

Leistungselektronik

Ein Handbuch Band 1 / Band 2

Bearbeitet von
Franz Zach

5. überarbeitete und erweiterte Auflage 2016. Buch. CXL, 2877 S. Hardcover

ISBN 978 3 658 04898 3

Format (B x L): 16,8 x 24 cm

[Weitere Fachgebiete > Technik > Elektronik > Leistungselektronik](#)

Zu [Inhaltsverzeichnis](#)

schnell und portofrei erhältlich bei


DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beack-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

2. Mathematische und elektrotechnische Grundlagen

Im folgenden sollen einige speziell für die Leistungselektronik wichtige Grundlagen der Mathematik und Elektrotechnik zusammengefaßt werden, die erfahrungsgemäß sehr oft in rein mathematischen bzw. elektrotechnischen Fächern höchstens gestreift werden.

2.1 Mathematische Grundlagen

Für die Leistungselektronik und hier speziell z. B. für die Berechnung von Leistungen, Netzurückwirkungen und Funkstörungen von größter Bedeutung ist die Fouriersche Reihendarstellung, die wiederum die Anwendung trigonometrischer Beziehungen (vgl. Anhang 2A) in großem Umfang erfordert. Deshalb wird im folgenden zunächst die Fouriersche Reihenentwicklung mit Beispielen aus der Leistungselektronik besprochen.

2.1.1 Fouriersche Reihen

2.1.1.1 Allgemeine Formeln

Liegt eine Funktion $f(x)$ vor, die eine Periode $\omega\tau$ hat, sodaß also

$$f(x + \omega\tau) = f(x)$$

gilt, so kann man die Fouriersche Reihe wie folgt anschreiben:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos vx + b_v \sin vx), \quad (2.1)$$

wobei

$$a_v = \frac{2}{\omega\tau} \int_{x_0}^{x_0 + \omega\tau} f(x) \cos vx \, dx; \quad v = 0, 1, \dots, \infty \quad (2.2)$$

und

$$b_v = \frac{2}{\omega\tau} \int_{x_0}^{x_0 + \omega\tau} f(x) \sin vx \, dx; \quad v = 1, \dots, \infty. \quad (2.3)$$

Der Ansatz $\frac{a_0}{2}$ in $f(x)$ ermöglicht die einheitliche Schreibweise der a_v . Bezieht man sich auf elektrische Vorgänge, so wird x bekanntlich meist als ωt geschrieben, wobei

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.4)$$

die Kreisfrequenz darstellt. Die Periode ist nunmehr $\omega T = 2\pi$ statt wie eben $\omega\tau$. $\omega\tau$ soll ausdrücken, daß selbstverständlich die Periode nicht immer als 2π angenommen werden muß, was besonders bei der in der Leistungselektronik häufig vorkommenden Analyse von sich innerhalb einer Netzspannungsperiode T mehrfach wiederholenden Vorgängen von Bedeutung ist.

Setzt man aber speziell $\omega T = 2\pi$, so wird

$$f(\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos v\omega t + b_v \sin v\omega t) \quad (2.5)$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t_0}^{\omega t_0 + 2\pi} f(\omega t) d\omega t \quad (2.6)$$

und allgemein

$$a_v = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t_0}^{\omega t_0 + 2\pi} f(\omega t) \cos v\omega t d\omega t \quad (2.7)$$

sowie

$$b_v = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t_0}^{\omega t_0 + 2\pi} f(\omega t) \sin v\omega t d\omega t. \quad (2.8)$$

Man beachte, daß der ursprüngliche Faktor $2/\omega\tau$ hier zu $2/\omega T = 1/\pi$ wird. Ferner sei darauf hingewiesen, daß k stets die Folge der natürlichen Zahlen angibt (meist inklusive 0, was sich jeweils leicht, falls nicht eigens angeschrieben, aus dem Zusammenhang ergibt; somit $k = (0, 1, 2, 3, \dots)$). v ist ein etwas allgemeinerer Index und nimmt oft nur diejenigen Werte an, die zu Harmonischen mit Amplituden $\neq 0$ gehören. So kann z. B. $v = 2k + 1$ notiert sein mit $k = 0, 1, 2, 3$, sodaß nur $c_1, c_3, c_5, \dots \neq 0$; d. h., bei einer Grundschwingung mit $f_1 = 50$ Hz existieren hier nur Oberschwingungen mit $f_3 = 150$ Hz, $f_5 = 250$ Hz etc. Siehe hiezu die später folgenden Beispiele. Andere Indizes als k und v sowie spezielle Ausnahmen bezüglich der Verwendung von k und v sind separat gekennzeichnet, falls Verwechslungen vorkommen könnten.

Andere Schreibweisen der Fourierschen Reihen sind

$$f(\omega t) = c_0 + \sum_{v=1}^{\infty} c_v \sin(v\omega t + \varphi_v) \quad (2.9)$$

mit

$$c_v = \sqrt{a_v^2 + b_v^2}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2} \quad (2.10)$$

sowie

$$\tan \varphi_v = \frac{a_v}{b_v} \quad (2.11)$$

und in komplexer Form

$$f(\omega t) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} c'_v e^{jv\omega t} \quad (2.12)$$

mit

$$c'_v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) e^{-jv\omega t} d\omega t = \begin{cases} (a_v - jb_v)/2 & \text{für } v > 0 \\ (a_{-v} + jb_{-v})/2 & \text{für } v < 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Letztere Beziehung zwischen den c'_v und den a_v, b_v läßt sich leicht durch Betrachtung der k -ten Teilschwingung

$$f_k(\omega t) = a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$$

zeigen.

Durch Umformung wird

$$f_k(\omega t) = a_k \frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j}. \quad (2.14)$$

Bezeichnet man nun die Faktoren von $e^{\pm jk\omega t}$ mit $c'_{\pm k}$, so wird

$$c'_k = \frac{a_k - jb_k}{2} \quad (2.15)$$

und

*Man kann z. B. stets $c_v \geq 0$ definieren oder aber auch negative Vorzeichen zulassen, um so manchmal (z. B. in den Gln. (2.43) ... (2.55)) das Anschreiben allgemeiner Ausdrücke zu erleichtern – in Zusammenwirken mit φ_v muß das richtige Ergebnis in Gl. (2.9) entstehen (d. h., bei Vorzeichenumkehr in c_v muß φ_v um π verändert werden). Im Text wird deshalb oft $|c_v|$ geschrieben, um positives Vorzeichen bei c_v anzudeuten. Dabei auftretende Wurzelausdrücke sind positiv zu nehmen.

$$\mathbf{c}'_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2} = \frac{a_{-k} - jb_{-k}}{2} = \bar{\mathbf{c}}'_k, \quad (2.16)$$

da einerseits alle a_k, b_k reell sind und

$$a_k = a_{-k}, \quad b_k = -b_{-k}, \quad (2.17)$$

was sich leicht durch Betrachtung von Gln. (2.7) und (2.8) ansehen läßt. $\bar{\mathbf{c}}$ bedeutet die konjugiert komplexe Zahl zu $\mathbf{c}$.

Ebenso gelten nun, falls man die Indizes r bzw. i für die Kennzeichnung von Real- bzw. Imaginärteil verwendet,

$$a_v = \mathbf{c}'_v + \mathbf{c}'_{-v} = 2\operatorname{Re}[\mathbf{c}'_v] = 2c_{vr} \quad (2.18)$$

und

$$b_v = j(\mathbf{c}'_v - \mathbf{c}'_{-v}) = -2\operatorname{Im}[\mathbf{c}'_v] = -2c_{vi}, \quad (2.19)$$

was ebenso wie die vorherige Betrachtung zeigt, daß bei Darstellung in einer komplexen Reihe die positiven und negativen* Frequenzen $v\omega$ bzw. $-v\omega$ jeweils mit der halben Amplitude behaftet sind; dies läßt sich (exakt) allerdings nur für $b_v = 0$ aussagen, da ja sonst reelle und komplexe Größen verglichen würden.

Man erhält weiters mit Gl. (2.10) für $v \neq 0$

$$c_v = \sqrt{a_v^2 + b_v^2} = 2\sqrt{c_{vr}^2 + c_{vi}^2} = 2\sqrt{|\mathbf{c}'_v|^2}. \quad (2.20)$$

2.1.1.2 Spezielle Funktionen bzw. Symmetrien (Abb. 2.1)

$$a) \quad a_0 = 0. \quad (2.21)$$

Dieser Fall tritt auf, wenn die untersuchte Funktion eine sogenannte reine Wechselgröße ist, wenn also die in jeder Periode vorkommenden positiven und negativen Flächen (in elektrischen Systemen z. B. Spannungs- oder Stromzeitflächen) gleich groß sind.

b) Gerade Funktion. Ist

$$f(-\omega t) = f(\omega t), \quad (2.22)$$

wie z. B. bei $f(\omega t) = \cos \omega t$, so gilt

$$\begin{aligned} a_v &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\omega t) \cos v\omega t d\omega t & \text{für } v = 0, 1, 2, \dots, \\ b_v &= 0 & \text{für } v = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

*Negative Frequenzen sind hier Rechengrößen und sollen keine physikalische Deutung erfahren.

Man beachte, daß die Periode 2π (auf Grund der Wahl eines Winkels als Integrationsvariable) einer Periode T bei Wahl von t als Integrationsvariable entspricht, sodaß als Faktor vor dem Integral hier $2/\pi$ steht, andernfalls $4/T$.

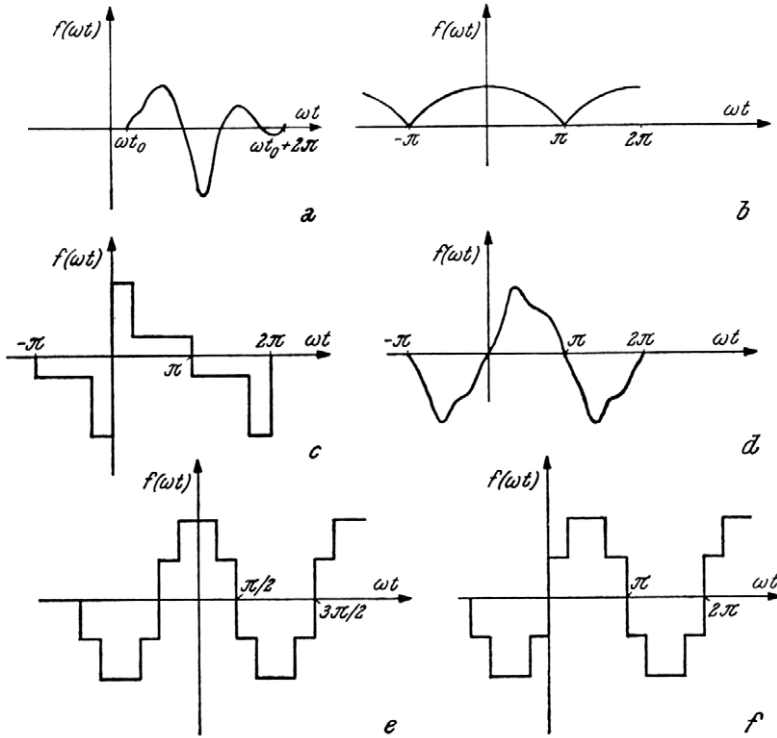


Abb. 2.1. Illustration der speziellen Funktionen nach Abschnitt 2.1.1.2. Die Buchstaben *a* bis *f* korrespondieren mit den entsprechenden Unterabschnitten.

c) Ungerade Funktion. Ist

$$f(-\omega t) = -f(\omega t), \quad (2.24)$$

wie im einfachen Fall von $f(\omega t) = \sin \omega t$, so gilt

$$a_v = 0,$$

$$b_v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \sin v \omega t d\omega t, \quad (2.25)$$

$$v = 0, 1, 2, \dots$$

d) Für

$$f(\omega t + \pi) = -f(\omega t) \quad (2.26)$$

gilt

$$\begin{aligned}
 a_{2k+1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \cos[(2k+1)\omega t] d\omega t, \\
 a_{2k} &= b_{2k} = 0, \\
 b_{2k+1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \sin[(2k+1)\omega t] d\omega t \quad (2.27) \\
 &\quad (\text{für } k = 0, 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

e) Ist

$$f(\omega t) = f(-\omega t) \text{ und } f(\omega t + \pi) = -f(\omega t), \quad (2.28)$$

so gilt

$$\begin{aligned}
 b_k &= a_{2k} = 0, \\
 a_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\omega t) \cos[(2k+1)\omega t] d\omega t, \quad (2.29) \\
 k &= 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

f) Ist

$$f(\omega t) = -f(-\omega t) \text{ und } f(\omega t + \pi) = -f(\omega t), \quad (2.30)$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
 a_k &= b_{2k} = 0, \\
 b_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\omega t) \sin[(2k+1)\omega t] d\omega t, \quad (2.31) \\
 k &= 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Oft ist es zusätzlich günstig, die zu analysierende Funktion mit den Cosinus- und Sinus-Schwingungen der verschiedenen Frequenzen zu vergleichen. Man sieht dann oft sofort (bzw. kann man so die Fourieranalyse überprüfen), daß verschiedene Fourierkoeffizienten null sind, da die entsprechenden Schwingungen nicht mit der zu untersuchenden Funktion korrespondieren. So sieht man z. B. bei der Funktion nach Abb. 2.1f, daß $\sin \omega t$ mit der zu untersuchenden Funktion übereinstimmt, während sich $\sin 2\omega t$ gerade umgekehrt verhält. $\{\sin 2\omega t$ hat gleichen Verlauf in den Intervallen $[0, \pi]$ und $[\pi, 2\pi]$, während $f(\omega t)$ nach Abb. 2.1f ebenso

wie $\sin \omega t$ in diesen Intervallen zwar die gleiche Form, aber mit wechselndem Vorzeichen, aufweist.}

Die (verbleibenden) Fourierkoeffizienten $\neq 0$ können in vielen in der Leistungselektronik vorkommenden Fällen graphisch bestimmt werden [2.18], [2.19]. Dies gilt insbesondere für selbstgeführte Wechselrichter, deren Ausgangsspannungen in den verschiedenen Zeitintervallen konstant sind. Weiters wechseln die Spannungsniveaus meist bei Vielfachen von 30° , sodaß man die bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten auftretenden Integrale abschnittsweise durchführen und sich hierbei die Tatsache zunutze machen kann, daß die Flächen unter den Sinus- (bzw. Cosinus-) Funktionen in verschiedenen Intervallen gleich $\frac{1}{2}$ sind (Abb. 2.2). Oft aber können andere Funktionen durch abschnittsweise konstante Werte angenähert werden.

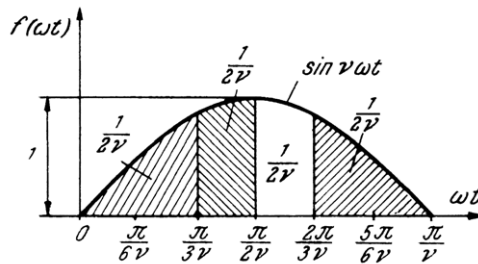


Abb. 2.2. Flächeninhalte unter der Sinuslinie zur vereinfachten graphischen Berechnung von Fourierkoeffizienten

Praktisch geht man nun folgendermaßen vor:

1. Zeichnen der zu untersuchenden Funktion mit einer Einheitsamplitude;
2. Zeichnen eines Einheitssinus mit der Frequenz der Grundharmonischen;
3. Bildung des Integralprodukts für die Grundschwingung;
4. Zeichnen eines Einheitssinus für die zu bestimmende Harmonische mit der entsprechenden Frequenz;
5. Bildung des Integralprodukts für die jeweilige Harmonische unter Berücksichtigung der negativ zu zählenden Flächen;
6. Das Verhältnis der beiden Integralprodukte ergibt das Verhältnis der Harmonischen zur Grundschwingung.

Abbildung 2.3 zeigt zwei Beispiele. Hierbei wäre zu beachten, daß bei beiden Funktionen der vorhin zitierte Fall f) vorliegt. Der Überprüfung halber sollen aber alle Harmonischen berechnet werden. Allerdings sieht man sofort, daß eine Untersuchung des Intervalles $[0, \pi]$ genügt, wie dies bereits bei Fall c) gemacht wurde. Die in Abb. 2.3 eingetragenen Ergebnisse müssen dann mit dem Faktor $2/\pi$ versehen werden (siehe Gl. (2.25)).

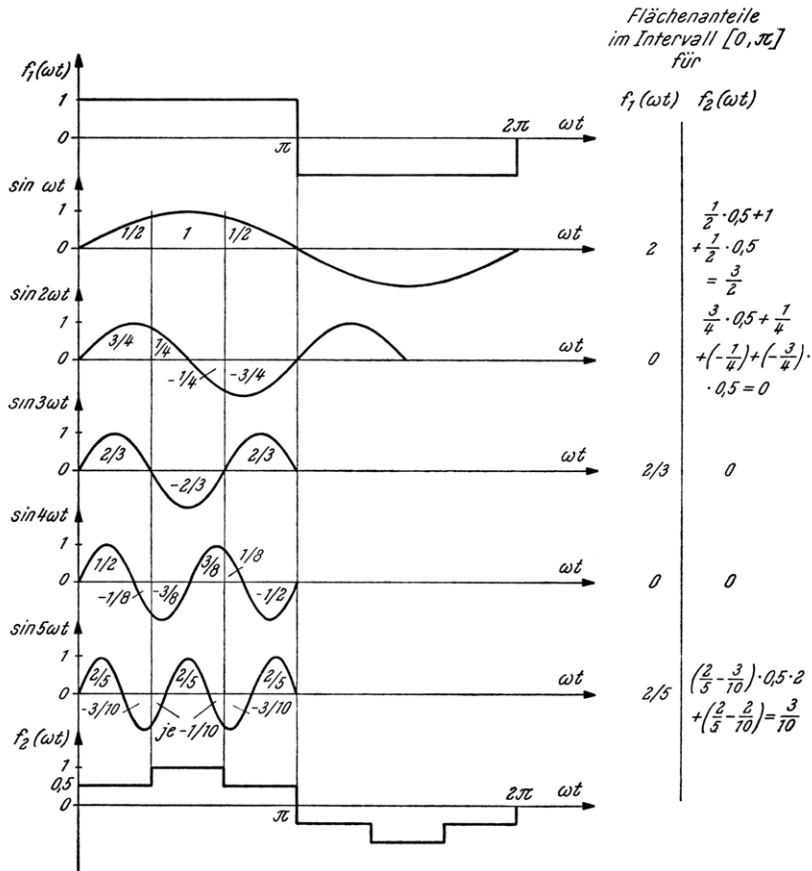


Abb. 2.3. Beispiele zur graphischen Auswertung der Fourierkoeffizienten. Die Einzelanteile der Sinusflächen speziell für die Intervalle gleichbleibender Amplitude von $f_2(\omega t)$ sind unter den Kurven $\sin v\omega t$ angegeben, müssen aber noch mit dem jeweiligen Wert von $f_2(\omega t)$ multipliziert werden, um die Fourierkoeffizienten zu ergeben. Für $f_1(\omega t)$ vereinfacht sich die Rechnung, weil man nur die Summe aller Einzelanteile der Sinusflächen addieren muß.

2.1.1.3 Wichtige Fourierreihen

Im folgenden sollen einige grundlegende Funktionen allgemeiner Natur und solche, die in der Leistungselektronik speziell von großer Bedeutung sind, analysiert werden. Weitere Fourieranalysen finden sich bei den entsprechenden Schaltungen, sofern diese Analysen mehr von spezieller Bedeutung sind (z. B. S. 313f., 492f.).

