Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2

Mathematik von Studenten für Studenten erklärt und kommentiert

Bearbeitet von
Florian Modler, Martin Kreh

1. Auflage 2014. Taschenbuch. XIII, 392 S. Softcover
ISBN 978 3 642 54712 6
Format (B x L): 15,5 x 23,5 cm
Gewicht: 615 g

Stetige Abbildungen

2

Inhaltsverzeichnis

In diesem Kapitel wollen wir stetige Abbildungen in metrischen und topologischen Räumen einführen und untersuchen. Dazu müssen wir natürlich zuerst klären, wie die Stetigkeit einer Abbildung zwischen topologischen Räumen überhaupt definiert ist. Die Stetigkeit zwischen metrischen Räumen kennen wir aber eigentlich schon aus der Analysis 1.

Im Folgenden seien (M, d_M) und (N, d_N) zwei metrische Räume und $f : M \to N$ eine Abbildung. Dabei werden vor allem Abbildungen der Form $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ untersucht, wobei n und m natürliche Zahlen sind. Oder aber auch einfach Abbildungen der Form $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wir sagen dazu Funktionen mehrerer Veränderlicher. Die meisten Definitionen und Sätze sind für allgemeine metrische Räume definiert. In den Erklärungen und Beispielen verwenden wir diese Sätze dann aber eher für den $\mathbb{R}^n$, weil dies in der Praxis und in euren Übungsaufgaben am häufigsten getan wird. Um die folgenden Definitionen und Sätze zu verstehen, wollen wir uns zunächst anschauen, was man unter solch einer Funktion versteht und wie man sie sich graphisch verdeutlichen kann, um eine gute Vorstellung davon zu erhalten.

2.1 Definitionen

Definition 2.1 (Funktion mehrerer Veränderlicher)
Eine reellwertige Funktion in mehreren Veränderlichen ist eine Abbildung $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

F. Modler, M. Kreh, *Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2*,
DOI 10.1007/978-3-642-54713-3_2,

Definition 2.2 (Grenzwert einer Funktion)
Seien M und N metrische Räume und d_M und d_N Metriken auf M bzw. N. Weiterhin sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Der Limes (Grenzwert)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

existiert, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$d_N(f(x), a) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \text{ mit} \quad d_M(x, x_0) < \delta.$$

Anmerkung f besitzt keinen Grenzwert, wenn sich bei Annäherung an x_0 auf verschiedenen Kurven (zum Beispiel Geraden) verschiedene oder keine Grenzwerte ergeben.

Definition 2.3 (Folgenstetigkeit)
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt x_0 **(folgen)stetig**, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ist. f heißt (folgen)stetig, wenn f in jedem Punkt aus dem Definitionsbereich (folgen)stetig ist.

Definition 2.4 (Stetigkeit in metrischen Räumen)
f heißt**(punktweise) stetig** im Punkt $x_0 \in M$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, x_0) < \delta \text{ gilt } d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

f heißt **stetig**, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in M$ stetig ist.

Definition 2.5 (gleichmäßige Stetigkeit in metrischen Räumen)
f heißt **gleichmäßig stetig**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ \forall x, x' \in M \text{ mit } d_M(x, x') < \delta \text{ gilt } d_N(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Definition 2.6 (α-Hölder-stetig)
Für $0 < \alpha \leq 1$ heißt f auf M **α-Hölder-stetig**, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, sodass

$$d_N(f(x), f(x')) \leq C \cdot d_M(x, x')^\alpha \quad \forall x, x' \in M.$$

Definition 2.7 (Lipschitz-Stetigkeit in metrischen Räumen)
f heißt **lipschitz-stetig**, wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, sodass

$$d_N(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_M(x, x') \, \forall x, x' \in M.$$

Definition 2.8 (Stetigkeit zwischen topologischen Räumen)
Seien $(M, \mathcal{O}_M)$ und $(N, \mathcal{O}_N)$ zwei topologische Räume. Dann nennt man eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen diesen topologischen Räumen **stetig**, wenn die Urbilder von in N offenen Mengen offen in M sind, das heißt in Formelschreibweise: Wenn $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{O}_M$ für alle $\Omega \in \mathcal{O}_N$ gilt.

