilfolgen zu unterschiedlichen Grenzwerten impliziert das Vorhandensein von zwei unterschiedlichen Häufungspunkten (vgl. Satz 11.29 im Lehrbuch) und damit die Divergenz der Folge (vgl. Satz 11.32 im Lehrbuch).

** Aufgabe 11.5 (Arithmetische Folge)

a) Eine BWL-Studentin nimmt am 1.1.2013 bei ihrer Bank einen Kredit in Höhe von 5000 € für 8 Jahre zu einem Jahreszinssatz von $p = 5\%$ auf. Bestimmen Sie die Summe, welche die Studierende am 31.12.2020 zurückzuzahlen hat (rechnen Sie ohne Berücksichtigung von Zinseszinseffekten).

b) Eine andere Bank hat der BWL-Studentin am 1.1.2013 ebenfalls einen Kredit über 5000 € angeboten, für den sie am 31.12.2018 den Betrag 6800 € zurückzahlen muss. Ermitteln Sie den Jahreszinssatz p dieses Alternativangebots (rechnen Sie ohne Berücksichtigung von Zinseszinseffekten).

c) Die BWL-Studentin erhält am 31.12.2013 von einem Freund 240 € Verzugszinsen für einen seit dem 1.1.2010 ausstehenden Betrag in Höhe von 2000 €. Berechnen Sie den Jahreszinssatz p, den die BWL-Studentin mit ihrem Freund vereinbart hat (rechnen Sie ohne Berücksichtigung von Zinseszinseffekten).

Lehrbuch: Abschnitt 11.2

Betrag ergibt sich daher als das Folgenglied K_8 einer arithmetischen Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $K_0 = 5000$ € und $d = 0{,}05 \cdot 5000$ € (vgl. Definition 11.5a) im Lehrbuch). Das heißt, es gilt

$$K_8 = K_0 + 8d = 5000\,€ + 8 \cdot 0{,}05 \cdot 5000\,€ = 7000\,€$$

(vgl. (11.4) im Lehrbuch). Die BWL-Studentin muss somit am 31.12.2020 einen Betrag in Höhe von 7000 € zurückzahlen.

Zu b): Der Zeitraum vom 1.1.2013 bis zum 31.12.2018 entspricht 6 Jahren. Der Betrag 6800 € ist somit gleich dem Folgenglied K_6 einer arithmetischen Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $K_0 = 5000$ € und unbekanntem $d = p \cdot 5000$ €. Das heißt, es gilt

$$K_6 = K_0 + 6d = 5000\,€ + 6d = 6800\,€ \qquad \text{bzw.} \qquad d = \frac{6800\,€ - 5000\,€}{6} = 300\,€.$$

Zusammen mit $d = p \cdot 5000$ € folgt daraus für den Jahreszinssatz

$$p \cdot 5000\,€ = 300\,€ \qquad \text{bzw.} \qquad p = 0{,}06.$$

Der Jahreszinssatz dieses Alternativangebots beträgt also $p = 6\%$.

Zu c): Der Zeitraum vom 1.1.2010 bis 31.12.2013 entspricht 4 Jahren. In dieser Zeit sind die Schulden von $K_0 = 2000$ € auf $K_4 = 2240$ € angewachsen. Das heißt, es gilt

$$K_4 = K_0 + 4d = 2000\,€ + 4 \cdot p \cdot 2000\,€ = 2000\,€ \cdot (1 + 4p) = 2240\,€$$

(vgl. (11.4) im Lehrbuch). Wird die letzte Gleichung nach dem Jahreszinssatz p aufgelöst, erhält man

$$p = \frac{\frac{2240\,€}{2000\,€} - 1}{4} = 0{,}03.$$

Die BWL-Studentin hat folglich mit ihrem Freund den Jahreszinssatz $p = 3\%$ vereinbart.