2.1.1.3.1 Allgemeine Verläufe

A. Rechteckschwingungen

Es handelt sich hierbei um die vereinfachten Formen der Ströme leistungselektronischer Schaltungen. Die Vereinfachungen betreffen Idealisierungen bezüglich

der Transformatorstreuungen ($=0$) und bedeuten Lastinduktivität $=\infty$, wie dies in Kapitel 4 näher erläutert ist. Formen mit nur positiven Werten treten z. B. bei Ventilströmen netzgeführter Schaltungen auf, solche auch mit negativen Werten bei Transformatorströmen (siehe Abschnitt 4.2, speziell Tafel 6.1). Aber auch z. B. Ausgangsspannungsformen selbstgeführter Wechselrichter werden durch Formen wie in Abb. 2.4 dargestellt (man muß nur I z. B. durch U_d ersetzen, siehe Spannungsformen z. B. in den Abschnitten 4.3 und 5.6).

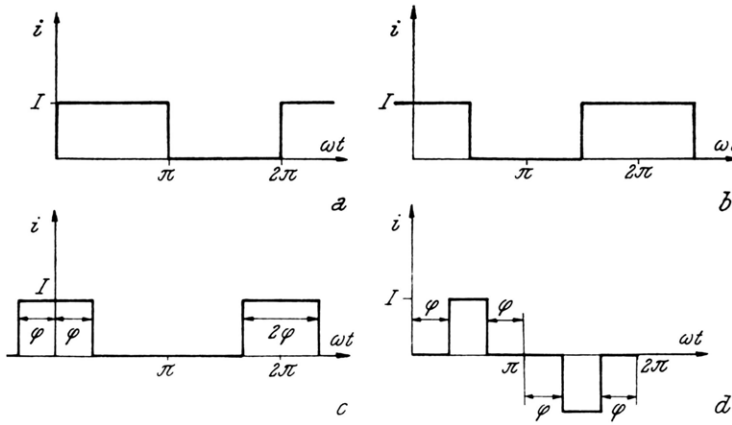


Abb. 2.4. Rechteckschwingungen. *a* und *b* Tastverhältnis $\frac{1}{2}$ *, *c* allgemeine Form eines Ventilstromes (idealisiert), *d* allgemeine Form des Transformatorstromes einer leistungselektronischen Schaltung (idealisiert). Bezüglich Verschiebung in Richtung ωt oder i -Achse siehe Abschnitt 2.1.1.4C

Die Fourierkoeffizienten ergeben sich zu Abb. 2.4 wie folgt:

$$a) \quad c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{I}{2}, \quad a_\mu = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.32)$$

$$c_v = b_v = \frac{2}{\pi} \frac{I}{v}; \quad v = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2.33)$$

$$b) \quad c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{I}{2}, \quad b_\mu = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, \\ c_v = a_v = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{I}{v}; & v = 4k + 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ -\frac{2}{\pi} \frac{I}{v}; & v = 4k + 3, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (2.34)$$

*Das Tastverhältnis (v bzw. D) gibt die Dauer des Wertes $i = I$ im Verhältnis zur ganzen Periode an. Nur bei Sinusschwingungen soll die Amplitude als $\hat{I}$ bezeichnet werden, hier ist sie I (gelegentlich auch als „Dachwert“ oder „Plateauwert“ bezeichnet, vgl. Abschnitt 11.3.4.3). Bei großen Leistungen wird oft v (von „Verhältnis“) verwendet, bei kleineren Werten (wie z. B. bei Schaltnetzteilen, Kapitel 11 und 12) international meist D (von „Duty Cycle“).

$$c) \quad c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{I\varphi}{2}, \quad b_\mu = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.35)$$

$$c_v = a_v = \frac{2I \sin v\varphi}{\pi v}; \quad v = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.36)$$

$$d) \quad c_0 = 0, \quad a_\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2.37)$$

$$c_v = b_v = \frac{4I \cos v\varphi}{\pi v}; \quad v = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.38)$$

Untersuchungen zu verschiedenen Werten von φ in Gl. (2.38) und zu weiteren Rechteckschwingungen werden in Abschnitt 5.6.4 (Tab. 5.1 ... 5.3) durchgeführt*.

B. Trapeze

Sind in den Transformatoren Streuinduktivitäten > 0 vorhanden, so erhalten die Stromflanken endliche Steilheit und können durch Abb. 2.5 angenähert werden.

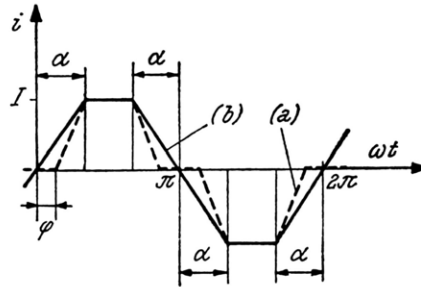


Abb. 2.5. Näherung realer Stromverläufe leistungselektronischer Schaltungen durch Trapeze (Beispiel: Primärseite einer einphasigen Mittelpunktschaltung, siehe Kapitel 4, z. B. Abb. 4.38). *a* allgemeiner Winkel φ , *b* für $\varphi = 0^\circ$

Die Analyse ergibt beim allgemeinen Verlauf (Abb. 2.5a)

$$c_0 = 0,$$

$$c_v = b_v = \frac{4I}{\pi(\alpha - \varphi)} \frac{\sin v\alpha - \sin v\varphi}{v^2}; \quad v = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

bzw. im speziellen Fall (Abb. 2.5b, $\varphi = 0^\circ$)

$$c_0 = 0;$$

$$c_v = b_v = \frac{4I}{\pi\alpha} \frac{\sin v\alpha}{v^2}; \quad v = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

*Legt man die Funktion ω wie in Abb. 2.4a und d, kann man von Sinusansatz sprechen, weil nur die Sinusglieder in der Fourierreihe $\neq 0$ sind (also alle $a_\mu = 0$; $\mu = 1, 2, \dots$; $c_0 = \frac{a_0}{2} \neq 0$ bei Abb. 2.4a), bei Abb. 2.4b und c hingegen von Cosinusansatz (aus analogem Grund; $b_\mu = 0$; $\mu = 0, 1, 2, \dots$). Man sieht daraus auch, wie sich die Fourierschen Reihen bei Verschiebung der Achsen verhalten.

Für letzteren Fall ergibt sich z. B. $c_1 = 1,22I$ für $\alpha = \pi/6$; die Grundschriftungsamplitude geht also (analog zum Rechteckimpuls, Abb. 2.7) noch über das Trapez hinaus.

Hinweis: Aus den bereits gemachten und noch folgenden Analysen ist zu sehen, daß Funktionen mit unendlich steilen Flanken Fourierkoeffizienten aufweisen, die wie $1/v$ gegen 0 gehen, während solche mit Flanken endlicher Steilheit Koeffizienten haben, die etwa wie $1/v^2$ gegen 0 streben. Dies ist schon dadurch klar, daß eine Sprungfunktion (0 für $t < 0$, 1 für $t > 0$) ein Spektrum der Form $1/v$ aufweist und Formen der Abb. 2.4 aus zeitverschobenen Sprungfunktionen zusammengesetzt werden können.

Diese Aussage gewinnt besonders bei elektromagnetischen Beeinflussungen (EMB, Kapitel 7) an Bedeutung, da zufolge des Induktionsgesetzes

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

bei

$$i_v = \frac{I}{v} \sin v\omega t, \quad (2.41)$$

somit

$$e_v = -\omega LI \cos v\omega t \quad (2.42)$$

von der Ordnungszahl unabhängig wird und die Beeinflussungen bis zu unendlich hohen Frequenzen reichen. Dieser Fall tritt in der Realität nicht auf, da unendlich steile Flanken praktisch nicht vorkommen. Man kann aber so plausibel erklären, daß je steilere Flanken auftreten, desto größere Störungen durch elektromagnetische Beeinflussungen entstehen; vgl. Abschnitt 7.1 und Unterschrift zu Abb. 11.4.

C. Aus Rampenfunktionen zusammengesetzte Spannungsformen

Der Vollständigkeit halber sollen hier noch Funktionen untersucht werden, wie sie z. B. bei Steuerschaltungen der Leistungselektronik, aber auch in den Leistungskreisen selbst (z. B. Gleichstromsteller, Abschnitt 4.3) vorkommen können.

Als Rampenfunktion wird eine Funktion, die linear mit der Zeit ansteigt bzw. abfällt, definiert.

Die Analyse ergibt mit jeweils $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ zu Abb. 2.6:

$$\text{a) } \quad c_0 = 0 \quad c_v^* = b_v = \begin{cases} \frac{8U}{\pi^2} \frac{1}{v^2}; & v = 4k + 1, \\ -\frac{8U}{\pi^2} \frac{1}{v^2}; & v = 4k + 3, \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\text{b) } \quad c_0 = 0 \quad c_v = a_v = \frac{8U}{\pi^2} \frac{1}{v^2}; \quad v = 2k + 1, \quad (2.44)$$

*Würde nur $c_v \geq 0$ zugelassen, müßte man in diesen Ausdrücken den Absolutbetrag nehmen.

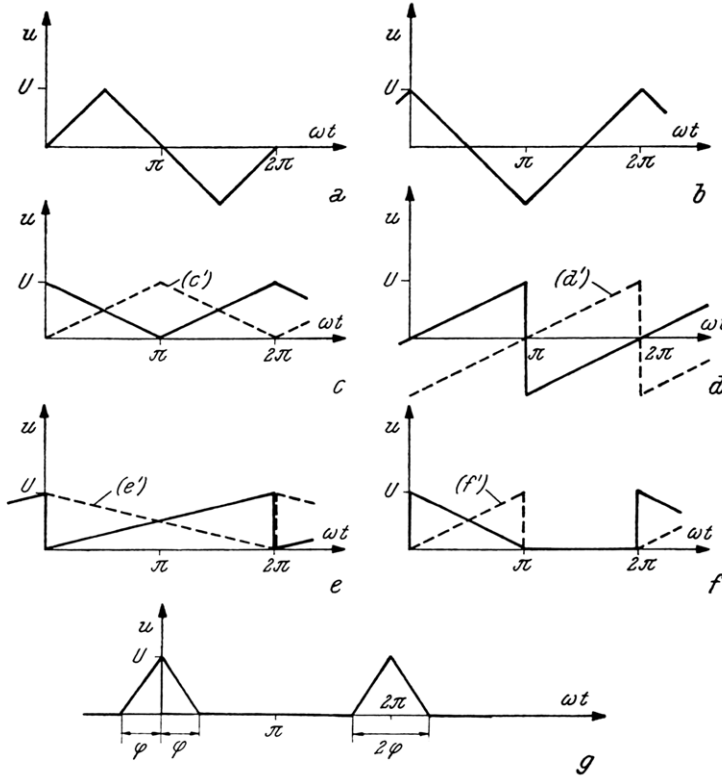


Abb. 2.6. Spannungsförmungen bestehend aus Rampenförmungen. Bezüglich Verschiebungen in Richtung ωt oder u -Achse siehe Abschnitt 2.1.1.4C. a , b , c und g mögen als Dreiecksförmungen, d , e und f als Sägezahnförmungen definiert werden.

$$c) \quad c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{U}{2}, \quad c_v = a_v = \frac{4U}{\pi^2} \frac{1}{v^2}; \quad v = 2k + 1, \quad (2.45)$$

$$c') \quad c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{U}{2}, \quad c_v^* = a_v = -\frac{4U}{\pi^2} \frac{1}{v^2}; \quad v = 2k + 1, \quad (2.46)$$

$$d) \quad c_0 = 0, \quad c_v^* = b_v = \frac{2U}{\pi} \frac{(-1)^{v+1}}{v}; \quad v = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.47)$$

$$d') \quad c_0 = 0, \quad c_v^* = b_v = -\frac{2U}{\pi} \frac{1}{v}; \quad v = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.48)$$

$$e) \quad c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{U}{2}, \quad c_v^* = b_v = -\frac{U}{\pi} \frac{1}{v}; \quad v = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.49)$$

$$e') \quad \text{wie e), nur} \quad c_v = b_v = \frac{U}{\pi v}; \quad v = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.50)$$

*Würde nur $c_v \geq 0$ zugelassen, müßte man in diesen Ausdrücken den Absolutbetrag nehmen.

$$\text{f) } c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{U}{4}, \quad a_v = \frac{2U}{\pi^2} \frac{1}{v^2}; \quad v = 2k + 1, \quad (2.51)$$

$$b_v = \frac{U}{\pi} \frac{1}{v}; \quad v = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.52)$$

$$c_v = \sqrt{a_v^2 + b_v^2} = \begin{cases} \frac{U}{\pi} \frac{1}{v}; & v = 2k, \\ \frac{U}{\pi} \frac{1}{v} \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2 v^2}}; & v = 2k + 1, \end{cases} \quad (2.53)$$

$$\text{f')} \quad \text{wie f), nur} \quad a_v = -\frac{2U}{\pi^2} \frac{1}{v^2}; \quad v = 2k + 1, \quad (2.54)$$

$$\text{g) } c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{U\varphi}{2\pi} \quad c_v = a_v = \frac{2U}{\pi\varphi} \frac{1 - \cos v\varphi}{v^2}; \quad v = 1, 2, 3, \dots \quad (2.55)$$

2.1.1.3.2 Spezielle Funktionen der Leistungselektronik

Die physikalische Entstehung der einzelnen im folgenden gezeigten Strom- und Spannungsformen kann erst in Kapitel 4 erklärt werden. Dennoch sollen bereits jetzt die Schaltungsbezeichnungen eingeführt werden. Dieser Weg, die Analysen nicht erst bei den Schaltungen zu bringen, dürfte die Übersicht in Kapitel 4 sehr fördern. Es steht dem Leser frei, die folgenden Betrachtungen eventuell erst nach Studium der Schaltungen (Kapitel 4) durchzusehen. Die Analysen werden teilweise ausführlich dargestellt, um die Berechnung ähnlicher Verläufe leicht zu ermöglichen, bzw. kann der Leser die Rechnungen als Übungsaufgabe zunächst selbst ausarbeiten und dann vergleichen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird $\omega t = x$ gesetzt.

A. Primärstrom einer zweipulsigen Schaltung

Die in Abb. 2.7 dargestellten Verläufe treten z. B. bei einphasiger Mittelpunktschaltung bzw. einphasiger vollgesteuerter Brückenschaltung jeweils im idealisierten Fall und ohne Freilaufdioden auf (Tafel 6.1). Man kann sagen, daß es sich um typische Stromverläufe von zweipulsigen netzgeführten Schaltungen handelt. Aber auch Spannungen selbstgeführter Schaltungen weisen Formen gemäß Abb. 2.7 auf (siehe Abschnitt 4.3).

Die Analyse ergibt (Gln. (2.37) und (2.38) mit $\varphi = 0$ für Abb. 2.7b*)

$$a_v = 0, \quad b_v = \frac{4I}{\pi} \frac{1}{v}; \quad v = 2k + 1,$$

$$\frac{|c_v|}{I} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{v}; \quad v = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

*Für Abb. 2.7a gelten $a_v = 0$ und für die a_v dieselben Absolutbeträge (wie für die b_v zu Abb. 2.7b), aber mit alternierendem Vorzeichen (siehe Tabelle).

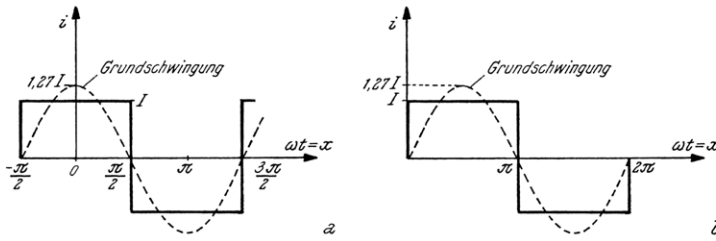


Abb. 2.7. Strom mit Zweipunktverhalten (d. h. $\pm I$), typisch für zweipulsige netzgeführte Schaltungen, aber auch für die Form von Spannungen selbstgeführter Schaltungen (Abschnitt 4.3) für (a) Cosinusansatz (Definition vgl. Fußnote auf S. 15) mit a_v gemäß Gl. (2.34), $b_v = 0$. Für den Sinusansatz (b) wird die Rechteckschwingung um $\omega t = \frac{\pi}{2}$ in positiver ωt -Richtung verschoben.

mit der Tabelle [Die a_v gelten für den Cosinusansatz gemäß Abb. 2.7a, die b_v für den Sinusansatz (Abb. 2.7b), die $|c_v|$ für beide Fälle; Spektrum siehe Abb. 2.8.]

zu Abb.	v	1	3	5	7	9
2.7a Cos-Ansatz	a_v/I	1,273	-0,424	0,254	-0,182	0,141
2.7b Sin-Ansatz	$b_v/I = c_v /I$	1,273	0,424	0,254	0,182	0,141

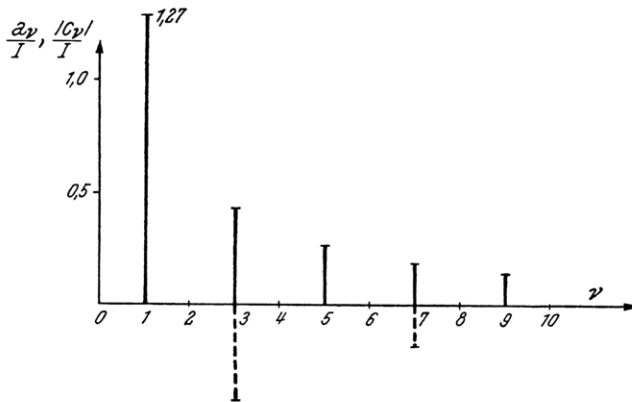


Abb. 2.8. Amplitudenspektrum zu Abb. 2.7b (Für Abb. 2.7a gelten dieselben Absolutbeträge, aber mit alternierenden Vorzeichen, strichliert dargestellt.)