Definition 2.9 (Homöomorphismus)
Seien $(M, \mathcal{O}_M)$ und $(N, \mathcal{O}_N)$ zwei topologische Räume. Ist die Abbildung $f : M \to N$ bijektiv, und sind sowohl f als auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig, so nennt man f einen **Homöomorphismus**. Man sagt: Die topologischen Räume sind **homöomorph**, wenn ein Homöomorphismus zwischen ihnen existiert.

Definition 2.10 (Fixpunkt)
Seien (M, d) ein metrischer Raum und $f : M \to M$ eine Abbildung. Ein Punkt $m \in M$ heißt **Fixpunkt** von f, wenn $f(m) = m$ gilt.

Definition 2.11 (Kontraktion)
Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : M \to M$ heißt **Kontraktion**, wenn eine Konstante $C \in [0, 1)$ für alle x mit der Eigenschaft

$$d(f(x), f(y)) \leq C \cdot d(x, y)$$

existiert.

Definition 2.12 (Operatornorm)
Seien $(V, ||\cdot||_V)$ und $(W, ||\cdot||_W)$ zwei normierte Vektorräume und $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Die **Operatornorm** von L ist definiert als

$$||L|| := \sup_{||v||_V=1} ||L(v)||_W = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{||L(v)||_W}{||v||_V}.$$

2.2 Sätze und Beweise

Satz 2.1 (Zusammensetzung stetiger Funktionen)
Seien (M, d_M), (N, d_N) und (L, d_L) drei metrische Räume und $f : L \to M$ sei stetig in $x_0 \in L$ und $g : M \to N$ sei stetig in $y_0 := f(x_0)$. Dann ist auch die Funktion $g \circ f : L \to N$ stetig in x_0. Weiterhin gelten für zwei metrische Räume (M, d_M) und (N, d_N) folgende Aussagen: Seien $f : M \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in M$ und $g : N \to \mathbb{R}$ stetig in $y_0 \in N$. Dann sind auch die Funktionen $f(x)+g(y)$, $f(x)-g(y)$, $f(x)\cdot g(y)$ und, sofern $g(y) \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(y)}$ bezüglich der Produktmetrik (siehe Beispiel 1, Seite 17) auf $M \times N$ stetig im Punkt (x_0, y_0).

Beweis Analog wie in Analysis 1, siehe [MK09]. q.e.d.

Satz 2.2 (Stetigkeitskriterium)
Seien (M, d_M) und (N, d_N) zwei metrische Räume und $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
i) f ist stetig.
ii) Die Urbilder d_N-offener Mengen sind d_M-offen.
iii) Die Urbilder d_N-abgeschlossener Mengen sind d_M-abgeschlossen.

Beweis

„$i) \Rightarrow ii)$“: Seien f stetig und $\Omega \subset N$ eine d_N-offene Menge. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $\Omega \neq \emptyset$ und $f^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$. Nun wählen wir ein $x_0 \in M$ mit $f(x_0) \in \Omega$, das heißt $x_0 \in f^{-1}(\Omega)$. Da Ω nach Voraussetzung d_N-offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U(f(x_0), \varepsilon) \subset \Omega$. Da f aber stetig nach $i)$ ist, existiert auch ein $\delta > 0$, sodass

$$d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

für alle $x \in M$ mit $d_M(x, x_0) < \delta$. Dies bedeutet aber nichts anderes als, dass für alle $x \in U(x_0, \delta)$ gilt, dass $f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$. Da $U(f(x_0), \varepsilon) \subset \Omega$ und

$$f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon) \subset \Omega,$$

folgt $U(x_0, \delta) \subset f^{-1}(\Omega)$, das heißt, $f^{-1}(\Omega)$ ist d_M-offen. Das war zu zeigen.

„$ii) \Rightarrow i)$“: Es seien $x_0 \in M$ und $\varepsilon > 0$. Da $U(f(x_0), \varepsilon)$ d_N-offen ist, gilt nach Voraussetzung, dass $f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$ d_M-offen ist. Dies bedeutet aber gerade, dass ein $\delta > 0$ existiert mit

$$U(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon)).$$

Dann gilt aber für alle $x \in M$ mit $d_M(x, x_0) < \delta$ auch $d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Daher ist das ε-δ-Kriterium erfüllt und folglich f stetig.