** Aufgabe 11.6 (Geometrische Folge)

Ein VWL-Studierender hat die Möglichkeit sein Kapital K_0 zum Jahreszinssatz p anzulegen, wobei die im Zeitverlauf anfallenden Zinsen ebenfalls am Jahresende mit Zinssatz p verzinst werden.

a) Ermitteln Sie, nach wie vielen Jahren n ein Kapital $K_0 = 10000$ € bei einem Jahreszinssatz von $p = 4\%$ auf $K_n = 18000$ € angewachsen ist.

b) Bestimmen Sie, wie viele Jahre es bei einem Jahreszinssatz von $p = 4\%$ dauert, bis sich ein beliebiges Kapital $K_0 > 0$ verdoppelt hat.

c) Berechnen Sie, bei welchem Jahreszinssatz p sich ein beliebiges Kapital $K_0 > 0$ innerhalb von 20 Jahren vervierfacht.

Lehrbuch: Abschnitt 11.2

Lösung: Zu a): Bei der Rechnung sollen Zinseszinseffekte berücksichtigt werden. Folglich unterscheidet sich das Kapital des VWL-Studierenden in zwei hintereinanderfolgenden Jahren stets um den Faktor $q = 1 + p = 1{,}04$. Das Kapital nach n Jahren ist somit das Folgenglied K_n einer geometrischen Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $K_0 = 10000$ € und $q = 1{,}04$ (vgl. Definition 11.5b) im Lehrbuch). Das heißt, es gilt

$$K_n = K_0 q^n = 10000\,€ \cdot 1{,}04^n = 18000\,€$$

Das Kapital $K_0 = 10000\,€$ ist somit bei einem Jahreszinssatz von $p = 4\%$ nach ca. 15 Jahren auf $18000\,€$ angewachsen.

Zu b): Gesucht ist die Anzahl n von Jahren, für die sich das Kapital K_0 bei einem Jahreszinssatz von $p = 4\%$ verdoppelt, also

$$2K_0 = K_0 q^n = K_0 \cdot 1{,}04^n$$

gilt. Durch Auflösen der letzten Gleichung nach n erhält man weiter

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}04)} \approx 17{,}67.$$

Das heißt, bei einem Jahreszinssatz von $p = 4\%$ hat sich ein beliebiges Kapital $K_0 > 0$ nach 17 Jahren und 8 Monaten verdoppelt.

Zu c): Gesucht ist nun der Jahreszinssatz p, für den sich ein beliebiges Kapital $K_0 > 0$ innerhalb von 20 Jahren vervierfacht, also

$$4K_0 = K_0 q^{20} = K_0(1+p)^{20}$$

gilt. Durch Auflösen der letzten Gleichung nach dem Jahreszinssatz p folgt

$$p = \sqrt[20]{4} - 1 \approx 0{,}0718.$$

Folglich vervierfacht sich ein beliebiges Kapital $K_0 > 0$ innerhalb von 20 Jahren bei einem Jahreszinssatz von etwa $p = 7{,}18\%$.

** Aufgabe 11.7 (Monotonie von Folgen)

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der folgenden vier Folgen:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^2}{2^5}$

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{10^n}{n!}$

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n!}{n^n}$

d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^2}$

Lehrbuch: Abschnitt 11.3

Lösung: Zu a): Es gilt $a_n > 0$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist somit streng monoton wachsend.

Zu b): Es gilt $a_n > 0$ und

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, 10^n} = \frac{10}{n+1} = \begin{cases} \geq 1 & \text{für } n = 1, 2, \ldots, 9 \\ < 1 & \text{für } n \geq 10 \end{cases}.$$

Das heißt, die Folgenglieder a_n wachsen für $n = 1, 2, \ldots, 9$ und sind ab $n = 10$ streng monoton fallend. Die Folge ist damit nicht monoton.

Zu c): Es gilt $a_n > 0$ und

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist damit streng monoton fallend.

Zu d): Es gilt

Die Folge ist somit nicht monoton.