B. Primärstrom einer dreipulsigen Schaltung

Bei dem in Abb. 2.9 dargestellten Verlauf handelt es sich um ein typisches Beispiel des Primärstromes einer dreipulsigen Schaltung (Tafel 6.1). Die Analyse führt mit $k = 0, 1, 2, \dots$ z. B. bei Abb. 2.9a (s. a. Fußnote S. 543) zu

$$a_v = \frac{I}{\pi} \left[\int_0^{2\pi/3} \cos vx \, dx - \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \cos vx \, dx \right] = \frac{2I}{\pi v} \sin \frac{2v\pi}{3} \left[1 - \cos \frac{2v\pi}{3} \right], \quad (2.57)$$

$$\frac{a_v}{I} = 0 \quad \text{für} \quad v = 3k; \quad \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \frac{1}{v} \quad \text{für} \quad v = 3k + 1; \quad -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \frac{1}{v} \quad \text{für} \quad v = 3k + 2,$$

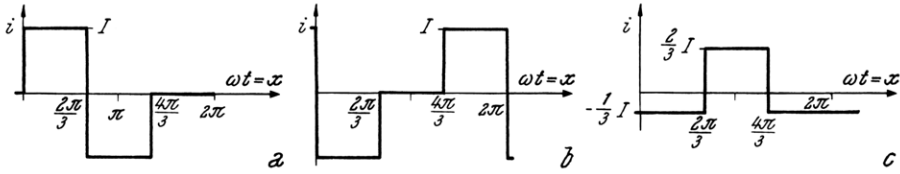


Abb. 2.9. Typische Primärströme einer dreipulsigen Schaltung (vgl. Abb. 6.47 und Tafel 6.1). a Lage analog zu Abb. 6.47h mit $a_v \neq 0$, $b_v \neq 0$; b für Sinusansatz (alle $a_v = 0$); c zu Abb. 6.47f und g, aber mit Lage für Cosinusansatz (alle $b_v = 0$)

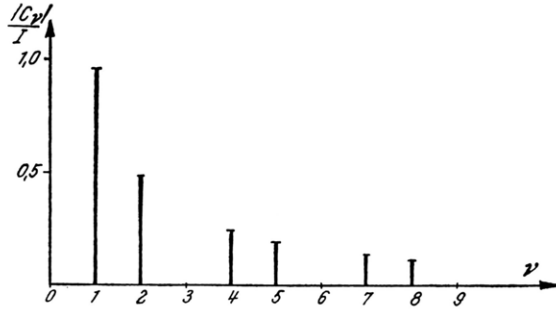


Abb. 2.10. Amplitudenspektrum zu Abb. 2.9a; gilt auch für $-b_v$ zu Abb. 2.9b (D. h., alle b_v sind negativ.)

$$b_v = \frac{I}{\pi} \left[\int_0^{2\pi/3} \sin vx \, dx - \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \sin vx \, dx \right] = \frac{2I}{\pi v} \cos \frac{2v\pi}{3} \left[\cos \frac{2v\pi}{3} - 1 \right], \quad (2.58)$$

$$\frac{b_v}{I} = 0 \quad \text{für } v = 3k; \quad \frac{3}{2\pi v} \quad \text{für } v = 3k + 1 \text{ und } v = 3k + 2,$$

$$\begin{aligned} \frac{|c_v|}{I} &= \frac{2}{\pi v} \sqrt{\sin^2 \frac{2v\pi}{3} \left(1 - \cos \frac{2v\pi}{3} \right)^2 + \cos^2 \frac{2v\pi}{3} \left(\cos \frac{2v\pi}{3} - 1 \right)^2} \\ &= \frac{2[1 - \cos(2v\pi/3)]}{\pi v} = \begin{cases} 0; & v = 3k, \\ \frac{3}{\pi v}; & v = 3k + 1, \quad v = 3k + 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Die numerische Auswertung führt zu folgender Tabelle* (mit Abb. 2.10)

*Die c_v gelten für Abb. 2.9a und b (allgemein), die b_v für Abb. 2.9b (Sinusansatz), die a_v für Abb. 2.9c (Cosinusansatz). Bei Verschiebung der Funktion nach Abb. 2.9b in ωt -Richtung ergeben sich i. a. zu den bereits angegebenen Ordnungszahlen (1,2,4,5,7,8, ...) sowohl Cosinus- als auch Sinusglieder mit verschiedenen Amplituden und Vorzeichen, wie dies auch für Abb. 2.9a der Fall ist. Bei Verschiebung der Funktion nach Abb. 2.9b um $\pi/2$ in Richtung negativer ωt -Werte erhält man zu jeder Harmonischen nur entweder eine Cosinus- oder eine Sinuskomponente (auch mit verschiedenen Vorzeichen). Hier existiert kein Cosinusansatz. Für die Formen Abb. 6.47f und g (e unterscheidet sich nur durch den Mittelwert; vgl. auch Tafel 6.1.) ergeben sich bei Normierung des positiven Dachwertes auf $2/3$ (somit der negativen Rechteckamplituden auf $-1/3$) für den Cosinusansatz $a_0 = 0$, $a_1 = -I\sqrt{3}/\pi$, $a_2 = I\sqrt{3}/(2\pi)$, $a_3 = 0$, $a_4 = -I\sqrt{3}/(4\pi)$, $a_5 = I\sqrt{3}/(5\pi)$, $a_6 = 0$, $a_7 = -I\sqrt{3}/(7\pi)$, $a_8 = I\sqrt{3}/(8\pi)$, $a_9 = 0$, $a_{10} = -I\sqrt{3}/(10\pi)$, $a_{11} = I\sqrt{3}/(11\pi)$, $a_{12} = 0, \dots$ Bei Verschiebungen gelten die Anmerkungen zu Abb. 2.9b in entsprechender Weise, wobei nun aber kein Sinusansatz gefunden werden kann.

zu Abb.	v	1	2	4	5	7	8
2.9a,b allgemein	$ c_v /I$	0,955	0,477	0,238	0,191	0,136	0,119
2.9b Sin-Ansatz	b_v/I	-0,955	-0,477	-0,238	-0,191	-0,136	-0,119
2.9c Cos-Ansatz	a_v/I	-0,551	0,276	-0,138	0,110	-0,079	0,069

C. Typischer Strom einer sechspulsigen Brückenschaltung (Abb. 2.11, vgl. Abb. 4.47d und Tafel 6.1)

Die Analyse ergibt mit $k = 0, 1, 2, \dots$ für die „allgemeine“ Lage (durchgezogen in Abb. 2.11a; Amplitudenspektrum siehe Abb. 2.12)

$$a_v = \frac{I}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos vx \, dx = \frac{I}{\pi} \left[\int_{\pi/3}^{\pi} \cos vx \, dx - \int_{4\pi/3}^{2\pi} \cos vx \, dx \right]$$

$$= \frac{I}{\pi v} \sin \frac{v\pi}{3} [(-1)^v - 1], \quad (2.60)$$

$$a_0 = 0; \quad a_v = 0 \text{ für } v = 2k \quad \text{und} \quad a_v = \frac{-2I}{\pi v} \sin \frac{v\pi}{3} \text{ für } v = 2k + 1, \quad (2.61)$$

$$b_v = \frac{I}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin vx \, dx = \frac{I}{\pi} \left[\int_{\pi/3}^{\pi} \sin vx \, dx - \int_{4\pi/3}^{2\pi} \sin vx \, dx \right]$$

$$= \frac{I}{\pi v} [1 - (-1)^v] \left[\cos \frac{v\pi}{3} + 1 \right], \quad (2.62)$$

$$c_v = \frac{I[1 - (-1)^v]}{\pi v} \sqrt{\sin^2 \frac{v\pi}{3} + \left(\cos \frac{v\pi}{3} + 1 \right)^2}$$

$$= \frac{I\sqrt{2}}{\pi v} [1 - (-1)^v] \sqrt{1 + \cos \frac{v\pi}{3}}, \quad (2.63)$$

$$\left| \frac{c_v}{I} \right| = \begin{cases} 0; & v = 2k \quad \text{und} \quad v = 6k + 3, \\ \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{v}; & v = 6k + 1 \quad \text{und} \quad v = 6k + 5. \end{cases} \quad (2.64)$$

zu Abb.	v	1	5	7	11	13
2.11a allgemein	$ c_v /I$	1,103	0,221	0,158	0,100	0,085
2.11a Sin-Ansatz	b_v/I	1,103	-0,221	-0,158	0,100	0,085
2.11a Cos-Ansatz	a_v/I	1,103	-0,221	0,158	-0,100	0,085
2.11b Sin-Ansatz	b_v/I	1,910	0,382	0,273	0,174	0,147
2.11b Cos-Ansatz	a_v/I	1,910	0,382	-0,273	-0,174	0,147

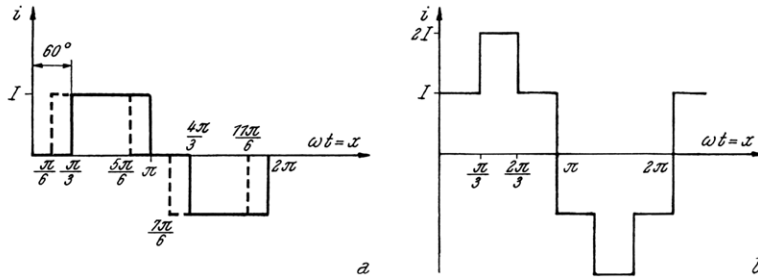


Abb. 2.11. Typischer Stromverlauf einer sechspulsigen Schaltung (Tafel 6.1: z. B. Drehstrombrückenschaltung), aber auch Spannungsverläufe selbstgeführter Schaltungen (Abb. 4.119 und 4.121); *a* (durchgezogen) für „allgemeine“ Lage eines 120°-Blocks; (strichliert) für Sinusansatz z. B. i_s [oder auch für $i_W(\text{Dy})$ bzw. $i_W(\text{Yy})$, aber auf $I = I_d$ normiert] laut Tafel 6.1 bei B6; Cosinusansatz bei weiterer Verschiebung um $\pi/2$ in negativer ωt -Richtung; *b* für Sinusansatz für $(-i_L(\text{Dy}))$ laut Tafel 6.1 bei B6; Cosinusansatz bei Verschiebung um $\pi/2$ in negativer ωt -Richtung; Treppenkurve mit Analyse [mit Placetauert $\frac{2}{3}U_d$ statt (wie hier) $2I$] siehe nach Abb. 4.125c, Gl. (4.385)

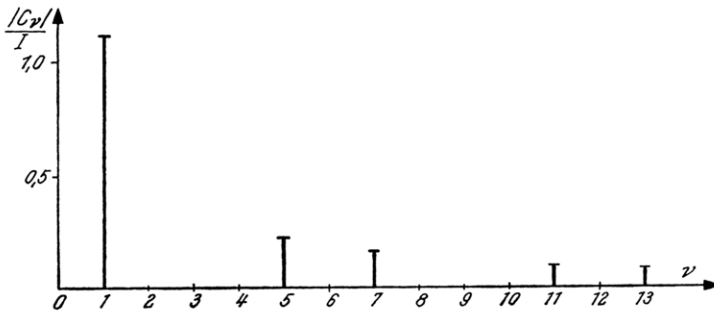


Abb. 2.12. Amplitudenspektrum der $|c_v|$ zu Abb. 2.11a (allgemein)

D. Stromverlauf aus Sinus-Kuppen

Man sieht sofort, daß $a_0/2 = c_0 = 0$ und, da $f(\omega t) = -f(-\omega t)$, $a_v = 0$; $v = 1, 2, 3, \dots$. Für die Analyse ist es in weiterer Folge erforderlich, die beiden folgenden Nebenrechnungen durchzuführen [2.1] ... [2.3]:

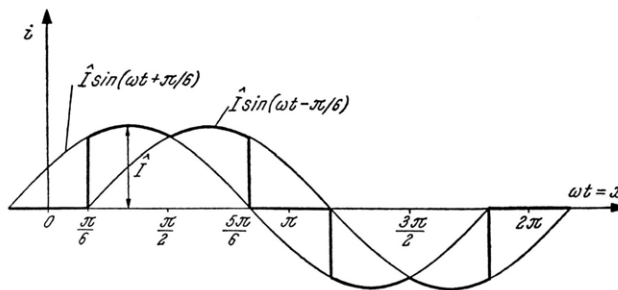


Abb. 2.13. Stromverlauf in den primären Zuleitungen einer dreiphasigen Brückenschaltung (d. h. sechspulsig) bei ohmscher Last (Tafel 6.1)

$$\begin{aligned}
\int_F^G \sin(x + \alpha) \sin vx \, dx &= -\cos(x + \alpha) \sin vx \Big|_F^G + v \int_F^G \cos(x + \alpha) \cos vx \, dx \\
&= -\cos(x + \alpha) \sin vx \Big|_F^G + v \left\{ \sin(x + \alpha) \cos vx \Big|_F^G + v \int_F^G \sin(x + \alpha) \sin vx \, dx \right\},
\end{aligned}$$

somit

$$(1 - v^2) \int_F^G \sin(x + \alpha) \sin vx \, dx = -\cos(x + \alpha) \sin vx \Big|_F^G + v \sin(x + \alpha) \cos vx \Big|_F^G$$

für $v \neq \pm 1$. (2.65)

F und G sind Integrationsgrenzen.

$$\begin{aligned}
\int_F^G \sin(x + \alpha) \cos vx \, dx &= \left\{ -\cos(x + \alpha) \cos vx \Big|_F^G - v \int_F^G \cos(x + \alpha) \sin vx \, dx \right\} \\
&= \left\{ -\cos(x + \alpha) \cos vx \Big|_F^G - v \left[\sin(x + \alpha) \cos vx \Big|_F^G - v \int_F^G \sin(x + \alpha) \cos vx \, dx \right] \right\},
\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$(1 - v^2) \int_F^G \sin(x + \alpha) \cos vx \, dx = -\cos(x + \alpha) \cos vx \Big|_F^G + v \sin(x + \alpha) \sin vx \Big|_F^G$$

für $v \neq \pm 1$. (2.66)

Für $v = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin x \, dx + \int_{3\pi/6}^{5\pi/6} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \sin x \, dx \right\} \\
&\quad + \int_{7\pi/6}^{9\pi/6} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin x \, dx + \int_{9\pi/6}^{11\pi/6} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \sin x \, dx,
\end{aligned}$$

(2.67)

wobei mit

$$\sin(x \pm \alpha) = \sin x \cos \alpha \pm \cos x \sin \alpha, \tag{2.68}$$

$$\sin(x \pm \alpha) \sin x = \sin^2 x \cos \alpha \pm \cos x \sin x \sin \alpha \tag{2.69}$$

und

$$\cos x \sin x = \frac{\sin 2x}{2}, \tag{2.70}$$

weilers mit $\alpha = \frac{\pi}{6}$ für das allgemeine Glied aus Gl. (2.67) folgt [2.1] ... [2.3]:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \int_F^G \sin^2 x \, dx \pm \frac{1}{4} \int_F^G \sin 2x \, dx = \frac{1}{4} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \right|_F^G + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \mp \frac{\cos 2x}{2} \right|_F^G \}.$$

Man erhält nun

$$\frac{b_1}{\hat{I}} = \frac{(2\pi\sqrt{3}+9)}{6\pi}. \quad (2.71)$$

Für b_ν mit $\nu = 2, 3, 4, \dots$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{\hat{I}} &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi/6}^{3\pi/6} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \nu x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{3\pi/6}^{5\pi/6} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \sin \nu x \, dx \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{7\pi/6}^{9\pi/6} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \nu x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{9\pi/6}^{11\pi/6} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \sin \nu x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left[-\cos \frac{4\pi}{6} \sin \nu \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \nu \frac{\pi}{6} + \nu \sin \frac{4\pi}{6} \cos \nu \frac{\pi}{2} \right. \\ &\quad - \nu \sin \frac{\pi}{3} \cos \nu \frac{\pi}{6} - \cos \frac{4\pi}{6} \sin \nu \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{2\pi}{6} \sin \nu \frac{3\pi}{6} + \nu \sin \frac{4\pi}{6} \cos \nu \frac{5\pi}{6} \\ &\quad - \nu \sin \frac{2\pi}{6} \cos \nu \frac{3\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{3} \sin \nu \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{4\pi}{3} \sin \nu \frac{7\pi}{6} + \nu \sin \frac{10\pi}{4} \cos \nu \frac{3\pi}{2} \\ &\quad - \nu \sin \frac{4\pi}{3} \cos \nu \frac{7\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{3} \sin \nu \frac{11\pi}{6} + \cos \frac{4\pi}{3} \sin \nu \frac{3\pi}{2} \\ &\quad \left. + \nu \sin \frac{5\pi}{3} \cos \nu \frac{11\pi}{6} - \nu \sin \frac{4\pi}{3} \cos \nu \frac{3\pi}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{2} \sin \nu \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \nu \frac{\pi}{6} + \nu \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \nu \frac{\pi}{2} - \nu \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \nu \frac{\pi}{6} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \nu \frac{5\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \nu \frac{\pi}{2} + \nu \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \nu \frac{5\pi}{6} - \nu \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \nu \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \nu \frac{3\pi}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin \nu \frac{7\pi}{6} - \nu \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \nu \frac{3\pi}{2} + \nu \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \nu \frac{7\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin \nu \frac{11\pi}{6} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin \nu \frac{3\pi}{2} - \nu \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \nu \frac{11\pi}{6} + \nu \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \nu \frac{3\pi}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\pi(1-\nu^2)} \left[2 \sin \nu \frac{\pi}{2} + \sin \nu \frac{5\pi}{6} - \nu \sqrt{3} \cos \nu \frac{\pi}{6} + \nu \sqrt{3} \cos \nu \frac{5\pi}{6} + \sin \nu \frac{\pi}{6} \right]; \\ &\quad \nu = 2, 3, 4, \dots, \end{aligned} \quad (2.72)$$

wobei beachtet wurde, daß mit

$$v \frac{11\pi}{6} = v \cdot 2\pi - v \frac{\pi}{6}, \quad v \frac{3\pi}{2} = v \cdot 2\pi - \frac{v\pi}{2}, \quad v \frac{7\pi}{6} = v \cdot 2\pi - v \frac{5\pi}{6} \quad (2.73)$$

die Äquivalenzen

$$\sin v \frac{\pi}{6} = -\sin v \frac{11\pi}{6},$$

$$\sin v \frac{\pi}{2} = -\sin v \frac{3\pi}{2}$$

und

$$\sin v \frac{5\pi}{6} = -\sin v \frac{7\pi}{6} \quad (2.74)$$

folgen; dieselben Beziehungen gelten auch, wenn man den Sinus auf beiden Seiten der drei Gleichungen durch den Cosinus und gleichzeitig auf den rechten Seiten das Minuszeichen durch ein Pluszeichen ersetzt.

Man erhält nun folgende Tabelle und graphische Darstellung der Amplituden, wobei $|c_v| = |b_v|$ wegen $a_v = 0$:

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ c_v /\hat{I}$	1,055	0	0	0	0,239	0	0,1195	0	0	0

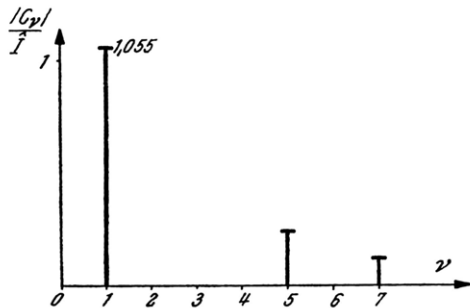


Abb. 2.14. Amplitudenspektrum zu Abb. 2.13

E. Stromverlauf aus Trapez-Impulsen

Hier handelt es sich um den typischen, angenäherten Verlauf des Stromes in einem elektrischen Ventil einer zweipulsigen Schaltung (Abschnitt 4.2), wobei Streuinduktivitäten von Transformatoren berücksichtigt werden. Die Näherung liegt in der Annahme linearen Flankenverlaufs. Stromformen bei $p > 2$ werden in Abschnitt 4.2 besprochen, sind aber in Abb. 2.15 der Vollständigkeit halber angedeutet.

$$+ \frac{\pi + u}{u} \int_{\pi}^{\pi+u} \sin vx \, dx - \int_{\pi}^{\pi+u} \frac{x}{u} \sin vx \, dx \Bigg],$$

somit

$$b_v = \frac{I(1 - (-1)^v)}{\pi u v^2} \sin vu. \quad (2.78)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} b_v &= 0; & v &= 2k + 2, \\ b_v &= \frac{2I \sin vu}{v^2 u \pi}; & v &= 2k + 1 \end{aligned} \quad (2.79)$$

und $a_0/2 = c_0 = I/2$ als Mittelwert, weiters

$$\begin{aligned} \frac{c_v}{I} &= 0; & v &= 2k + 2, \\ \frac{c_v}{I} &= \frac{2\sqrt{2(1 - \cos vu)}}{v^2 \pi u} = \frac{4}{v^2 \pi u} \sin v\alpha; & v &= 2k + 1, u = 2\alpha, \end{aligned} \quad (2.80)$$

speziell für $u = 20^\circ$ mit der graphischen Darstellung in Abb. 2.16.

v	0	1	2	3	4	5	6	7
$ c_v /I$	0,5	0,6339	0	0,2026	0	0,117	0	0,069

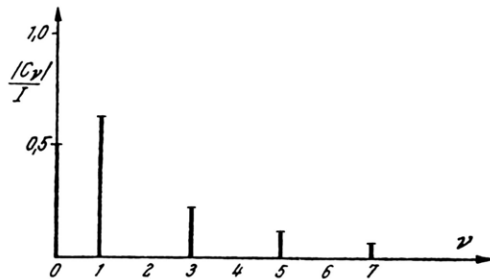


Abb. 2.16. Amplitudenspektrum zu Abb. 2.15 für $u = 20^\circ$

F. Primärstrom einer sechspulsigen Mittelpunktschaltung

Diese für den primären Phasenstrom einer sechspulsigen Mittelpunktschaltung (siehe Tafel 6.1) charakteristische Stromform ist in Abb. 2.17 dargestellt. Beträgt

das Tastverhältnis 2/3 oder einen anderen Wert, kann die Rechnung analog der hier durchgeführten vorgenommen werden.