„$ii) \Rightarrow iii)$“: Dies folgt sofort aus Komplementbildung

$$f^{-1}(N \setminus \Omega) = M \setminus f^{-1}(\Omega).$$

Dies soll uns genügen. q.e.d.

Satz 2.3
Seien (M, d_M) und (N, d_N) zwei metrische Räume und $f : M \to N$ eine stetige Abbildung. Dann sind die Bilder d_M-kompakter Menge wieder d_N-kompakt.

Beweis Sei $K \subset M$ kompakt. Wir zeigen, dass $f(K)$ folgenkompakt ist. Nach dem Satz von Heine-Borel (Satz 1.10) ist dies äquivalent zu den anderen Kompaktheitsbegriffen, die wir in Kap. 1 eingeführt hatten. Sei hierzu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(K)$ eine Folge und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ so gewählt, dass $f(x_n) = y_n$. Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in K$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Da f stetig ist, folgt hieraus

$$y := f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$$

und $y \in f(K)$. Daher existiert eine in $f(K)$ konvergente Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. q.e.d.

Satz 2.4
Seien (M, d) ein metrischer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann ist f auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset M$ beschränkt und nimmt ihr Supremum und Infimum an.

Beweis Da das Bild kompakter Mengen nach Satz 2.3 unter stetigen Abbildung wieder kompakt ist, und kompakte Mengen insbesondere beschränkt sind, ist f auf K beschränkt. Wir setzen

$$\lambda := \inf_{x \in K} f(x) \quad \text{und} \quad \mu := \sup_{x \in K} f(x).$$

Ist nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$, so existiert wegen der Kompaktheit von K eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in K$ konvergiert. Für dieses x gilt wegen der Stetigkeit von f nun insgesamt

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda,$$

also nimmt f in x sein Infimum an. Der Beweis für das Supremum geht genauso. Übungsaufgabe :-). q.e.d.

Satz 2.5
Seien (M, d_M) und (N, d_N) zwei metrische Räume und $f : M \to N$ stetig. Dann ist f auf jeder kompakten Teilmenge von M sogar gleichmäßig stetig.

Beweis Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Angenommen f wäre nicht gleichmäßig stetig. Sei weiterhin $k \subset M$. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ Punkte x_n und x'_n existieren mit

$$d_M(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad d_N(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon.$$

Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in K$ konvergiert. Wegen

$$d_M\left(x_{n_k}, x'_{n_k}\right) < \frac{1}{n_k}$$

gilt dann aber auch $\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = x$. Da f andererseits stetig ist, folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\lim_{k\to\infty} d_N\left(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})\right) \leq \lim_{k\to\infty} d_N\left(f(x_{n_k}), f(x)\right) + \lim_{k\to\infty} d_N\left(f(x), f(x'_{n_k})\right) = 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu $d_N\left(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})\right) \geq \varepsilon$ und beweist damit die Behauptung. q.e.d.

Satz 2.6 (Banach'scher Fixpunktsatz)
(M, d) sei ein vollständiger metrischer Raum und $f : M \to M$ eine Kontraktion. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt in M.

Beweis
Eindeutigkeit: Seien m_1 und m_2 zwei Fixpunkte von f. Wir zeigen, dass dann $m_1 = m_2$ gelten muss. Dies sieht man so: Es ist

$$d(m_1, m_2) = d(f(m_1), f(m_2)) \leq C \cdot d(m_1, m_2).$$

Hieraus folgt

$$\underbrace{(1 - C)}_{>0} \cdot d(m_1, m_2) \leq 0,$$

also

$$d(m_1, m_2) = 0 \Rightarrow m_1 = m_2.$$

Existenz: Wir wählen einen Punkt $m_0 \in M$ beliebig und eine Folge rekursiv definiert durch $m_{n+1} := f(m_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun, dass $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Wählen wir $n, k \in \mathbb{N}$, so müssen wir abschätzen

$$d(m_{n+k}, m_n) \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} d(m_i, m_{i-1}).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} d(m_i, m_{i-1}) &= d(f(m_{i-1}), f(m_{i-2})) \leq C \cdot d(m_{i-1}, m_{i-2}) \\ &= C \cdot d(f(m_{i-2}), f(m_{i-3})) \leq C^2 \cdot d(m_{i-2}, m_{i-3}). \end{aligned}$$