** Aufgabe 11.8 (Konvergenz von Folgen)

Verifizieren Sie, dass die beiden folgenden Folgen der Definition einer Nullfolge genügen und bestimmen Sie jeweils die kleinste natürliche Zahl $\widetilde{n} \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < 10^{-3}$ für alle $n > \widetilde{n}$ gilt:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{5}{n^2}$

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{4}{\sqrt{n}}$

Lehrbuch: Abschnitt 11.4

Lösung: Zu a): Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
|a_n - 0| = \left|\frac{5}{n^2}\right| < \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{5}{n^2} < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \quad n^2 > \frac{5}{\varepsilon} \\
&\Longleftrightarrow \quad n > \sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}
\end{aligned}
\tag{11.2}
$$

Da für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}$ existiert, gibt es somit für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Das heißt, die Folge konvergiert gegen den Grenzwert 0 und ist damit eine Nullfolge (vgl. Definition 11.14 im Lehrbuch). Aus (11.2) folgt ferner für $\varepsilon = 10^{-3}$

$$
|a_n| < 10^{-3} \quad \Longleftrightarrow \quad n > \sqrt{\frac{5}{10^{-3}}} \approx 70{,}71.
$$

Folglich sind alle Folgenglieder a_n mit $n > 70$ kleiner als $\varepsilon := 10^{-3}$ und es gilt $\widetilde{n} = 70$.

Zu b): Es gilt:

$$
\begin{aligned}
|a_n - 0| = \left|\frac{4}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \quad \sqrt{n} > \frac{4}{\varepsilon} \\
&\Longleftrightarrow \quad n > \frac{4^2}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
\tag{11.3}
$$

Da für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{4^2}{\varepsilon^2}$ existiert, gibt es somit für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Das heißt, die Folge konvergiert gegen den Grenzwert 0 und ist damit eine Nullfolge. Aus (11.3) folgt ferner für $\varepsilon = 10^{-3}$

$$
|a_n| < 10^{-3} \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{4^2}{(10^{-3})^2} = 16.000.000.
$$

Folglich sind alle Folgenglieder a_n mit $n > 16.000.000$ kleiner als $\varepsilon := 10^{-3}$ und es gilt $\widetilde{n} = 16.000.000$.

** Aufgabe 11.9 (Beschränktheit und Monotonie von Folgen)

a) Weisen Sie die Beschränktheit der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$
b_n = -\frac{9n^2 + n}{3n^2}
$$

Lösung: Zu a): Es gilt

$$|b_n| = \frac{9n^2+n}{3n^2} \leq \frac{9n^2+n^2}{3n^2} = \frac{10n^2}{3n^2} = \frac{10}{3} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das heißt, die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt (vgl. Definition 11.8 im Lehrbuch).

Zu b): Zum Beispiel sind die Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{mit } a_n = n(n-1)$$
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{mit } a_n = n!$$
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{mit } a_n = n^n$$

offensichtlich jeweils nach unten beschränkt, divergent und monoton wachsend. Da jedoch in allen drei Fällen $a_0 = a_1$ gilt, sind sie nicht streng monoton wachsend.

** Aufgabe 11.10 (Beschränktheit und Monotonie von Folgen)

Weisen Sie nach, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt{5+n^2} - n$

a) nach unten und oben beschränkt sowie

b) streng monoton fallend

ist.

Lehrbuch: Abschnitt 11.3

Lösung: Zu a): Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $0 < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < a_n \iff 0 < \sqrt{5+n^2} - n \iff n < \sqrt{5+n^2} \iff n^2 < 5 + n^2 \iff 0 < 5$$

Das heißt, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch 0 nach unten beschränkt (vgl. Definition 11.8 im Lehrbuch). Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{5+n^2} - n &= \frac{\left(\sqrt{5+n^2}-n\right)\left(\sqrt{5+n^2}+n\right)}{\sqrt{5+n^2}+n} \\ &= \frac{5+n^2-n^2}{\sqrt{5+n^2}+n} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5+n^2}+n} \\ &< \frac{5}{\sqrt{n^2}+n} \\ &= \frac{5}{n+n} = \frac{5}{2n} \end{aligned}$$

Für $n = 1$ folgt daraus $a_n < \frac{5}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch $\frac{5}{2}$ nach oben beschränkt.