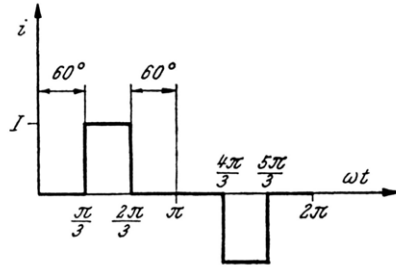


Abb. 2.17. Alternierende Rechteckimpulse mit Tastverhältnis 1/3 für Sinus-Ansatz (vgl. Fußnote S. 15); siehe Tafel 6.1 i_W (Dyy) bei M6

Man erhält (Siehe allgemeine Darstellung in Abb. 2.4d mit $\varphi = 60^\circ$; man kann aus Gl. (2.38) ersehen, daß alle c_v und $b_v \geq 0$ sind.)

$$\frac{c_v}{I} = \frac{b_v}{I} = \frac{4}{\pi} \frac{|\cos v(\pi/3)|}{v}; \quad v = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2.81)$$

$$\frac{c_v}{I} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{v}; & v = 6k + 1, \\ + \frac{4}{\pi} \frac{1}{v}; & v = 6k + 3, \\ \frac{2}{\pi} \frac{1}{v}; & v = 6k + 5. \end{cases} \quad (2.82)$$

Hier soll wegen des relativ einfachen Verlaufs der Amplituden, die im wesentlichen mit $1/v$ abnehmen, auf die graphische Darstellung verzichtet werden.

G. Lastspannung bei Einweggleichrichtung mit Freilaufdiode bzw. bei rein ohmscher Last

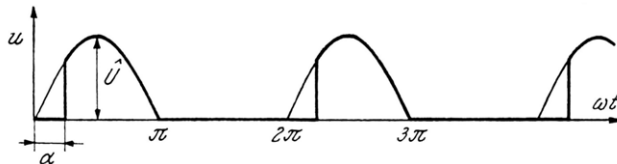


Abb. 2.18. Einpulsiger Lastspannungsverlauf (ohmsche Last bzw. Anwendung einer Freilaufdiode, vgl. Abb. 4.3)

Die hier behandelte Lastspannungsform zeigt bei rein ohmscher Last natürlich auch den Laststromverlauf (Abb. 2.18). Es handelt sich hier um einen typischen Fall einpulsigen Verhaltens.

Die Berechnung ergibt für $\nu \neq 1$

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{\hat{U}}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \sin x \cos \nu x \, dx \\ &= \frac{\hat{U}}{\pi(1-\nu^2)} [(-1)^\nu + \cos \alpha \cos \nu \alpha + \nu \sin \alpha \sin \nu \alpha]. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Für $\nu = 1$ wird

$$a_1 = \frac{\hat{U}}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{\hat{U}}{4\pi} [\cos 2\alpha - 1], \quad (2.84)$$

weilers für $\nu \neq 1$

$$b_\nu = \frac{\hat{U}}{\pi(1-\nu^2)} [\cos \alpha \sin \nu \alpha - \nu \sin \alpha \cos \nu \alpha] \quad (2.85)$$

und für $\nu = 1$

$$b_1 = \frac{\hat{U}}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{(\pi - \alpha)\hat{U}}{2\pi} + \frac{\hat{U}}{4\pi} \sin 2\alpha. \quad (2.86)$$

Somit wird für $\nu = 2k$ ($k = 1, 2, \dots$), also ν gerade:

$$\begin{aligned} \frac{|c_\nu|}{\hat{U}} &= \frac{1}{\pi(\nu^2 - 1)} [(1 + \nu^2) \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + (1 - \nu) \cos(\nu + 1)\alpha \\ &\quad + (1 + \nu) \cos(\nu - 1)\alpha]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.87)$$

und speziell für

$$\alpha = 0: \quad \frac{|c_\nu|}{\hat{U}} = \frac{2}{\pi(\nu^2 - 1)}; \quad \nu = 2k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.87a)$$

und für

$$\alpha = 90^\circ: \quad \frac{|c_\nu|}{\hat{U}} = \frac{\sqrt{1 + \nu^2}}{\pi(\nu^2 - 1)}; \quad \nu = 2k, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (2.88)$$

ν ungerade:

$$\nu = 1 : \quad \frac{|c_1|}{\hat{U}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(\cos^2 \alpha - 1)^2 + (\pi - \alpha)^2}, \quad (2.89)$$

$$\alpha = 0 : \quad \frac{|c_1|}{\hat{U}} = \frac{1}{2}, \quad (2.89a)$$

$$\alpha = 90^\circ : \quad \frac{|c_1|}{\hat{U}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} = 0,296, \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \nu = 2k + 1 : \quad \frac{|c_\nu|}{\hat{U}} &= \frac{1}{\pi(\nu^2 - 1)} [(1 + \nu^2) \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \\ &\quad + (\nu - 1) \cos(\nu + 1) \alpha - (\nu + 1) \cos(\nu - 1) \alpha]^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.91)$$

Speziell ist für

$$\alpha = 0 : \quad \frac{|c_\nu|}{\hat{U}} = \frac{1}{\pi(\nu^2 - 1)} \sqrt{2 + \nu - 1 - (\nu + 1)} = 0 \quad (2.91a)$$

$$\begin{aligned} \alpha = 90^\circ : \quad \frac{|c_\nu|}{\hat{U}} &= \frac{1}{\pi(\nu^2 - 1)} \sqrt{1 + \nu^2 - 2\nu \sin \frac{\nu\pi}{2}} \\ &= \begin{cases} \frac{1 - \nu}{\pi(1 - \nu^2)} = \frac{1}{\pi(1 + \nu)}; & \nu = 4k + 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ \frac{1 + \nu}{\pi(\nu^2 - 1)} = \frac{1}{\pi(\nu - 1)}; & \nu = 4k + 3, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Für $\nu = 0$ gilt mit Gl. (2.83)

$$a_0 = \frac{\hat{U}}{\pi} (1 + \cos \alpha) \quad (2.92a)$$

und mit Gl. (2.10)

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{\hat{U}}{2\pi} (1 + \cos \alpha). \quad (2.92b)$$

Gleichungen (2.87a) ... (2.92b) sind in folgender Tabelle dargestellt

ν	0	1	2	3	4	5	6	7
$ c_\nu /\hat{U} _{\alpha=0^\circ}$	0,318	0,5	0,212	0	0,042	0	0,018	0
$ c_\nu /\hat{U} _{\alpha=90^\circ}$	0,159	0,296	0,237	0,159	0,087	0,053	0,05	0,053

mit der graphischen Darstellung nach Abb. 2.19.

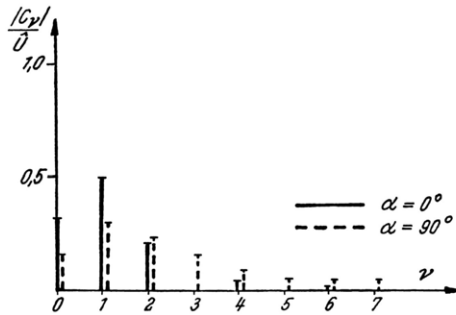


Abb. 2.19. Amplitudenspektrum zu Abb. 2.18

In Kapitel 6 (Abb. 6.11) ist dargestellt, wie sich die Amplituden bei Variation von α zwischen 0° und 180° verhalten.

Eine Verschiebung der Funktion nach Abb. 2.18 z. B. um $\pi/2$ nach links liefert natürlich dieselben $|c_v|$. Die Reihe ändert sich bei Beschränkung auf $\alpha = 0$ (Sinusimpuls) nach [2.3] von

$$\frac{u(x)}{\hat{U}} = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2x + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4x + \dots \right) \quad (2.93)$$

(bei der Darstellung nach Abb. 2.18) auf nunmehr (Cosinusimpuls)*

$$\frac{u(y)}{\hat{U}} = \frac{1}{\pi} + \frac{\cos y}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2y - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4y \pm \dots \right). \quad (2.94)$$

H. Lastspannung bei Zweiweggleichrichtung mit Freilaufdiode bzw. rein ohmscher Last

Hier handelt es sich um einen zweipulsigen Fall (für eine Mittelpunkt- oder Brückenschaltung), wie er in Abb. 2.20 dargestellt ist.

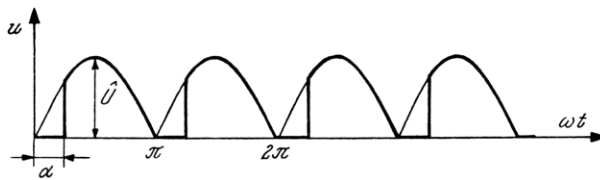


Abb. 2.20. Zweipulsiger Lastspannungsverlauf (ohmsche Last bzw. Anwendung einer Freilaufdiode oder halbgesteuerte Schaltung; Abb. 4.11, 4.48d und 4.49d). Vgl. Abb. 4.57b bzw. S. 492f.

Da die Funktion nunmehr eine Periode π hat, werden nicht mehr wie früher im allgemeinen Fall alle Frequenzen $v\omega$ auftreten (wo die Grundperiode 2π war), sondern nur mehr alle $v \cdot 2\omega$. Anders erklärt: der zeitliche Vorgang bis zur nächsten Wiederholung in Abb. 2.20 dauert nur halb so lang wie in den vorhergehenden

*Vgl. die Fußnoten auf S. 15 sowie 543 und die Ausführungen zu gleichbleibenden und alternierenden Vorzeichen in den Abschnitten 2.1.1.3.2A, B und C sowie F und H (Gln. (2.101) und (2.102)).

Fällen (z. B. Abb. 2.18); wegen dieser doppelt so schnellen Aufeinanderfolge müssen offenbar nun auch alle Frequenzen, die überhaupt auftreten können, doppelt so groß sein. Im folgenden wollen wir von a_v, b_v, c_v zur Bezeichnungsweise a_k, b_k, c_k übergehen und setzen im Integral zur Berechnung des Fourierkoeffizienten gleich $2k$ ein. Dies bedeutet nun, daß k die Ordnung der Harmonischen bezüglich der Periode π angibt. Will man die Ordnungszahl aber auf die ursprüngliche Periode π beziehen, muß man die aufeinanderfolgenden Harmonischen mit $v = 2k$ nummerieren.

Ein einfaches Beispiel diene zur Illustration: Liegt eine Schwingung von 50 Hz vor, ist also $\omega = 2\pi \cdot 50 \approx 314 \text{ s}^{-1}$, so erhält man $\omega t = 2\pi = \omega T$ bei $T = 20 \text{ ms}$. Vorgänge nach Abb. 2.18 wiederholen sich nun alle 20 ms, Vorgänge nach Abb. 2.20 alle 10 ms. Die Harmonischen, die bei sich mit 20 ms wiederholenden Vorgängen auftreten können, haben Frequenzen von 50 Hz, 100 Hz, 150 Hz, ... Ist die Wiederholungszeit jedoch nur 10 ms, so können nur 100 Hz, 200 Hz, 300 Hz etc. auftreten, da ja die neue Grundperiode von 10 ms schon 100 Hz entspricht und nach den Grundlagen der Fourierschen Reihenentwicklung alle Glieder ganzzahlige Vielfache dieser Grundfrequenz von 100 Hz aufweisen.

Wir erhalten nun mit Gln. (2.2) und (2.3), wobei man den Faktor 2 vor den Integralen wegen des auf π verringerten Integrationsintervalls beachte,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2\hat{U}}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \sin x \cos 2kx \, dx \\ &= \frac{2\hat{U}}{\pi} \frac{1}{(1-4k^2)} [1 + \cos \alpha \cos 2k\alpha + 2k \sin \alpha \sin 2k\alpha] \end{aligned} \quad (2.95)$$

und

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2\hat{U}}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \sin x \sin 2kx \, dx \\ &= \frac{2\hat{U}}{\pi} \frac{1}{(1-4k^2)} [\cos \alpha \sin 2k\alpha - 2k \sin \alpha \cos 2k\alpha], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.96)$$

woraus sich

$$\begin{aligned} \frac{|c_k|}{\hat{U}} &= \frac{2}{\pi(4k^2-1)} [2 + (4k^2-1) \sin^2 \alpha \\ &\quad + (1-2k) \cos(2k+1)\alpha + (1+2k) \cos(2k-1)\alpha]^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.97)$$

ergibt. Das Gleichspannungsglied (der Mittelwert) lautet

$$U_d = c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{\hat{U}}{\pi} (1 + \cos \alpha) \quad (2.98)$$

und speziell für $k = 1, 2, 3, \dots$ und für

$$\alpha = 0: \quad \frac{|c_k|}{\hat{U}} = \frac{4}{\pi(4k^2 - 1)}, \quad (2.98a)$$

$$\alpha = 90^\circ: \quad \frac{|c_k|}{\hat{U}} = \frac{2\sqrt{1 + 4k^2}}{\pi(4k^2 - 1)} \quad (2.99)$$

mit den Auswertungen nach folgender Tabelle (sowie Abb. 2.21), in der k (bezogen auf eine Grundperiode von π), ν (bezogen auf eine Grundperiode von 2π) und die Frequenz f der einzelnen Harmonischen angegeben sind unter der Voraussetzung, daß Vorgänge von 50 Hz sich mit der Grundperiode 2π wiederholen:

k	0	1	2	3	4	5	6
ν	0	2	4	6	8	10	12
f/Hz	0	100	200	300	400	500	600
$ c_\nu /\hat{U} _{\alpha=0}$	0,6366	0,424	0,084	0,036	0,020	0,012	0,008
$ c_\nu /\hat{U} _{\alpha=90^\circ}$	0,3183	0,474	0,174	0,110	0,081	0,064	0,053

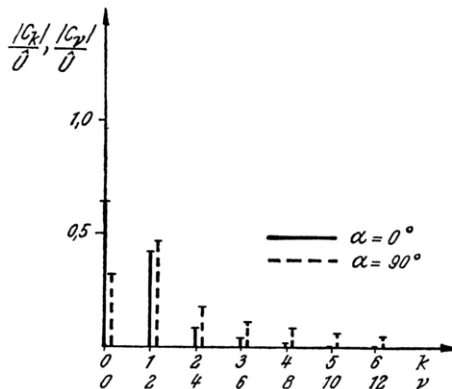


Abb. 2.21. Amplitudenspektrum zu Abb. 2.20

In Abb. 6.12 ist der Amplitudenverlauf für kontinuierliche Variation von α gezeigt. Die Fourierreihe lautet speziell für $\alpha = 0$

$$f(x) = \frac{4\hat{U}}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2x - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4x - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6x - \dots \right) \quad (2.100)$$

und, wenn man durch Verschiebung um $\pi/2$ nach links wieder aus den gleichgerichteten Sinusimpulsen gleichgerichtete Cosinusimpulse erzeugt (vgl. Fußnote S. 31; siehe auch Gl. (2.129)),

$$f(y) = \frac{4\hat{U}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2y - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4y + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6y \mp \dots \right). \quad (2.101)$$

I. Lastspannung bei Zweiweggleichrichtung (zweipulsig) und für allgemeine Pulszahl p sowie Lastinduktivität $\rightarrow \infty$; keine Freilaufdiode

a) *Zweipulsiger Fall.* Wieder gilt für die möglichen Frequenzen das bereits eingangs zu Fall H. Gesagte. Die Funktion ist in Abb. 2.22 dargestellt, stellt also eine Alternative zu Abb. 2.20 dar, wobei in beiden Fällen die Pulszahl = 2 ist.

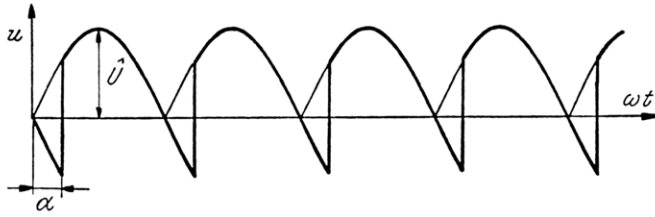


Abb. 2.22. Zweipulsiger Spannungsverlauf (keine Freilaufdiode, Lastinduktivität $\rightarrow \infty$, s. a. Abb. 4.7f)

Hier sei bereits erwähnt, daß in den folgenden Fällen J. und K. Pulszahlen $p > 2$ behandelt werden und daß für alle p eine gemeinsame Berechnung möglich ist. Aus Gründen der Anschaulichkeit soll jedoch zunächst der Fall $p = 2$ explizit berechnet werden:

$$a_k = \frac{2\hat{U}}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sin x \cos 2kx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\hat{U}}{1-4k^2} [2 \cos \alpha \cos 2k\alpha + 4k \sin \alpha \sin 2k\alpha] \quad (2.102)$$

und

$$b_k = \frac{2}{\pi} \frac{\hat{U}}{1-4k^2} [2 \cos \alpha \sin 2k\alpha - 4k \sin \alpha \cos 2k\alpha], \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.103)$$

somit erhält man

$$c_0 = a_0/2 = (2/\pi) \hat{U} \cos \alpha, \quad (2.103a)$$

$$c_k = \frac{4}{\pi} \frac{\hat{U}}{4k^2 - 1} \sqrt{\cos^2 \alpha + 4k^2 \sin^2 \alpha}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.104)$$

Wir wollen nun drei spezielle Werte von α herausgreifen (c_0 siehe oben):

$$\text{a) } \alpha = 0: \quad c_k = \frac{4\hat{U}}{\pi(4k^2 - 1)} \quad \text{für } k \geq 1, \quad (2.105)$$

v	0	2	4	6	8	10	12	14
k	0	1	2	3	4	5	6	7
f/Hz	0	100	200	300	400	500	600	700
$ c_v /\hat{U}$	0,6366	0,424	0,0848	0,036	0,0202	0,0129	0,0089	0,0065

$$\text{b) } \alpha = 45^\circ : c_k = \frac{4}{\pi} \frac{\hat{U}}{4k^2 - 1} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} 4k^2} = \frac{\sqrt{8}\hat{U}}{\pi} \frac{\sqrt{1+4k^2}}{4k^2 - 1}, \quad (2.106)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$ c_v /\hat{U}$	0,45	0,67	0,247	0,1565	0,1152	0,0913	0,0758	0,0648

$$\text{c) } \alpha = 90^\circ : c_k = \frac{8\hat{U}}{\pi} \frac{k}{4k^2 - 1}, \quad (2.107)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$ c_v /\hat{U}$	0	0,849	0,3395	0,2183	0,162	0,1286	0,1068	0,0914

mit der graphischen Darstellung in Abb. 2.23; f Frequenzen der Harmonischen der Lastspannung für Anschluß an ein 50 Hz-Netz.

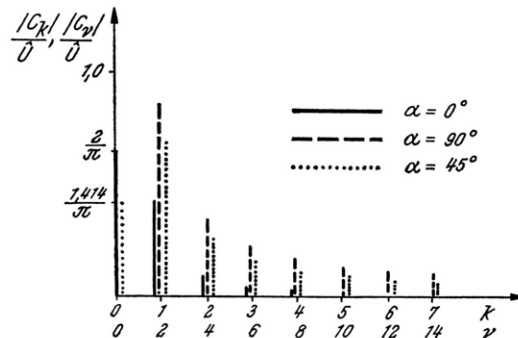


Abb. 2.23. Amplitudenspektrum zu Abb. 2.22

b) *Allgemeines p .* Die folgenden Abb. 2.24 und 2.25 zeigen die Funktionen für den drei- und den sechspulsigen Fall.

Aus diesen Darstellungen ist ersichtlich, daß die Periode sich wiederholender Formen auf $2\pi/p$ verringert und die Grundfrequenz auf $p \cdot \omega$ erhöht wird. Dann können, analog wie eingangs zu Fall H. dargelegt, nur mehr Frequenzen $k \cdot p \cdot \omega$ auftreten, mit $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ (Um sich auch auf die ursprüngliche Frequenz ω

beziehen zu können, wird wieder die Numerierung $v = k \cdot p$ eingeführt.)