Rekursiv und induktiv ergibt sich

$$\ldots \leq C^{i-1} d(m_1, m_0) = C^{i-1} \cdot d(f(m_0), m_0).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} d(m_{n+k}, m_n) &\leq \sum_{i=n+1}^{n+k} d(m_i, m_{i-1}) \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} C^{i-1} \cdot d(f(m_0), m_0) \\ &= d(f(m_0), m_0) \cdot \sum_{i=n}^{n+k-1} C^i \\ &\leq d(f(m_0), m_0) \sum_{i=n}^{\infty} C^i = C^n d(f(m_0), m_0) \frac{1}{1 - C}. \end{aligned}$$

Also ist $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da M nach Voraussetzung vollständig ist, gilt $m := \lim_{n\to\infty} m_n \in M$. Der Grenzwert existiert also in M. Da f eine Kontraktion ist, ergibt sich nun die Behauptung aus der Rekursionsvorschrift

$$\lim_{n\to\infty} f(m_n) = f(m) \Rightarrow f(m) = m.$$

q.e.d.

Satz 2.7
Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ zwischen normierten Vektorräumen ist genau dann beschränkt, wenn sie stetig ist. Insbesondere sind stetige lineare Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen auch lipschitz-stetig.

Beweis
„$\Rightarrow$“: Sei L ein beschränkter linearer Operator. Dann gilt für alle $v_1, v_2 \in V$ und $v_1 \neq v_2$

$$\frac{||L(v_1) - L(v_2)||_W}{||v_1 - v_2||_V} = \frac{||L(v_1 - v_2)||_W}{||v_1 - v_2||_V} < ||L|| < \infty.$$

Also ist L lipschitz-stetig, und insbesondere stetig.

„$\Leftarrow$“: Sei L stetig. Dann ist L auch im Punkt $0 \in V$ stetig und daher existiert ein $\delta > 0$ mit $||L(v') - L(0)||_W = ||L(v')||_W \leq 1$ für alle $v' \in V$ mit $||v'||_V < \delta$. Wir definieren $c := \frac{2}{\delta}$. Dann gilt für alle $v \in V$ mit $||v||_V = 1$ die Abschätzung

$$||L(v)||_W = ||c \cdot L(v/c)||_W = c \cdot ||L(v/c)||_W \leq c,$$

denn $||v/c||_V = \delta/2$. Demnach ist L beschränkt.

Wir haben nun alles gezeigt. q.e.d.

2.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 2.1 einer Funktion mehrerer Veränderlicher
Eine reellwertige Funktion in mehreren Veränderlichen ist also einfach eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Als Funktionsgleichung schreiben wir $f(x_1, \ldots, x_n)$. Was kann man sich darunter vorstellen? Das ist ganz einfach. Die Funktion hängt einfach von mehreren Variablen, wir sagen mehreren Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, ab. Als Funktionswert erhalten wir einen Vektor aus dem $\mathbb{R}^m$, also einen Vektor mit m Einträgen. In der Analysis 1 haben wir Funktionen einer Veränderlicher, also Funktionen der Form $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder auch

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$) untersucht, beispielsweise $f(x) = x^2$. Nun hindert uns doch aber nichts daran, Funktionen mit der Form $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zu untersuchen, und dies ist Gegenstand der Analysis 2, also beispielsweise $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Diese Funktion besitzt zwei Veränderliche, nämlich x und y. Für x und y können wir entsprechend reelle Werte einsetzen. Solche Funktionen können stetig oder differenzierbar (siehe Kap. 3) sein.