Zu b): Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $a_{n+1} - a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn aus

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{5+(n+1)^2} - (n+1) - \sqrt{5+n^2} + n \\ &= \sqrt{n^2+2n+6} - \sqrt{5+n^2} - 1 \end{aligned}$$

folgt

$$a_{n+1} - a_n < 0 \iff \left(\sqrt{n^2+2n+6} - \sqrt{5+n^2}\right)^2 < 1$$

bzw. nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der beiden Terme auf der linken und rechten Seite der letzten Ungleichung

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 10n + 25 < n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 10n + 30 \\ &\Longleftrightarrow \quad 25 < 30. \end{aligned}$$

Das heißt, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend (vgl. Definition 11.10b) im Lehrbuch).

*** Aufgabe 11.11 (Beschränktheit und Monotonie von Folgen)

Geben Sie die Beschränktheits- und Monotonieeigenschaften sowie das Infimum und Supremum der beiden folgenden Folgen an:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^2+3}{n^3}$

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $b_n = c \cdot n + \frac{8}{5}(-1)^n$ und $c \in \mathbb{R}$

Lehrbuch: Abschnitte 11.3, 11.4 und 11.8

Lösung: Zu a): Offensichtlich gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten beschränkt (vgl. Definition 11.8 im Lehrbuch). Zur Untersuchung der Monotonieeigenschaften von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachtet man

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)^2+3}{(n+1)^3} - \frac{n^2+3}{n^3} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{3}{(n+1)^3} - \frac{1}{n} - \frac{3}{n^3} \\ &= \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}_{<0} + \underbrace{\frac{3}{(n+1)^3} - \frac{3}{n^3}}_{<0} < 0 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass $a_{n+1} - a_n < 0$ bzw. $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend (vgl. Definition 11.10b) im Lehrbuch) und durch das größte Folgenglied $a_1 = \frac{1^2+3}{1^3} = 4$ auch nach oben beschränkt. Ferner erhält man (vgl. Satz 11.39 im Lehrbuch)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^3} = 0 + 0 = 0.$$

Für das Infimum und Supremum der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt somit $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = 4$ (vgl. Definition 11.9a) und b) im Lehrbuch).

Zu b): Offensichtlich ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $c < 0$ durch $b_0 = \frac{8}{5}$ nach oben beschränkt und nach unten unbeschränkt. Für das Infimum und Supremum gilt in diesem Fall $\inf_{n\in\mathbb{N}_0} b_n = -\infty$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} b_n = \frac{8}{5}$ (vgl. Definition 11.9a) und c) im Lehrbuch). Für $c = 0$ alterniert die Folge zwischen den beiden Werten $\frac{8}{5}$ und $-\frac{8}{5}$. Das heißt, für das Infimum und Supremum gilt $\inf_{n\in\mathbb{N}_0} b_n = -\frac{8}{5}$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} b_n = \frac{8}{5}$. Für $c > 0$ ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch das kleinere der beiden Folgenglieder $b_0 = \frac{8}{5}$ und $b_1 = c - \frac{8}{5}$, also den Wert $\min\left\{\frac{8}{5}, c - \frac{8}{5}\right\}$, nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Aus

$$b_0 = \frac{8}{5} < c - \frac{8}{5} = b_1$$

folgt weiter, dass für $c > \frac{16}{5}$ durch $b_0 = \frac{8}{5}$ und für $0 < c < \frac{16}{5}$ durch $b_1 = c - \frac{8}{5}$ das kleinere Folgenglied gegeben ist. Insgesamt erhält man somit für das Infimum und Supremum der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Zur Untersuchung der Monotonieeigenschaften von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wird analysiert, für welche $n \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $b_{n+1} - b_n < 0$ und für welche $n \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathbb{R}$ ist $b_{n+1} - b_n > 0$ erfüllt. Für den Fall $b_{n+1} - b_n < 0$ erhält man:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad c \cdot (n+1) + \frac{8}{5}(-1)^{n+1} < c \cdot n + \frac{8}{5}(-1)^n \\
&\Longleftrightarrow \quad c \cdot n + c - \frac{8}{5}(-1)^n < c \cdot n + \frac{8}{5}(-1)^n \\
&\Longleftrightarrow \quad c < \frac{16}{5}(-1)^n
\end{aligned}$$