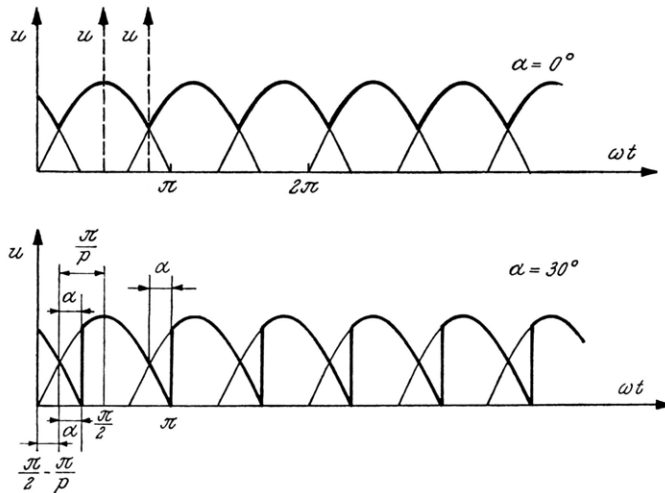


Abb. 2.24. Spannungsverlauf bei dreipulsigem Betrieb (Abb. 4.30); Verschiebung der u -Achsen in das Maximum von u ($\hat{=}$ u_{di0} z. B. in Abb. 4.9) für Cosinusansatz, vgl. Abb. 6.47 und Fußnote S. 543; alternativ (aber meist z. B. für Leistungsberechnungen nach Gln. (6.8a) und (6.8b) weniger vorteilhaft) in das Minimum (= Schnittpunkt von Phasenspannungen) möglich; siehe auch Gln. (2.129) und (2.101))

Weiters ist aus den beiden Abbildungen zu sehen, daß es für die Berechnung der Fourierkoeffizienten genügt, die Funktion $\sin x$ zwischen den Grenzen $(\pi/2) - (\pi/p) + \alpha$ und $(\pi/2) + (\pi/p) + \alpha$ zu betrachten und in eine Fourierreihe zu zerlegen. Man beachte deshalb den Faktor p vor den Integralen.

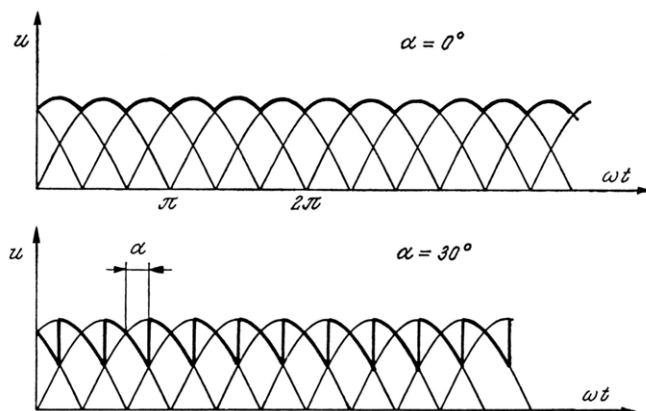


Abb. 2.25. Spannungsverlauf bei sechspulsigem Betrieb (Abb. 4.47b)

Zunächst erfolgt die Bestimmung des Mittelwertes:

$$\begin{aligned}
 U_d(\alpha) = U_{di\alpha} = U_{d\alpha}^* &= \frac{p}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} + \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p} + \alpha} \hat{U} \sin x \, dx = \frac{\hat{U}p}{2\pi} (-\cos x) \Big|_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} + \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p} + \alpha} \\
 &= \frac{\hat{U}p}{2\pi} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{p} - \alpha \right) \right] - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p} + \alpha \right) \right\};
 \end{aligned}$$

somit ergibt sich

$$U_{di\alpha} = U_{d\alpha} = \frac{\hat{U}p}{2\pi} \left[\sin \left(\frac{\pi}{p} - \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{p} + \alpha \right) \right] = \hat{U} \frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} \cos \alpha = U_{di0} \cos \alpha \quad (2.108)$$

mit

$$U_{di0} = \hat{U} \frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} = \hat{U} \frac{\sin(\pi/p)}{\pi/p}. \quad (2.109)$$

Die Fourieranalyse mit komplexer Fourierreihe liefert (Gln. (2.13) und (2.16))

$$\bar{c}'_v = \frac{\hat{U}p}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} + \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p} + \alpha} \sin x e^{jvx} \, dx \quad \text{mit} \quad v = kp, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.110)$$

Das Integral

$$\int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} + \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p} + \alpha} \sin x e^{jvx} \, dx$$

wird mittels partieller Integration gelöst (Es gilt $v \neq \pm 1$ wegen $v = kp$ mit $p \geq 2$; $p = 1$ wurde schon früher behandelt.):

$$\begin{aligned}
 \int \sin x e^{jvx} \, dx &= -\cos x e^{jvx} + jv \int \cos x e^{jvx} \, dx \\
 &= -\cos x e^{jvx} + jv \left[\sin x e^{jvx} - jv \int \sin x e^{jvx} \, dx \right] \\
 &= -\cos x e^{jvx} + jv \sin x e^{jvx} + v^2 \int \sin x e^{jvx} \, dx
 \end{aligned}$$

*Siehe hiezu das Verzeichnis der Formelzeichen: Die exakte Schreibweise wäre hier $U_{di}(\alpha) = U_{di\alpha}$; der Index i deutet die hier gegebenen idealisierten Verhältnisse an, entfällt aber oft zur Abkürzung; ebenso wird oft U_{di0} statt U_{di0} geschrieben (siehe auch Gl. (4.134), Abb. 4.40).

und somit

$$\int \sin x e^{jvx} dx = \frac{1}{1-v^2} e^{jvx} (jv \sin x - \cos x), \quad (2.111)$$

was auch durch Anwendung reeller Integranden ([2.1], [2.2]) mit

$$e^{jvx} = \cos vx + j \sin vx$$

überprüft werden kann.

Mit

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} + \alpha \quad (2.112)$$

als unterer und

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p} + \alpha \quad (2.113)$$

als oberer Grenze erhält man

$$\bar{e}'_v = \frac{\hat{U}p}{2\pi} \frac{1}{1-v^2} [e^{jvx_2} \underbrace{(jv \sin x_2 - \cos x_2)}_{F_1} - e^{jvx_1} \underbrace{(jv \sin x_1 - \cos x_1)}_{F_2}]; \quad (2.114)$$

für x_1 und x_2 eingesetzt ergibt sich mit den Abkürzungen F_1 und F_2

$$\begin{aligned} \bar{e}'_v &= \frac{\hat{U}p}{2\pi} \frac{1}{1-v^2} \left\{ \exp \left[jv \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p} + \alpha \right) \right] F_1 - \exp \left[jv \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p} + \alpha \right) \right] F_2 \right\} \\ &= \frac{\hat{U}p}{2\pi} \frac{1}{1-v^2} \exp \left[jv \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p} + \alpha \right) \right] \left[F_1 - \exp \left(-jv \frac{2\pi}{p} \right) F_2 \right]. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Da $v = kp$, gilt $v \cdot 2\pi/p = 2\pi k$ und somit

$$\exp \left(jv \frac{2\pi}{p} \right) = \cos 2\pi k + j \sin 2\pi k = 1.$$

Mit

$$\sin x_1 = \cos \left(\frac{\pi}{p} - \alpha \right),$$

$$\cos x_1 = \sin \left(\frac{\pi}{p} - \alpha \right),$$

$$\sin x_2 = \cos \left(\frac{\pi}{p} + \alpha \right)$$

und

$$\cos x_2 = -\sin\left(\frac{\pi}{p} + \alpha\right)$$

ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \bar{c}'_v = \frac{\hat{U}_p}{2\pi} \frac{1}{1-v^2} \exp\left[jv\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] & \underbrace{\left\{ \sin\left(\frac{\pi}{p} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{p} - \alpha\right) \right\}}_{= U_{d\alpha} \frac{2\pi}{\hat{U}_p} \text{ (Gl. (2.108))}} \\ & + jv \left[\cos\left(\frac{\pi}{p} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{p} - \alpha\right) \right] \end{aligned} \quad (2.116)$$

und weiters

$$\bar{c}'_v = U_{d\alpha} \frac{1}{1-v^2} \exp\left[jv\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] \left[1 + jv \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{p} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{p} - \alpha\right)} \right]; \quad (2.117)$$

weil

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{p} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{p} - \alpha\right)} = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{p} \sin \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{p} \cos \alpha} = -\tan \alpha,$$

wird

$$\bar{c}'_v = U_{d\alpha} \frac{1}{1-v^2} \exp\left[jv\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] [1 - jv \tan \alpha]. \quad (2.118)$$

Da nach Gl. (2.20) die Amplitude der v -ten Spannungsharmonischen für $v > 0$

$$\hat{U}_v = c'_v = 2\sqrt{|c'_v|^2} = 2\sqrt{|\bar{c}'_v|^2} \quad (2.119)$$

ist, erhält man mit

$$\left| \exp\left[jv\left(\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{p} + \alpha\right)\right] \right| = 1$$

und der Tatsache, daß der Absolutbetrag einer komplexen Zahl das Produkt der einzelnen Absolutbeträge ist, sowie mit $U_{d\alpha} = U_{di\alpha}$

$$\hat{U}_{v,\alpha} = \hat{U}_v(\alpha) = 2U_{di\alpha} \left| \frac{1}{v^2 - 1} \right| \sqrt{1 + v^2 \tan^2 \alpha}; \quad v = kp, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.120)$$

wobei das Zeichen des Absolutbetrages weggelassen werden kann (mit $v = kp$ für $k \geq 1$ und mit $p \geq 2$, da der Fall $k = 0$ wieder das Gleichspannungsglied ergibt). [Hier ist zu beachten, daß der Mittelwert bei der Fourierschen Reihe durch $a_0/2 = c_0$ (Gl. (2.10)) erhalten wird, was in den Gln. (2.119) und (2.120) Weglassung des Faktors 2 bedeutet, womit sich dann mit $v = 0$ einfach $\hat{U}_{0,\alpha} = U_{d\alpha}$ ergibt.]

Für den Fall $\alpha \rightarrow \pi/2$ geht $\tan \alpha \rightarrow \infty$. Wir benützen daher

$$\begin{aligned}\hat{U}_{v,\alpha} &= 2U_{di0} \cos \alpha \left| \frac{1}{v^2 - 1} \right| \sqrt{1 + v^2 \tan^2 \alpha} \\ &= 2U_{di0} \left| \frac{1}{v^2 - 1} \right| \sqrt{\cos^2 \alpha + v^2 \sin^2 \alpha}\end{aligned}\quad (2.121)$$

und erhalten für $\alpha = \pi/2$ somit

$$\hat{U}_{v,\pi/2} = 2U_{di0} \left| \frac{v}{v^2 - 1} \right| = 2U_{di0} \frac{kp}{|k^2 p^2 - 1|}. \quad (2.122)$$

Bei $\alpha = 0$ gilt

$$\hat{U}_{v,0} = 2U_{di0} \left| \frac{1}{v^2 - 1} \right| = \frac{2U_{di0}}{|v^2 - 1|} = \frac{2U_{di0}}{|k^2 p^2 - 1|}. \quad (2.123)$$

Interessant an der vorhergehenden Ableitung ist auch, daß sie ganz allgemein für jedes $p \geq 2$ durchgeführt wurde, d. h., daß die gewonnenen Ausdrücke für $\hat{U}_{v,\alpha}$ für alle $p \geq 2$ gelten*. Da wir aber wissen (siehe z. B. wieder das eingangs zu Fall H. Gesagte), daß die Ordnungszahlen der Harmonischen, die überhaupt auftreten können, ganzzahlige Vielfache der Grundschwingung (deren Periode in der gewählten Darstellung $2\pi/p$ beträgt) sein müssen, können also, bezogen auf eine Schwingung mit der Periode 2π , nur Harmonische mit den Ordnungszahlen $v = p, 2p, 3p, \dots$ etc. auftreten. Das heißt weiters, daß man zwar die $\hat{U}_{v,\alpha}$ für alle $v = 0, 1, 2, 3, \dots$ ausrechnen kann, daß aber bei gegebenem p eben nur jene $\hat{U}_{v,\alpha} \neq 0$ sind, für die $v = kp$ gilt, wobei $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Abbildungen 6.9 und 6.10 werden zwei mögliche Darstellungsformen der Oberschwingungen zeigen, von denen $\hat{U}_{v\alpha}/U_{di\alpha}$ das Verhältnis der auftretenden Oberschwingungen zum jeweilig vorhandenen Mittelwert angibt. $\hat{U}_{v\alpha}/U_{di0}$ ist zwar eine in der Literatur häufige Form der Darstellung, in ihr sind die Oberschwingungen aber nicht auf den tatsächlichen Betriebsfall bezogen, sondern eben immer nur auf die bei $\alpha = 0$ auftretende Gleichspannung.

Die besonders wichtigen Fälle $p = 3$ und $p = 6$ sollen im folgenden speziell herausgearbeitet werden, wobei insbesondere auch die a_n und b_n separat berechnet werden.

*Für $p = 1$ siehe Fall G.

J. Lastspannung im dreipulsigen Fall (keine Freilaufdiode, Lastinduktivität $\rightarrow \infty$)

Abbildung 2.24 zeigt den Funktionsverlauf. Die Analyse ergibt mit der Periode $2\pi/3$ für die Wiederholung der einzelnen Spannungsformen

$$a_k = \frac{2\hat{U}}{2\pi/3} \int_{\pi/6+\alpha}^{5\pi/6+\alpha} \sin x \cos 3kx dx. \quad (2.124)$$

Man beachte, daß k die Werte $0, 1, 2, 3, \dots$ annimmt, während die Harmonischen bezogen auf die Periode 2π die Ordnungszahlen $0, 3, 6, 9, \dots$ haben. Wir erhalten

$$\begin{aligned} G_k = (1 - 9k^2)a_k = \frac{3\hat{U}}{\pi} & \left\{ \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \right] \left(\cos k \frac{\pi}{2} \cos 3k\alpha - \sin k \frac{\pi}{2} \sin 3k\alpha \right) \\ & + 3k \left[\left(-\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) + \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) \right] \\ & \cdot \left(\sin k \frac{\pi}{2} \cos 3k\alpha + \cos k \frac{\pi}{2} \sin 3k\alpha \right) \Big\} \end{aligned}$$

und müssen die Fälle $k = 4n, 4n + 1, 4n + 2$ und $4n + 3$ unterscheiden, mit $n = 0, 1, 2, \dots$. Wir erhalten für

$$G_{4n} = \frac{3\sqrt{3}\hat{U}}{\pi} (\cos \alpha \cos 3k\alpha + 3k \sin \alpha \sin 3k\alpha),$$

$$G_{4n+1} = \frac{3\sqrt{3}\hat{U}}{\pi} (-\cos \alpha \sin 3k\alpha + 3k \sin \alpha \cos 3k\alpha),$$

$$G_{4n+2} = -G_{4n}$$

und

$$G_{4n+3} = -G_{4n+1}.$$

Für b_k ergibt sich

$$\begin{aligned} H_k = (1 - 9k^2)b_k = \frac{3\hat{U}}{\pi} & \left\{ \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \right] \left(\sin k \frac{\pi}{2} \cos 3k\alpha + \cos k \frac{\pi}{2} \sin 3k\alpha \right) + \end{aligned}$$

$$+ 3k \left[\left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) - \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) \right] \\ \cdot \left(\cos k \frac{\pi}{2} \cos 3k\alpha - \sin k \frac{\pi}{2} \sin 3k\alpha \right) \}$$

mit

$$H_{4n} = \frac{3\sqrt{3}\hat{U}}{\pi} (\cos \alpha \sin 3k\alpha - 3k \sin \alpha \cos 3k\alpha) = -H_{4n+2}$$

und

$$H_{4n+1} = \frac{3\sqrt{3}\hat{U}}{\pi} (\cos \alpha \cos 3k\alpha + 3k \sin \alpha \sin 3k\alpha) = -H_{4n+3}.$$

Hieraus ergibt sich mit $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ für alle $k = 1, 2, 3, \dots$

$$c_k = \frac{3\sqrt{3}\hat{U}}{\pi} \frac{1}{9k^2 - 1} \sqrt{\cos^2 \alpha + 9k^2 \sin^2 \alpha}. \quad (2.125)$$

Dies stimmt unter Berücksichtigung von

$$U_{di0} = \hat{U} \frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} = \hat{U} \frac{3}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.126)$$

mit dem früher gewonnenen Ausdruck (Gl. (2.121))

$$\hat{U}_{v,\alpha} = 2U_{di0} \frac{1}{|v^2 - 1|} \sqrt{\cos^2 \alpha + v^2 \sin^2 \alpha}$$

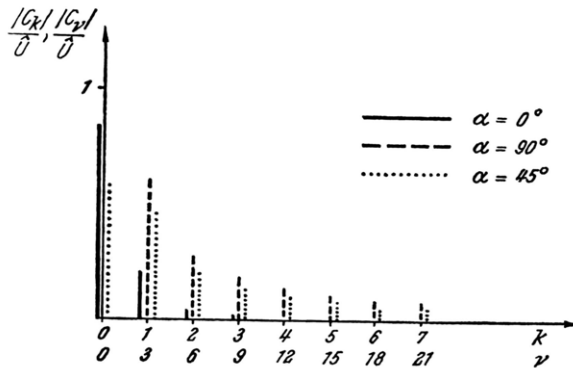
überein.

Spezielle Auswertungen ergeben für $k = 1, 2, \dots$ sowie für

$$\begin{aligned} \alpha = 0^\circ : \quad & \frac{c_k}{\hat{U}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{9k^2 - 1}, \\ \alpha = 45^\circ : \quad & \frac{c_k}{\hat{U}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}\pi} \frac{1}{9k^2 - 1} \sqrt{1 + 9k^2}, \\ \alpha = 90^\circ : \quad & \frac{c_k}{\hat{U}} = \frac{9\sqrt{3}}{\pi} \frac{k}{9k^2 - 1} \end{aligned} \quad (2.127)$$

und sind in der folgenden Tabelle aufgelistet (mit Gln. (2.108) und (2.126); $|c_0| = U_{di0}$ bzw. $U_{di\alpha}$). Die graphische Darstellung erfolgt in Abb. 2.26. Für den Amplitudenverlauf bei variablem α siehe Abb. 6.9 und 6.10.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
v	0	3	6	9	12	15	18	21
f/Hz^*	0	150	300	450	600	750	900	1050
$ c_k /\hat{U} _{\alpha=0^\circ}$	0,827	0,207	0,047	0,02	0,012	0,007	0,005	0,004
$ c_k /\hat{U} _{\alpha=45^\circ}$	0,583	0,462	0,203	0,132	0,0985	0,0785	0,0653	0,056
$ c_k /\hat{U} _{\alpha=90^\circ}$	0	0,62	0,28	0,186	0,139	0,111	0,092	0,079

Abb. 2.26. Amplitudenspektrum zu Abb. 2.24 für verschiedene α

Speziell für $\alpha = 0^\circ$ lautet die Fourierreihe

$$f(x) = \frac{3\hat{U}\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} \sin 3x + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6x + \frac{1}{8 \cdot 10} \sin 9x - \dots \right) \quad (2.128)$$

oder einfacher, wenn man die Ordinate um $\pi/6$ so verschiebt, daß der Verlauf zu ihr symmetrisch wird [d. h., $y = x - (\pi/6)$; vgl. Abb. 2.24 und 6.47 sowie Fußnote auf S. 543; siehe auch Gl. (2.101)]:

$$g(x) = \frac{3\hat{U}\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cos 3y - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6y - \frac{1}{8 \cdot 10} \cos 9y - \dots \right). \quad (2.129)$$

K. Lastspannung im sechspulsigen Fall (keine Freilaufdiode, Lastinduktivität $\rightarrow \infty$)

Abbildung 2.25 zeigt den Funktionsverlauf. Hier wiederholen sich die Spannungsformen jeweils nach $\pi/3$, sodaß wir

$$a_k = \frac{6\hat{U}}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3} + \alpha}^{\frac{2\pi}{3} + \alpha} \sin x \cos 6kx dx$$

schreiben können, woraus sich nach mehreren Umformungen

* für 50 Hz Grund-(Netz-)Frequenz

$$a_k = \frac{6\hat{U}}{\pi} \frac{1}{1-36k^2} (\cos \alpha \cos 6k\alpha + 6k \sin \alpha \sin 6k\alpha), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.130)$$

ergibt. Analog erhält man

$$b_k = \frac{6\hat{U}}{\pi} \frac{1}{1-36k^2} (\cos \alpha \sin 6k\alpha - 6k \sin \alpha \cos 6k\alpha), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.131)$$

woraus c_k wieder in Übereinstimmung mit der allgemeinen Formel (mit $v = 6k$) zu

$$c_k = \frac{6\hat{U}}{\pi} \frac{1}{36k^2 - 1} \sqrt{\cos^2 \alpha + 36k^2 \sin^2 \alpha} = \hat{U}_{v,\alpha}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.132)$$

wird. (Siehe dazu die Ausführungen im dreipulsigen Fall; $c_0 = a_0/2 = U_{di0}$ bzw. $U_{di\alpha}$ mit Gln. (2.108) und (2.109), wobei $p = 6$.)