Wir werden nun zuerst ein paar Möglichkeiten geben, wie wir Abbildungen der Form $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ visualisieren können. Im Allgemeinen wird durch $f(x, y)$ eine Fläche im x, y, z-Raum beschrieben. Wir werden jetzt sogenannte Niveaulinien, Flächen im Raum und Blockbilder studieren. Um noch eine Anschauung zu haben, können wir natürlich nur Funktionen der Form $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ verdeutlichen, aber alle Konzepte lassen sich leicht verallgemeinern, nur ist die Vorstellung dann wieder etwas schwieriger :-).

Höhenlinien (oder auch Niveaulinien)

Beispiel 22

Wir wollen die durch die Funktion

$$z := f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2}$$

beschriebene Fläche im Bereich

$$B := \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, \ -2 \leq y \leq 2\}$$

durch Höhenlinien verdeutlichen. Um Höhenlinien bzw. Niveaulinien zu berechnen, setzen wir bestimmte Werte für $z = c$ ein und erhalten so eine Funktion in Abhängigkeit von x, die wir darstellen können. Vorstellen kann man sich die Höhenlinien als eine Landkarte in einem Atlas.
Sei zum Beispiel $z = c = 0$. Dann folgt für die Funktion, dass $y = 0$. Also erhalten wir für $z = c = 0$ die x-Achse. Sei jetzt $z = c = \frac{1}{2}$. Es ergibt sich sofort

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{1 + x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(1 + x^2),$$

also eine Parabel. Dieses Spielchen können wir weiter treiben und erhalten so die Tab. 2.1.

Die Abb. 2.1 verdeutlicht die Funktion. Wir schauen sozusagen von oben auf die Funktion drauf. Erkennbar sind dann die Höhenlinien. ■

Tab. 2.1 Weitere Höhenlinien mit bestimmten Werten

Höhe	Definierte Gleichung	Beschreibung Normalform
$z = c = 0$	$y = 0$	x-Achse
$z = c = \frac{1}{2}$	$2 \cdot y = 1 + x^2$	Parabel $x^2 = 2 \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)$: Scheitel in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, Öffnung $p = 2$
$z = c = 1$	$y = 1 + x^2$	Parabel $x^2 = 1 \cdot (y - 1)$: Scheitel in $(0, 1)$, Öffnung $p = 1$
$z = c = \frac{3}{2}$	$\frac{2}{3} \cdot y = 1 + x^2$	Parabel $x^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(y - \frac{3}{2}\right)$: Scheitel in $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, Öffnung $p = \frac{2}{3}$
$z = c = -\frac{1}{2}$	$2 \cdot y = -\left(1 + x^2\right)$	Parabel $x^2 = -2 \cdot \left(y + \frac{1}{2}\right)$: Scheitel in $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, Öffnung $p = -2$
$z = c = -1$	$y = -\left(1 + x^2\right)$	Parabel $x^2 = -1 \cdot (y + 1)$: Scheitel in $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, Öffnung $p = 2$
$z = c = -\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3} \cdot y = -\left(1 + x^2\right)$	Parabel $x^2 = -\frac{2}{3} \cdot \left(y + \frac{3}{2}\right)$: Scheitel in $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, Öffnung $p = -\frac{2}{3}$

Blockbild
Das Blockbild (die folgende Darstellung wird jetzt von uns immer so bezeichnet) verdeutlichen wir uns ebenfalls an einem Beispiel.

Beispiel 23

Wir betrachten die Funktion $z := f(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$ und wollen nun ein sogenanntes Blockbild der Funktion zeichen. Um dies anzudeuten, wird für jede Spante (Der Begriff des Spants stammt aus dem Schiffsbau. Wer dies nicht sofort versteht, der frage einfach einmal wikipedia.de. Dort gibt es auch ein nettes Bildchen, das den Begriff gut erklärt.) und für den Rand jeweils die Höhe $z = f(x_i, y)$ mit $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ berechnet. Wir erhalten

$$z(x_0, y) = f(-2, y) = \frac{y}{5},\ z(x_1, y) = f(-1, y) = \frac{y}{2},\ z(x_2, y) = f(0, y) = y,$$

http://www.springer.com/978-3-642-54712-6

Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2
Mathematik von Studenten für Studenten erklärt und kommentiert
Modler, F.; Kreh, M.
2015, XIII, 392 S. 65 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-54712-6