Im Falle von $c < -\frac{16}{5}$ gilt somit $b_{n+1} - b_n < 0$ bzw. $b_{n+1} < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und im Falle von $c = -\frac{16}{5}$ gilt $b_{n+1} - b_n \leq 0$ bzw. $b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Das heißt, für $c < -\frac{16}{5}$ ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton fallend und für $c = -\frac{16}{5}$ ist sie lediglich monoton fallend (vgl. Definition 11.10b) im Lehrbuch). Für den Fall $b_{n+1} - b_n > 0$ erhält man völlig analog:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad c \cdot (n+1) + \frac{8}{5}(-1)^{n+1} > c \cdot n + \frac{8}{5}(-1)^n \\
&\Longleftrightarrow \quad c \cdot n + c - \frac{8}{5}(-1)^n > c \cdot n + \frac{8}{5}(-1)^n \\
&\Longleftrightarrow \quad c > \frac{16}{5}(-1)^n
\end{aligned}$$

Das heißt, für $c > \frac{16}{5}$ gilt $b_{n+1} > b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist damit streng monoton wachsend. Für $c = \frac{16}{5}$ gilt $b_{n+1} \geq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und die Folge ist somit nur monoton wachsend (vgl. Definition 11.10a) im Lehrbuch).

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist dagegen nicht monoton für $-\frac{16}{5} < c < \frac{16}{5}$.

** Aufgabe 11.12 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Berechnen Sie den Grenzwert der beiden folgenden Folgen, sofern dieser existiert:

a) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^n \cdot 3^{-n} + 7^n \cdot 21^{-n} + \frac{2n+1}{n}$$

b) Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{1}{3}q^n - \left(\frac{7+4n}{3n} - \frac{2n^2-2n}{n^2+5n}\right) \qquad \text{für } 0 < q < 1$$

Lehrbuch: Abschnitte 11.4 und 11.8

Lösung: Zu a): Es gilt (vgl. Satz 11.39 im Lehrbuch):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left((-1)^n \cdot 3^{-n} + 7^n \cdot 21^{-n} + \frac{2n+1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Zu b): Analog zu a) erhält man:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}q^n - \left(\frac{7+4n}{3n} - \frac{2n^2-2n}{n^2+5n}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}q^n - \lim_{n\to\infty}\frac{7+4n}{3n} + \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-2n}{n^2+5n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}q^n - \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}+4}{3} + \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{2}{n}}{1+\frac{5}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}q^n - \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n}+4}{3} + \frac{2-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}}\\ &= 0 - \frac{0+4}{3} + \frac{2-0}{1+0} = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist folglich konvergent mit dem Grenzwert $\frac{2}{3}$.

** Aufgabe 11.13 (Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz von Folgen)

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = (-1)^{n+3}\frac{3n^2-n+4}{3n^3-n+4}$$

sowie die beiden Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie, Beschränktheit, Häufungspunkte und Konvergenz. Geben Sie zudem jeweils Supremum und Infimum an.

Lehrbuch: Abschnitte 11.3, 11.4, 11.6 und 11.8

Lösung: *Gesamtfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:* Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist alternierend und daher nicht monoton (vgl. Definition 11.1 im Lehrbuch). Ferner gilt (vgl. Satz 11.39 im Lehrbuch):

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+3}\frac{3n^2-n+4}{3n^3-n+4}\\ &= \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+3}\frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{3-\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}}\\ &= (-1)^{n+3}\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^3}}{3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^3}} = (-1)^{n+3}\frac{0-0+0}{3-0+0} = 0\end{aligned}$$

Das heißt, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit dem Grenzwert 0. Bei der Folge handelt es sich somit um eine Nullfolge. Als konvergente Folge ist sie insbesondere auch beschränkt (vgl. Satz 11.18 im Lehrbuch) und besitzt als einzigen Häufungspunkt ihren Grenzwert 0 (vgl. Satz 11.32 im Lehrbuch). Ferner sind das Supremum und Infimum der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_1 = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_2 = -\frac{7}{13}.$$

Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$: Die Teilfolge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ bestehend aus den Folgengliedern mit geradem