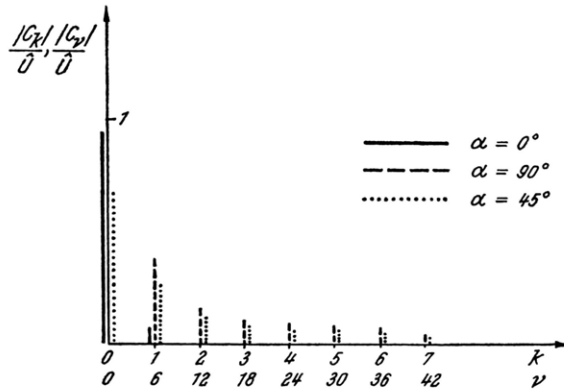


Abb. 2.27. Amplitudenspektrum zu Abb. 2.25 für verschiedene α

Insbesondere erhalten wir für

$$\begin{aligned} \alpha = 0^\circ : \quad \frac{c_k}{\hat{U}} &= \frac{6}{\pi(36k^2 - 1)} & \left(\approx \frac{1}{6\pi k^2} = \frac{0,053}{k^2} \text{ für große } k \right), \\ \alpha = 45^\circ : \quad \frac{c_k}{\hat{U}} &= \frac{3\sqrt{2}}{\pi(36k^2 - 1)} \sqrt{1 + 36k^2} & \left(\approx \frac{\sqrt{2}}{2\pi k} = \frac{0,2255}{k} \text{ für große } k \right), \\ \alpha = 90^\circ : \quad \frac{c_k}{\hat{U}} &= \frac{36k}{\pi(36k^2 - 1)} & \left(\approx \frac{1}{\pi k} \text{ für große } k \right) \end{aligned} \quad (2.133)$$

und die Tabelle

k	0	1	2	3	4	5	6	7
ν	0	6	12	18	24	30	36	42
f/Hz^*	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100
$ c_k /\hat{U} _{\alpha=0^\circ}$	0,955	0,0546	0,0134	0,0059	0,0033	0,00212	0,001473	0,001082
$ c_k /\hat{U} _{\alpha=45^\circ}$	0,675	0,235	0,114	0,0754	0,0564	0,045	0,0376	0,0321
$ c_k /\hat{U} _{\alpha=90^\circ}$	0	0,327	0,160	0,106	0,0797	0,0637	0,0531	0,0455

Daß diese Werte nicht mit den Zahlen bei denselben Frequenzen in den vorhergehenden Tabellen übereinstimmen, hängt damit zusammen, daß die Beträge hier nicht (wie in Abb. 6.9 bzw. 6.10) auf U_{di0} oder $U_{di\alpha}$ bezogen wurden. Aus den Näherungen für großes k ist wieder zu sehen, daß bei $\alpha \neq 0$, wo also Sprünge (Unstetigkeitsstellen) in der Spannung auftreten, sich die Harmonischen wie $1/k$ verhalten. Nur bei $\alpha = 0$ bekommen wir eine Abnahme nach $1/k^2$.

Abbildung 2.27 zeigt die graphische Darstellung. Abbildungen 6.9 und 6.10 geben den Verlauf für variables α .

L. Spannungseinbrüche bei Kommutierungen

Bei Stromübergängen zwischen den Ventilen leistungselektronischer Schaltungen treten kurzzeitig Kurzschlüsse auf, deren genaue Details in den Kapiteln 4 und

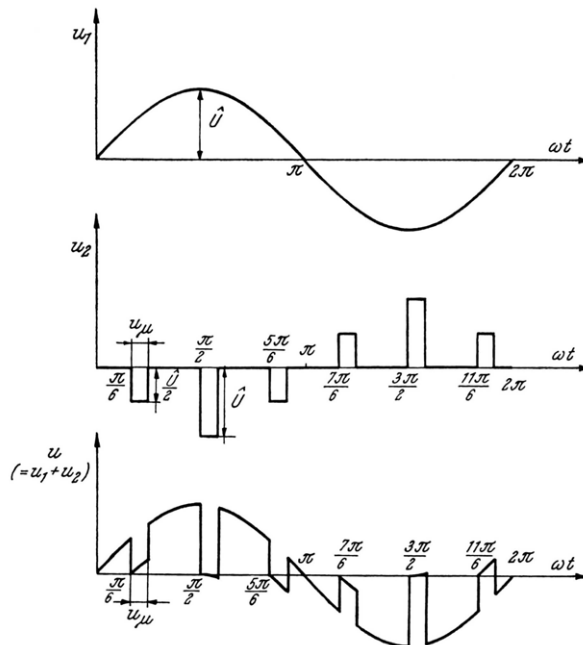


Abb. 2.28. Spannungseinbrüche (durch Superposition von u_1 und u_2 dargestellt). u_μ Überlappung

* bei 50 Hz-Betrieb

6 (siehe z. B. Abb. 6.16) erklärt werden und hier in Abb. 2.28 näherungsweise dargestellt sind.

Im folgenden wird die Funktion u_2 separat analysiert; sodann werden die Harmonischen von u_1 und u_2 zusammengesetzt (siehe dazu Abschnitt 2.1.1.4A).

Analyse von u_2 :

$$\begin{aligned}
 a_{v2} &= \frac{\hat{U}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos vx dx \\
 &= \frac{\hat{U}}{\pi} \left[- \int_{30^\circ}^{30^\circ+u_\mu} \frac{1}{2} \cos vx dx - \int_{90^\circ}^{90^\circ+u_\mu} \cos vx dx - \frac{1}{2} \int_{150^\circ}^{150^\circ+u_\mu} \cos vx dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{210^\circ}^{210^\circ+u_\mu} \cos vx dx + \int_{270^\circ}^{270^\circ+u_\mu} \cos vx dx + \frac{1}{2} \int_{330^\circ}^{330^\circ+u_\mu} \cos vx dx \right], \quad (2.134)
 \end{aligned}$$

was nach längerer Zwischenrechnung

$$\begin{aligned}
 a_{v2} &= \frac{\hat{U}}{\pi v} [(1 - \cos vu_\mu) [(1 - (-1)^v) \sin 30^\circ v + 2 \sin 90^\circ v] \\
 &\quad - \sin vu_\mu \cos 60^\circ v (\cos 90^\circ v - \cos 270^\circ v)] \quad (2.135)
 \end{aligned}$$

ergibt und somit

$$\frac{a_{v2}}{\hat{U}} = \begin{cases} 0; & v = 2k, & v = 12k + 3, & v = 12k + 9, \\ \frac{3(1 - \cos vu_\mu)}{\pi v}; & v = 12k + 1, & v = 12k + 5, \\ -\frac{3(1 - \cos vu_\mu)}{\pi v}; & v = 12k + 7, & v = 12k + 11, & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.136)$$

Ebenso erhält man

$$\frac{b_{v2}}{\hat{U}} = \frac{2U}{\pi v} \sin vu_\mu (-90^\circ v) (\cos 60^\circ v + 1), \quad (2.137)$$

$$\frac{b_{v2}}{\hat{U}} = \begin{cases} 0; & v = 2k, & v = 12k + 3, & v = 12k + 9, \\ -\frac{3 \sin vu_\mu}{\pi v}; & v = 12k + 1, & v = 12k + 5, \\ \frac{3 \sin vu_\mu}{\pi v}; & v = 12k + 7, & v = 12k + 11, & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.138)$$

und weiters

$$\begin{aligned}
 \frac{|c_{v2}|}{\hat{U}} &= \frac{3}{\pi v} \sqrt{(1 - \cos v u_\mu)^2 + \sin^2 v u_\mu} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}}{\pi v} \sqrt{1 - \cos v u_\mu}; \quad v = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots
 \end{aligned} \quad (2.139)$$

Superposition von u_1 und u_2 ergibt

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_{12}, \\
 b_1 &= \hat{U} + b_{12}, \\
 a_v &= a_{v2}, \\
 b_v &= b_{v2}; \quad v = 2, 3, 4, \dots,
 \end{aligned} \quad (2.140)$$

somit

$$\begin{aligned}
 \frac{|c_1|}{\hat{U}} &= \frac{3}{\pi} \sqrt{(1 - \cos u_\mu)^2 + \left(\frac{\pi}{3} - \sin u_\mu\right)^2} \\
 &= \frac{3}{\pi} \sqrt{2 + \frac{\pi^2}{9} - 2\left(\frac{\pi}{3} \sin u_\mu + \cos u_\mu\right)},
 \end{aligned} \quad (2.141)$$

$$\frac{|c_v|}{\hat{U}} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi v} \sqrt{1 - \cos v u_\mu}; \quad v = 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots \quad (2.142)$$

und speziell für $u_\mu = 20^\circ$:

v	1	5	7	11	13	17
$ c_v /\hat{U}$	0,630	0,292	0,256	0,120	0,083	0,019

Abbildung 2.29 gibt die graphische Darstellung.

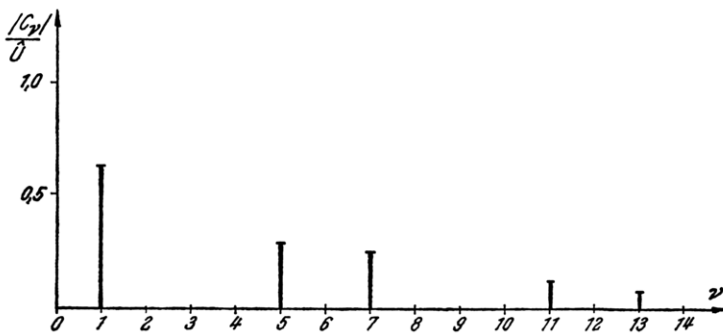


Abb. 2.29. Amplitudenspektrum zu Abb. 2.28 bei $u_\mu = 20^\circ$

2.1.1.4 Ergänzende Bemerkungen zu den Fourierschen Reihen

A. Zusammengesetzte Funktionen

In Fall L. aus Abschnitt 2.1.1.3.2 wurde an Hand eines Beispiels gezeigt, wie

eine zu analysierende Funktion aus zwei Teilfunktionen zusammengesetzt werden kann. Da die Fouriersche Reihe im allgemeinen

$$f(\omega t) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos v\omega t + b_v \sin v\omega t) \quad (2.5)$$

lautet, kann, sofern

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad (2.143)$$

mit

$$f_1(x) = \frac{a_{01}}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_{v1} \cos v\omega t + b_{v1} \sin v\omega t) \quad (2.144)$$

und

$$f_2(x) = \frac{a_{02}}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} (a_{v2} \cos v\omega t + b_{v2} \sin v\omega t) \quad (2.145)$$

gilt, offenbar geschrieben werden:

$$a_v = a_{v1} + a_{v2} \quad \text{und} \quad b_v = b_{v1} + b_{v2}. \quad (2.146)$$

Hier wollen wir zeigen, daß die Amplituden c_v nicht einfach summiert werden können. Es gilt nämlich

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} c_v \sin(v\omega t + \varphi_v), \quad (2.147)$$

sodaß für

$$f_1(x) = \frac{a_{01}}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} c_{v1} \sin(v\omega t + \varphi_{v1}) \quad (2.148)$$

und

$$f_2(x) = \frac{a_{02}}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} c_{v2} \sin(v\omega t + \varphi_{v2}) \quad (2.149)$$

zwar

$$c_v \sin(v\omega t + \varphi_v) = c_{v1} \sin(v\omega t + \varphi_{v1}) + c_{v2} \sin(v\omega t + \varphi_{v2}) \quad (2.150)$$

resultiert, aber im allgemeinen wegen unterschiedlichen φ_{v1} und φ_{v2}

$$c_v \neq c_{v1} + c_{v2}. \quad (2.151)$$

Man setzt deshalb generell bei

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x) \quad (2.152)$$

$$a_v = \sum_{i=1}^m a_{vi}, \quad b_v = \sum_{i=1}^m b_{vi} \quad (2.153)$$

und

$$c_v = \sqrt{a_v^2 + b_v^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^m a_{vi}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^m b_{vi}\right)^2}. \quad (2.154)$$

Es sei aber darauf hingewiesen, daß in jedem Einzelfall beachtet werden muß, ob die direkte Berechnung einer zusammengesetzten Funktion über die Gleichungen aus Abschnitt 2.1.1.1 oder nach Gl. (2.154) einfacher zu handhaben ist.

B. Fast-Fourier-Transformation

Für die Auswertung der Integrale zur Berechnung der Fourierkoeffizienten erweist es sich besonders bei Durchführung der Rechnungen auf Computern als für die Rechengeschwindigkeit von Vorteil, trigonometrische Funktionen gleichen Wertes [z. B. $\sin x$ und $\sin(\pi - x)$] zusammenzufassen und z. B. $\sin(x + \Delta x)$ aus $\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x$ mit gleichbleibendem Δx mit Hilfe der jeweils im vorhergehenden Schritt berechneten Werte $\sin x$, $\cos x$ zu ermitteln. Dies hat bei numerischer Behandlung, also der Aufsummierung diskreter Werte, Bedeutung [2.49], nicht aber für die hier vorgenommenen analytischen Betrachtungen.

C. Bildung neuer Funktionen durch Verschiebung in Richtung Ordinate oder Abszisse

Vertikale Verschiebung (d. h. in Richtung Ordinatenachse) ergibt Varianten der Kurvenformen, die nur durch Änderung des Mittelwertes $c_0 = a_0/2$ zum Ausdruck kommt. Dies ist z. B. bei der Berechnung von i_p aus dem Ventilstrom nützlich (Abb. 2.4 und 2.15; vgl. auch die Ausführungen in Abschnitt 6.6.2). Verschiebung in Richtung Abszissenachse verlangt bekanntlich Substitution der Variablen. Liegt ursprünglich $f(x)$ vor und verschiebt man den Kurvenverlauf in Richtung positives x um a , gleichbedeutend mit Verschiebung des Koordinatensystems in negative x -Richtung um a , und bezeichnet man das neue Koordinatensystem mit $[f(y), y]$, so gilt offensichtlich $y = x + a$. Durch Einsetzen von $x = y - a$ erhält man nun sofort die Fourierreihe im neuen Koordinatensystem; vgl. hierzu die Fußnoten auf S. 31 und 543, letztere speziell bezüglich der Änderung der Vorzeichen der Fourierkoeffizienten bei Verschiebung der Zeitfunktion um $\pi/2$.

D. Weitere spezielle Fourierreihen

Ergänzend zu den Berechnungen in Abschnitt 2.1.1.3.2 werden z. B. in den Kapiteln 4, 6, 7, 12, 14, 15, 16 und 17 weitere Analysen und/oder graphische Darstellungen von Amplitudenverläufen gebracht.

In der Literatur über Leistungselektronik finden sich Anwendungen z. B. in [2.10] und [2.11].

2.1.2 Laplacetransformation

Die Laplacetransformation wandelt die ein System beschreibenden Differentialgleichungen, sofern diese linear sind, in ein lineares algebraisches Gleichungs-

system um. Da diese Rechenmethode in zahlreichen Büchern (insbesondere auch für die Elektrotechnik) behandelt ist, wollen wir uns hier auf Literaturangaben beschränken. So finden sich allgemeine Grundlagen in [2.2], [2.4] ... [2.6], sowie spezielle Anwendungen auf dem Gebiet der Leistungselektronik in [2.7] ... [2.9]. Man wird z. B. aus [2.7] sehen, daß die Rechnung bald umfangreicher Tabellen für Korrespondenzen zwischen Zeitfunktionen und Laplacetransformierten (Bildfunktionen) bedarf, sodaß auch die Anführung einiger weniger Zusammenhänge hier unterlassen werden soll. Stattdessen sollen in Abschnitt 4.2.2.1.3g an Hand eines Beispiels einige Grundlagen der Laplacetransformation gezeigt werden.

2.1.3 Geometrische Reihen, exponentielle Verläufe und quadratische Gleichungen

a) Ein in Kapitel 4 benötigtes Detail ist die Summe geometrischer Reihen, die hier kurz angegeben werden soll.

Die geometrische Reihe

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

ist definiert durch

$$a_{j+1} = qa_j. \quad (2.155)$$

Die Summe s_n erhält man aus

$$s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad (2.156)$$

wobei für $q > 1$ besser

$$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (2.157)$$

verwendet wird.

b) Aufstellung von Formeln für exponentielle Verläufe: Es kommt oft vor, daß, ausgehend von einem Anfangswert A zur Zeit $t = t_0$, eine Funktion für $t \rightarrow \infty$ einem Endwert E zustrebt, wobei bekannt ist, daß die Funktion mit einer Zeitkonstanten τ exponentiell verläuft.

Man kann den Verlauf mit

$$f(t) = (E - A)(1 - e^{-(t-t_0)/\tau}) + A \quad (2.157a)$$

sofort angeben bzw. für $t_0 = 0$ schreiben:

$$f(t) = (E - A)(1 - e^{-t/\tau}) + A. \quad (2.157b)$$

c) Lösung quadratischer Gleichungen:

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad (2.157c)$$

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}; \quad (2.157d)$$

$$x^2 + ax + b = 0, \quad (2.157e)$$

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}. \quad (2.157f)$$

2.1.4 Berechnung von Schaltungen der Leistungselektronik

Es würde hier zu weit führen, eine Beschreibung von Rechenmethoden speziell für leistungselektronische Schaltungen zu geben, da auf diesem Gebiet eine große Zahl verschiedener Rechenprogramme entwickelt wurde. Weiters ist zu bedenken, daß sowohl Analog- als auch Digitalrechner (und Hybridrechner) Verwendung finden konnten*. Da in allen Fällen eine Reihe von rechentechnischen Details zu beachten ist, scheint die Angabe wichtiger Literaturstellen in diesem Fall zielführender als die Beschreibung teilweise heterogener Details.

a) Analogrechner. Eine der ersten erfolgreichen Berechnungen wichtiger leistungselektronischer Schaltungen, nämlich für eine dreiphasige Brücke mit Phasenanschnitt, dürfte in [2.12] beschrieben worden sein. Die für die verschiedenen Zeitbereiche, die durch das Zünden und Kommutieren der Ventile bestimmt werden, geltenden verschiedenen mathematischen Systemgleichungen werden durch monostabile Multivibratoren realisiert. Diese sind mit der Netzfrequenz-Zeitbasis entsprechend synchronisiert und schalten in den erforderlichen Zeitpunkten die verschiedenen Verstärker des Analogrechners zu bzw. weg. Zu einer leichten Realisierbarkeit werden verschiedene leicht zu vertretende Vereinfachungen vorgenommen, die im Detail in [2.12] beschrieben werden.

Weitere Publikationen über Analogrechneranwendungen in der Leistungselektronik fanden sich häufig in der Zeitschrift *Elektrie*, z. B. [2.13] ... [2.15]. Eine umfangreiche Literaturliste über Anwendungen von Analogrechnern in der Elektrotechnik erschien in [2.16]. Hierin findet man auch Angaben zur Hybridrechen-technik. Spezielle Anwendungen bei der Antriebstechnik liegen in [2.17] vor.

b) Digitalrechner (digitale Simulation). Für die Berechnung am Digitalrechner wurden eigene Computerprogramme geschaffen, um die abschnittsweise Berechnung für die Zeitintervalle zwischen den Änderungen der Leitzustände und den Übergang ins nächste Intervall auf effiziente Weise zu ermöglichen. Hierbei müssen die Kontinuitätsbedingungen beachtet werden (Ströme in Induktivitäten und Spannungen an Kondensatoren stetig); weiters darf sich aus Gründen der Stabilität des Rechenprogramms bzw. der Berechnung der Widerstand der Ventile im

*Heute werden überwiegend Digitalrechner verwendet, weil der seinerzeitige Vorteil der Analogrechner bezüglich Rechengeschwindigkeit zufolge der Zunahme an Rechenleistung digitaler Anlagen heute nicht mehr relevant ist.

leitenden und gesperrten Zustand bei manchen Programmen maximal um den Faktor 10^5 unterscheiden.

Auf dem Gebiet der digitalen Simulation hat sich eine eigene Bezeichnungsweise herausgebildet; es existiert eine große Zahl allgemeiner bzw. auf spezielle Anwendungen bezogener Literatur, wovon einige Stellen, die anwendungsorientiert erscheinen, zitiert seien: [2.20] ... [2.47]. Um den Zugang zur Literatur zu erleichtern, sollen hier zunächst einige allgemeine Ausdrücke eingeführt und dann ein einfaches Beispiel gebracht werden*: Um zu gewährleisten, daß die das elektrische Netzwerk charakterisierenden Differentialgleichungen linear unabhängig sind, werden die Kreisstrombahnen durch Wahl eines sogenannten vollständigen Baumes (V.B.) eingeschränkt. Es handelt sich dabei um ein System von Netzwerkzweigen, bei dem die Knoten eindeutig und nur über den vollständigen Baum verbunden sind. Die Kreisstrombahn verläuft in sich geschlossen von einem freien Zweig über den V.B. (Abb. 2.30). Daraus folgt, daß die Anzahl der freien Zweige gleich der Anzahl der Kreisströme m ist. Es gilt

$$m = z - k + 1,$$

wobei z Anzahl der Zweige, k Anzahl der Knoten.

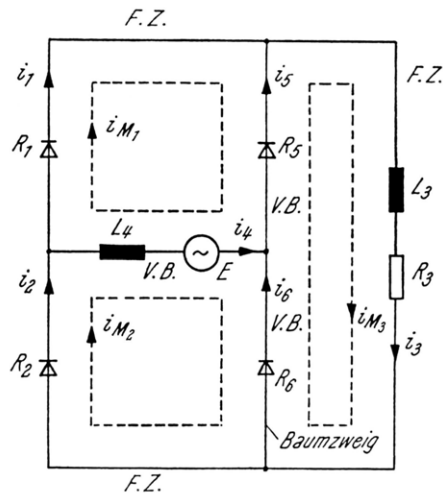


Abb. 2.30. Beispiel einer leistungselektronischen Schaltung mit Bezeichnungsweisen der digitalen Simulation. F.Z. freier Zweig, V.B. vollständiger Baum, bestehend aus einzelnen Baumzweigen, i_{M_k} Kreisströme, Maschenströme ($k = 1, 2, \dots$), i_k Zweigströme ($k = 1, 2, \dots$)

Mit den Bezeichnungen aus Abb. 2.30 soll in die in der digitalen Simulation übliche Notation eingeführt werden:

Mit R_3 diskreter ohmscher Widerstand sowie $(R_i)_{i \neq 3}$ Darstellung der elektrischen Ventile durch veränderliche Widerstände, können wir schreiben

*Bei heutigen Simulationsprogrammen sind die im folgenden beschriebenen Schritte automatisch implementiert.

$$\mathbf{i} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_M \leftrightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{M_1} \\ i_{M_2} \\ i_{M_3} \end{pmatrix}, \quad (2.158)$$

wobei $\mathbf{i}$ Vektor der Zweigströme, $\mathbf{i}_M$ Vektor der Maschenströme, $\mathbf{A}$ Zweig-Maschen-(Inzidenz)matrix sind; weiters benötigen wir im folgenden $\mathbf{A}_T$, transponierte Zweig-maschenmatrix, d. h.,

$$(a_{ik})_T = a_{ki}.$$

Für jede Kreisstrombahn läßt sich durch einen Spannungsumlauf eine lineare Differentialgleichung aufstellen. Die m Kreisstrombahnen liefern damit ein Differentialgleichungssystem, das allgemein wie folgt geschrieben werden kann:

$$\mathbf{e}_M = \mathbf{R}_M \cdot \mathbf{i}_M + \mathbf{L}_M \cdot \dot{\mathbf{i}}_M + \mathbf{S}_M \cdot \mathbf{q}_M; \quad \dot{\mathbf{q}}_M = \mathbf{i}_M. \quad (2.159)$$

q bedeutet die Ladung auf den Kondensatoren und $S = 1/C$ die reziproke Kapazität, $\mathbf{R}_M, \mathbf{L}_M, \mathbf{S}_M$ sind die (Kreis-)Matrizen der ohmschen Widerstände, der Induktivitäten bzw. der reziproken Kapazitäten, $\mathbf{e}_M$ ist der Vektor der eingepprägten Kreisspannungen.

Die Kreisgrößen (Index M) können durch folgende Beziehungen ermittelt werden:

$$\mathbf{e}_M = \mathbf{A}_T \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_z \end{pmatrix}, \quad (2.160)$$

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{A}_T \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ \vdots & & R_j & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & R_z \end{pmatrix} \mathbf{A}, \quad (2.161)$$

$$\mathbf{L}_M = \mathbf{A}_T \begin{pmatrix} L_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & L_j & \cdots & M_{jk} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & M_{kj} & \cdots & L_k \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & L_z \end{pmatrix} \mathbf{A} \quad (2.162)$$

und

$$\mathbf{S}_M = \mathbf{A}_T \begin{pmatrix} 1/C_1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & 1/C_j & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 1/C_z \end{pmatrix} \mathbf{A}. \quad (2.163)$$

Hiebei sind z Anzahl der Netzwerkzweige, m Anzahl der Kreisstrombahnen, e_j eingeprägte Spannung im Zweig j , R_j Widerstand im Zweig j , L_j Induktivität im Zweig j , C_j Kapazität im Zweig j , $M_{jk} = M_{kj}$ Gegeninduktivitäten zwischen den Zweigen j und k .

Hieraus folgt im speziellen Fall

$$\mathbf{e}_M = \mathbf{A}_T \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E \\ E \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.164)$$

Mit den Annahmen

$$R_1 = R_6 = 10^5 \, \Omega, \quad R_2 = R_5 = 2 \, \Omega, \quad R_4 = 0 \, \Omega$$

sowie R_3 allgemein (variabel), ohne speziellen Zahlenwert gegeben,

folgt aus Gl. (2.161)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^5 \end{pmatrix} \mathbf{A} \\ &= \begin{pmatrix} 10^5 + 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 + 10^5 & -10^5 \\ -2 & -10^5 & R_3 + 2 + 10^5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.165)$$

Ebenso wird $\mathbf{L}_M$ mit Hilfe von Gl. (2.162) zu

$$\mathbf{L}_M = \mathbf{A}_T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & M_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{43} & L_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} L_4 & -L_4 & -M_{43} \\ -L_4 & L_4 & M_{43} \\ -M_{34} & M_{34} & L_3 \end{pmatrix} \quad (2.166)$$

berechnet. Einsetzen von Gln. (2.164) ... (2.166) in Gl. (2.159) (mit $\mathbf{S}_M = \mathbf{0}$, $\mathbf{q}_M = \mathbf{0}$) erlaubt bereits eine systematische Vorgangsweise zur abschnittsweisen Berechnung von $\mathbf{i}_M$ auf Digitalrechnern [2.47].

2.2 Elektrotechnische Grundlagen

2.2.1 Allgemeines

Hier soll vorausgesetzt werden, daß die Grundlagen der Elektrotechnik weitgehend bekannt sind. Wir wollen daher nur einige Bereiche herausgreifen, die für die Leistungselektronik wichtig sind, aber in vielen Fällen in den allgemeinen Grundlagen höchstens gestreift werden. Vorher sollen noch Konventionen zu den Zählpfeilen erwähnt werden.

2.2.2 Spannungen und elektromotorische Kräfte (Zählpfeile und Definitionen)

Allgemein gilt

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b, \quad (2.167)$$

wobei der Zählpfeil für u_{ab} bei Punkt a beginnt und zu Punkt b weist. Ebenso weist der Zählpfeil von e_{ab} von Punkt a nach Punkt b . Es gilt immer $u_{ab} = e_{ba}$; der Einfachheit halber soll hierbei nur jeweils ein Schaltelement betrachtet werden.

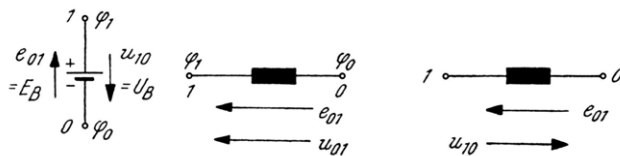


Abb. 2.31. Batterie und Transformatorwicklungen: Potentiale φ_i , Spannungen u_{ij} und elektromotorische Kräfte e_{kl} [e_{01} ist die (innere) Ursache (die EMK, physikalisch von 0 nach 1 gerichtet) für eine (äußere) Potentialdifferenz, die als „Gegengewicht“ zur EMK von 1 nach 0 gerichtet ist.]

Dies kann man sich anschaulich z. B. an Hand der Batterie erklären: e_{01} ist die elektromotorische Kraft (EMK, gemessen in Volt, also physikalisch eine Span-

nung), die einen Transport der positiven Ionen derart bewirkt, daß Punkt 1 gegenüber Punkt 0 ein positives Potential erhält, wodurch die äußere Spannung an den Batterieklemmen $u_{10} = \varphi_1 - \varphi_0 \geq 0$ wird. e_{01} ist also sozusagen die Ursache, u_{10} die Wirkung.

Analoges gilt bei Transformatorwicklungen: Die Induktion zufolge des Faradayschen Induktionsgesetzes in einer Richtung innerhalb der Wicklung bewirkt, daß außen eine Spannung in der entgegengesetzten Richtung auftritt. Somit gilt hier

$$e_{01} = u_{10} = \varphi_1 - \varphi_0 \quad (2.168)$$

bzw.

$$e_{01} = -u_{01} = \varphi_1 - \varphi_0. \quad (2.169)$$

Man kann auch sagen, daß die äußere Spannung u_{10} der induzierten Spannung (EMK) e_{01} das Gleichgewicht halten muß.

2.2.3 Transformatoren

Als Konvention bei der Darstellung von Transformatoren in der Leistungselektronik gilt, daß parallel gezeichnete Wicklungen auf demselben Kern liegen. Das heißt also, tritt in einer Wicklung eine Spannung auf, so entsteht in allen parallel gezeichneten Wicklungen ebenso eine Spannung, die allerdings je nach Wicklungszahl und -sinn eine andere Größe und Polarität haben kann. Weiters wird bei den Zeichnungen meist darauf geachtet, daß Phasenverschiebungen zwischen den Spannungen von Wicklungen verschiedener Kerne durch entsprechende Verdrehung der einzelnen Wicklungssymbole angedeutet werden. Als Alternative wird der Wicklungssinn durch Punkte an der Wicklung gekennzeichnet (vgl. Abschnitt 11.2).

Eine spezielle Transformatorart, nämlich der Spartransformator (Abb. 2.32), wird speziell bei selbstgeführten Wechselrichtern verwendet (vgl. Abschnitte 4.3 und 16.1).

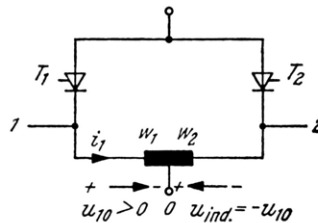


Abb. 2.32. Spartransformator

Wird von außen z. B. eine Spannung $u_{10} = U_B$ angelegt und gilt für die Wicklungszahlen $w_1 = w_2$, so wird zufolge des gemeinsamen Kernes

$$u_{12} = 2u_{10} = 2U_B. \quad (2.170)$$

2.2.4 Drehstromsysteme – Verhalten bei Oberschwingungen

Wie in Abschnitt 2.1.1.3.2 bereits gezeigt, tritt auf der Netzseite (Primärseite) einer leistungselektronischen Schaltung ein mit Oberschwingungen behafteter Strom auf. Nehmen wir nun ein Amplitudenspektrum z. B. nach Abb. 2.8 (oder Abb. 2.12) an, so sehen wir, daß dort nur ungeradzahlige Harmonische auftreten. Im allgemeinen Fall (siehe Kapitel 4 und 6, z. B. Abb. 6.29) treten aber auch geradzahlige Oberschwingungen auf, was im folgenden berücksichtigt werden soll:

$$i_x = c_0 + c_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + c_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + c_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + c_4 \sin(4\omega t + \varphi_4) + c_5 \sin(5\omega t + \varphi_5) + \dots, \quad (2.171)$$

wobei die c_i die Dimension eines Stromes haben. c_0 muß $= 0$ sein, falls zwischen der Leistungselektronik (mit Last) und der Generatorseite ein Transformator liegt (vgl. Abschnitte 4.2 und 6.6.1 sowie 6.6.2).

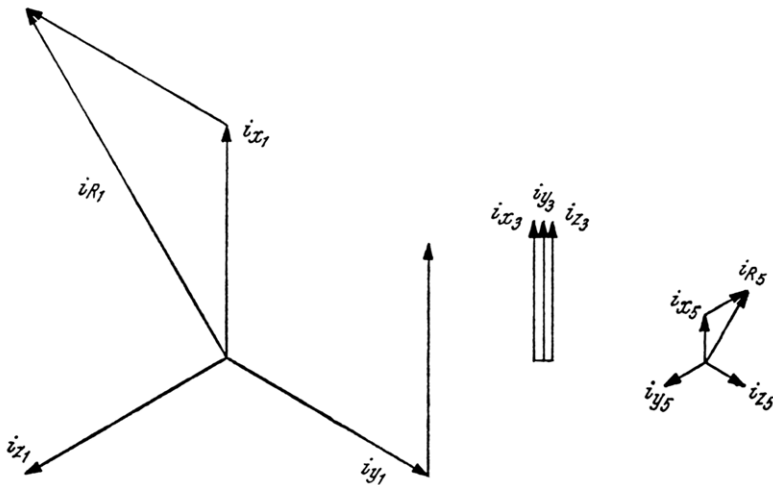


Abb. 2.33. Zeigerdiagramme zur Zusammensetzung der Linienströme aus den Phaseströmen am Beispiel der 1., 3. und 5. Harmonischen

Zufolge der Phasenverschiebungen in den beiden anderen Wicklungen treten dort folgende Ströme auf:

$$\begin{aligned} i_y = & c_1 \sin(\omega t + \varphi_1 - 2\pi/3) \\ & + c_2 \sin(2\omega t + \varphi_2 - 2 \cdot 2\pi/3) + c_3 \sin(3\omega t + \varphi_3 - 3 \cdot 2\pi/3) \\ & + c_4 \sin(4\omega t + \varphi_4 - 4 \cdot 2\pi/3) + c_5 \sin(5\omega t + \varphi_5 - 5 \cdot 2\pi/3) + \dots \end{aligned} \quad (2.172)$$

und

$$\begin{aligned}
 i_z = & c_1 \sin(\omega t + \varphi_1 - 4\pi/3) \\
 & + c_2 \sin(2\omega t + \varphi_2 - 2 \cdot 4\pi/3) + c_3 \sin(3\omega t + \varphi_3 - 3 \cdot 4\pi/3) \\
 & + c_4 \sin(4\omega t + \varphi_4 - 4 \cdot 4\pi/3) + c_5 \sin(5\omega t + \varphi_5 - 5 \cdot 4\pi/3) + \dots, \quad (2.173)
 \end{aligned}$$

was sich einfach durch Verschiebung der Zeitbasis, also Ersetzen von ωt durch $\omega t - 2\pi/3$ bzw. $\omega t - 4\pi/3$, in allen Termen von i_x ergibt. Man sieht hieraus z. B., daß alle 3. Harmonischen gleichphasig werden (Abb. 2.33).

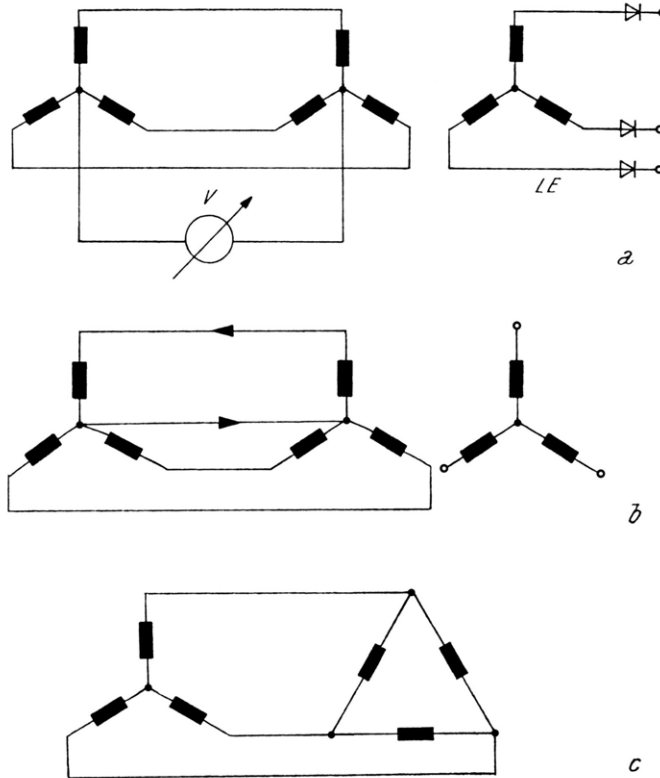


Abb. 2.34. Schaltungsvarianten der Dreiphasensysteme. *a* Sternschaltungen ohne Nulleiter, *b* mit Nulleiter, *c* Kombination mit Dreieckschaltung, *LE* leistungselektronische Schaltung, *V* selektives Voltmeter zur Messung von Spannungsharmonischen, die durch Stromharmonische in den Verbindungsleitungen verursacht werden

Sind die Wicklungen x, y, z in Stern mit Nulleiter geschaltet, treten auch in den Zuleitungen die Wicklungsströme unmittelbar auf. Bei Dreieckschaltung ergibt sich in den äußeren Zuleitungen (Linien) jeweils die Differenz zweier Ströme, z. B.

$$i_R = i_x - i_y,$$

woraus sich nach mathematischer Umformung bzw. durch Betrachtung des Zeitdiagramms (Abb. 2.33) ergibt:

$$i_R = \sqrt{3}c_1 \sin(\omega t + \varphi_1 + \pi/6) + \sqrt{3}c_2 \sin(2\omega t + \varphi_2 - \pi/6) \\ + \sqrt{3}c_4 \sin(4\omega t + \varphi_4 + \pi/6) + \sqrt{3}c_5 \sin(5\omega t + \varphi_5 - \pi/6) + \dots \quad (2.174)$$

Man kann sich leicht überlegen, daß alle Harmonischen mit den Ordnungszahlen $3n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) wegfallen. Analoge Ausdrücke ergeben sich für i_S und i_T , wobei auch hier alle Harmonischen der Ordnung $3n$ zu null werden.

Man sieht, daß in erster Näherung bei Dreieckschaltung in den Zuleitungen keine 3. Harmonischen auftreten, da sie in den Dreieckswicklungen praktisch kurzgeschlossen werden. Bei Sternschaltung mit Nulleiter fließen sie jedoch gleichsinnig durch letzteren. Gleiches gilt für alle Harmonischen mit Ordnungszahlen $3n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Die verschiedenen Schaltungen (Abb. 2.34) sind deshalb auf Grund der entsprechenden Vorschriften mit unterschiedlichen Stromrichterleistungen belastbar, wie in Abschnitt 6.1.2 angeführt wird, d. h., Dreieckschaltungen dürfen höhere Stromrichterleistungen aufweisen.

2.2.5 Leistungsarten und Kennwerte nichtsinusförmiger Ströme und Spannungen

Eng zusammenhängend mit dem Betrieb leistungselektronischer Schaltungen am Netz ist selbstverständlich der Begriff von Wirk- und Scheinleistung, wobei hier noch Blind- und Verzerrungsleistung berücksichtigt werden sollen. Zwar trägt die Verzerrungsleistung nicht zum Transport von Energie bei und könnte deshalb als Blindleistung bezeichnet werden; die Blindleistung wird aber meist nur für rein sinusförmige Spannungen und Ströme derselben Frequenz definiert. Um hier mathematisch klare Verhältnisse zu schaffen, hat es sich in der Leistungselektronik eingebürgert, die Verzerrungsleistung, die im folgenden abgeleitet werden soll, separat zu behandeln. Die Motivation dafür wird auch an Hand eines Beispielen verdeutlicht werden. Zunächst sollen jedoch die Effektivwerte nichtsinusförmiger Spannungen und Ströme (oft als Mischspannungen bzw. -ströme bezeichnet) speziell am Beispiel des Stromes berechnet werden.

A. Effektivwerte

Die Definition des Effektivwertes lautet

$$I = I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}. \quad (2.175)$$

$i(t)$ sei als Fouriersche Reihe dargestellt:

$$i = i_0 + i_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + i_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \quad (2.176)$$

mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.177)$$

Einsetzen in die Definitionsgleichung bringt ein Integral über quadratische Glieder der Form

$$i_v^2 \sin^2(v\omega t + \varphi_v)$$

und über Kreuzprodukte

$$i_j i_k \sin(j\omega t + \varphi_j) \sin(k\omega t + \varphi_k); \quad k \neq j,$$

wobei letztere wegen der Orthogonalität der Kreisfunktionen nach Integration über die Periode T den Wert 0 ergeben. Man erhält somit, da

$$\sin^2 v\omega t + \cos^2 v\omega t = 1$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 v\omega t + \cos^2 v\omega t) d\omega t = 1$$

und, weil sowohl $\sin^2 v\omega t$ als auch $\cos^2 v\omega t$ im Intervall $[0, 2\pi]$ denselben Flächeninhalt aufweisen (beide sind ja nur in Richtung ωt -Achse verschoben und v sei ganzzahlig),

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 v\omega t d\omega t = \frac{1}{2} \quad (2.178)$$

bzw.

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_v^2 \sin^2 v\omega t dt = \frac{i_v^2}{2}. \quad (2.179)$$

Somit wird

$$I = I_{eff} = \sqrt{i_0^2 + \frac{i_1^2}{2} + \frac{i_2^2}{2} + \dots}. \quad (2.180)$$

Da bekanntlich bei einem rein sinusförmigen Strom, also auch bei jeder Harmonischen für sich betrachtet,

$$I_v = I_{v,eff} = \frac{i_v}{\sqrt{2}} \quad (2.181)$$

und beim Gleichstrom

$$I_0 = I_{0,eff} = i_0 \quad (2.182)$$

gelten, kann man

$$I_{eff} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} \quad (2.182a)$$

und ebenso

$$U_{eff} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \quad (2.183)$$

schreiben.

B. Wirkleistungen

Für die Wirkleistung überschwingungsbehafteter Ströme und Spannungen gilt die allgemeine Formel

$$P = P_W = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt, \quad (2.184)$$

wobei der Index W hier und da zur deutlicheren Kennzeichnung hinzugefügt ist, aber P den Normen entspricht. In Gl. (2.184) gilt

$$u(t) = u_0 + u_1 \sin(\omega t + \varphi_{u1}) + u_2 \sin(2\omega t + \varphi_{u2}) + \dots, \quad (2.185)$$

$$i(t) = i_0 + i_1 \sin(\omega t + \varphi_{i1}) + i_2 \sin(2\omega t + \varphi_{i2}) + \dots. \quad (2.186)$$

Falls man wieder beachtet, daß Kreuzprodukte nach Integration = 0 ergeben, verbleiben nach trigonometrischen Umformungen (vgl. Anhang 2A) Ausdrücke nach folgendem Muster:

$$\begin{aligned} & \sin(\omega t + \varphi_{u1}) \sin(\omega t + \varphi_{i1}) \\ &= (\sin \omega t \cos \varphi_{u1} + \sin \varphi_{u1} \cos \omega t)(\sin \omega t \cos \varphi_{i1} + \sin \varphi_{i1} \cos \omega t) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) \cos \varphi_{u1} \cos \varphi_{i1} + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) \sin \varphi_{u1} \sin \varphi_{i1} \\ &+ \text{Glieder mit } (\sin \omega t \cos \omega t), \text{ die nach Integration 0 ergeben.} \end{aligned} \quad (2.187)$$

Mit

$$\cos \varphi_{u1} \cos \varphi_{i1} + \sin \varphi_{u1} \sin \varphi_{i1} = \cos(\varphi_{u1} - \varphi_{i1}) \quad (2.188)$$

und Setzen von

$$\varphi_{u1} - \varphi_{i1} = \varphi_1, \quad (2.189)$$

ebenso für φ_v mit $v = 2, 3, \dots$, erhält man

$$P = u_0 i_0 + \frac{u_1 i_1}{2} \cos \varphi_1 + \frac{u_2 i_2}{2} \cos \varphi_2 + \dots \quad (2.190)$$

und mit U_v analog wie bei I_v (Gl. (2.181))

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots, \quad (2.191)$$

wobei die U_v, I_v die Einzel-Effektivwerte darstellen.

C. Kennwerte, am Beispiel der Spannungen angeschrieben

a) *Scheitelfaktor* (engl. Crest Factor)

$$f_s = \frac{\hat{U}}{U} \quad (U = \text{Effektivwert}), \quad (2.192)$$

z. B. für

$$\text{reinen Sinusvorgang:} \quad f_s = \sqrt{2},$$

$$\text{Dreieckskurve (Abb. 2.6a):} \quad f_s = \sqrt{3},$$

$$\text{Rechteckschwingung (Abb. 2.7):} \quad f_s = 1,$$

$$\text{Gleichspannung:} \quad f_s = 1.$$

Meist wird f_s allerdings nur bei reinen Wechselgrößen (d. h. bei $U_d = 0$) definiert ($U_d = U_0$ arithmetischer Mittelwert).

b) *Formfaktor*

$$f_F = \frac{U_{eff}}{U_{Gl}}, \quad (2.193)$$

z. B. für Sinus 1,11; Dreieck 1,15; Rechteck 1. $U_{Gl} = \text{Gleichrichtwert} = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt$.

c) *Oberschwingungsgehalt* (Klirrfaktor, meist nur bei $U_d = 0$ definiert)

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U} = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2(-U_d^2)}}{U}, \quad (2.194)$$

wobei U der gesamte Effektivwert ist. In der angloamerikanischen Literatur wird alternativ THD (Total Harmonic Distortion) verwendet, wobei im Nenner von Gl. (2.194) U durch U_1 ersetzt ist, also auf die Grundschwingung bezogen wird.

d) *Grundschwingungsgehalt* (Verzerrungsfaktor, meist nur bei $U_d = 0$ definiert; engl. Distortion Power Factor)

$$g = \frac{U_1}{U},$$

$$g^2 + k^2 = 1. \quad (2.195)$$

e) *Welligkeit*

$$w = \frac{\sqrt{U^2 - U_d^2}}{U_d} = \frac{U_{\sim}}{U_d} \quad (2.196)$$

(z. B. bei Gleichstrom: $U = U_d$, $w = 0$). Wenn U der Effektivwert der Mischspannung ist, wird $\sqrt{U^2 - U_d^2}$ der Effektivwert $U_{\sim}$ des Wechselspannungsanteiles (siehe auch Gl. (2.183)). Weitere Angaben für Welligkeiten finden sich in Tafel 6.1.

Zur Verdeutlichung der auf Spannungen (wie hier) bzw. auf Ströme bezogenen Kennwerte werden oft die Indizes u bzw. i verwendet, so daß man hier g_u , w_u etc. schreiben könnte; weiteres siehe Abschnitt 14.6.2.5.

D. Leistungsbilanz und Leistungsarten überschwingungsbehafteter Ströme und Spannungen

Geht man aus von der allgemeinen Definition der Scheinleistung S (früher oft P_S genannt)

$$S = P_S = U \cdot I, \quad (2.197)$$

so erhält man mit Gl. (2.183) und nachfolgender Vereinfachung der Summenschreibweise

$$S = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \sqrt{\sum_{l=0}^{\infty} I_l^2} = \sqrt{\sum_k U_k^2} \sqrt{\sum_l I_l^2} \quad (2.198)$$

und somit

$$S^2 = \sum_k \sum_l (U_k I_l)^2, \quad (2.199)$$

was durch explizites Anschreiben leicht verifiziert werden kann.

Um auf die Phasenverschiebungen zu gelangen, formen wir zunächst rein formal um:

$$S^2 = \sum_k (U_k I_k \cos \varphi_k)^2 + \sum_k (U_k I_k \sin \varphi_k)^2 + \sum_k \sum_{\substack{l \\ k \neq l}} (U_k I_l)^2. \quad (2.200)$$

Weil

$$\left(\sum_k a_k \right)^2 = \sum_k a_k \sum_l a_l = \sum_k a_k^2 + \sum_{\substack{k \\ k \neq l}} \sum_l a_k a_l \quad (2.201)$$

und somit

$$\sum_k a_k^2 = \left(\sum_k a_k \right)^2 - \sum_{\substack{k \\ k \neq l}} \sum_l a_k a_l, \quad (2.202)$$

kann man schreiben

$$\begin{aligned} S^2 = & \left(\sum_k U_k I_k \cos \varphi_k \right)^2 + \left(\sum_k U_k I_k \sin \varphi_k \right)^2 - \sum_{\substack{k \\ k \neq l}} \sum_l U_k I_k \cos \varphi_k U_l I_l \cos \varphi_l - \\ & - \sum_{\substack{k \\ k \neq l}} \sum_l U_k I_k \sin \varphi_k U_l I_l \sin \varphi_l + \sum_{\substack{k \\ k \neq l}} \sum_l (U_k I_l)^2 \end{aligned} \quad (2.203)$$

und nach entsprechender Zusammenfassung

$$S^2 = \left(\sum_k U_k I_k \cos \varphi_k \right)^2 + \left(\sum_k U_k I_k \sin \varphi_k \right)^2 + \sum_{\substack{k, l \\ k \neq l}} [(U_k I_l)^2 - U_k I_k U_l I_l \cos(\varphi_k - \varphi_l)]. \quad (2.204)$$

Der erste Term ist das Quadrat der Wirkleistung (Gl. (2.191)), der zweite Term besteht aus den Summanden $U_k I_k \sin \varphi_k$, die üblicherweise als Blindleistungen bezeichnet werden:

$$Q^2 = P_B^2 = \left(\sum_k U_k I_k \sin \varphi_k \right)^2. \quad (2.205)$$

Somit verbleibt der dritte Term, der aus formalen Gründen die Bezeichnung Verzerrungsleistung (D , früher P_V) erhält. Man kann also schreiben:

$$P_S^2 = P_W^2 + P_B^2 + P_V^2 \quad (2.206)$$

bzw.

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2, \quad (2.207)$$

wobei die alternativen Bezeichnungen

$$P_W = P; \quad P_S = S, \quad P_B = Q \quad \text{und} \quad P_V = D \quad (2.208)$$

verwendet wurden.

Wie eingangs zu diesem Abschnitt erwähnt, wird D aus den dort angegebenen Gründen separat von Q definiert, trägt aber ebenso wie Q nichts zur eigentlichen Leistungsübertragung bei; D macht sich letzten Endes durch die den Oberschwingungsströmen entsprechenden ohmschen Verluste (die eben größer als bei reiner Wirkleistungsübertragung sind) in den Zuleitungen bemerkbar. Daß $Q = 0$ bei $D \neq 0$ möglich ist, zeigt ein später folgendes Beispiel (S. 68).

Graphische Darstellung der Leistungsbilanz. Schreiben wir (mit u_v, i_v als Amplituden der einzelnen Harmonischen)

$$u = u_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + \dots + u_v \sin(v\omega t + \alpha_v) + \dots, \\ i = i_1 \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi_1) + \dots + i_v \sin(v\omega t + \alpha_v - \varphi_v) + \dots \quad (2.209)$$

und führen (formal) eine Hilfsgröße ein [2.48],

$$u^* = u_1 \sin(\omega t + \alpha_1 - \pi/2) + \dots + u_v \sin(v\omega t + \alpha_v - \pi/2) + \dots, \quad (2.210)$$

so wird $\varphi_v^* = \varphi_v - \pi/2$ die Phasenverschiebung von $u_v^* = u_v$ gegenüber i_v . Da $u_v^* = u_v$ vorausgesetzt wird, gilt auch für die Effektivwerte

$$U^* = U. \quad (2.211)$$

Für die Wirkleistung setzt man an

$$P_{(W)} = \sum U_v I_v \cos \varphi_v = UI \cos \varphi \quad (2.212)$$

mit $\cos \varphi$ als reiner Rechengröße. Zur einfacheren Schreibung wollen wir die U_v , U_v^* und I_v als Komponenten von entsprechenden Vektoren auffassen und skalare Produkte anschreiben; so ist z. B.

$$(U \cdot I) = \sum U_v I_v \cos \varphi_v = P_{(W)} \quad (2.213)$$

und weiters

$$(U \cdot U^*) = 0 \quad (2.214)$$

wegen des Winkels $\pi/2$ zwischen allen Komponenten.

Die bereits vorhin definierte Blindleistung läßt sich als

$$Q = P_B = \sum U_v I_v \sin \varphi_v = \sum U_v^* I_v \cos \left(\varphi_v - \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.215)$$

darstellen, da ja $U_v = U_v^*$. Wir verwenden

$$\varphi_v - \pi/2 = \varphi_v^* \quad (2.216)$$

und erhalten

$$Q = (U^* I) = U^* I \cos \varphi^* \quad (2.217)$$

mit φ^* als neuer Rechengröße, die im folgenden diskutiert werden soll.

Mit

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad (2.207)$$

bzw. mit den neuen Bezeichnungen nunmehr

$$S^2 = (UI)^2 = (UI \cos \varphi)^2 + (U^* I \cos \varphi^*)^2 + D^2 \quad (2.218)$$

suchen wir eine Beziehung zwischen φ^* und φ . Aus Gl. (2.218) folgt

$$(U^* I \cos \varphi^*)^2 + D^2 = (UI \sqrt{1 - \cos^2 \varphi})^2;$$

mit $U^* = U$ wird somit

$$(UI)^2 \cos^2 \varphi^* + D^2 = (UI)^2 (\sqrt{1 - \cos^2 \varphi})^2 \quad (2.219)$$

und, da D^2 jedenfalls ≥ 0 ,

$$(UI)^2 \cos^2 \varphi^* \leq (UI)^2 (\sqrt{1 - \cos^2 \varphi})^2 \quad (2.220)$$

bzw.

$$\cos \varphi^* \leq +\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}, \quad (2.221)$$

da aus physikalischen Gründen $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ sein muß (φ ist ein Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung).

Nunmehr ist

$$\cos \varphi^* \leq \sin \varphi = \cos(\pi/2 - \varphi) \quad (2.222)$$

und

$$|\varphi^*| \geq |\pi/2 - \varphi|, \quad (2.223)$$

da $\cos \omega t$ im Intervall $(0, \pi/2)$ monoton fällt (Abb. 2.35a) bzw. auch in negativer ωt -Richtung von 0 bis $-\pi/2$, was durch Setzen des Absolutbetrages berücksichtigt wurde.

Die bisherigen Überlegungen lassen ein Zeigerdiagramm nach Abb. 2.35b aufstellen, in dem berücksichtigt ist, daß einerseits zwischen $\vec{U}$ und $\vec{U}^*$ ein rechter Winkel sein muß, andererseits der Winkel zwischen $\vec{U}^*$ und $\vec{I}$ größer als $\pi/2 - \varphi$ sein muß, sodaß $\vec{U}^*$ nicht in der aus $\vec{U}$ und $\vec{I}$ aufgespannten Ebene liegen kann.

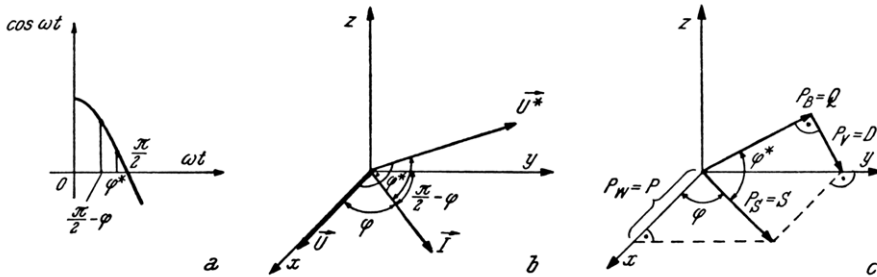


Abb. 2.35. *a* Monotones Abfallen der Cosinusfunktion in $(0, \pi/2)$, *b* Spannungs- und Stromzeiger (Die Vektoren werden in Text durch Fettdruck dargestellt.), *c* Leistungszeiger

Dies führt direkt zur Darstellung der Leistungen in Abb. 2.35c. Es ergibt sich tatsächlich

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2. \quad (2.207)$$

Beispiele:

1. Ohmsche Last: Als einfachste Möglichkeit betrachten wir die ohmsche Last. Hier gilt $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = 0$, woraus nach Einsetzen von $Q = 0$ und mit $U_i/I_i = R = U_k/I_k$

$$D = \sqrt{\sum_{i,k} (U_i I_k - U_k I_i)^2} = 0$$

wird. Somit ist $S = P$, und alle Zeiger (I, U, P und S) fallen in dieselbe Richtung.

2. Gleichrichtung: Man erhält sowohl ohne Phasenanschnitt (mit oder auch ohne Freilaufdiode) als auch mit Phasenanschnitt [hier nur bei Verwendung vorzei-

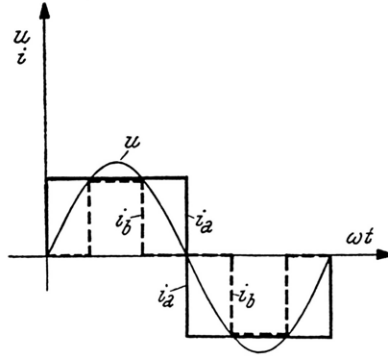


Abb. 2.36. Gleichrichtung (u Netzspannung, i Netzstrom), i_a ohne Phasenanschnitt ($\alpha = 0$), i_b mit Phasenanschnitt ($\alpha > 0$) (zweipulsig) und vorzeitiger Löschung (Abb. 6.25)

tiger (Zwangs-)Löschung, d. h. Ausschaltung] einen Netzstrom, dessen Fourierreihe

$$i = \hat{I}_1 \sin \omega t + \hat{I}_3 \sin 3\omega t + \hat{I}_5 \sin 5\omega t + \dots$$

lautet, somit

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \dots = 0;$$

mit

$$u = \hat{U}_1 \sin \omega t$$

ergibt sich

$$u^* = \hat{U}_1 \sin(\omega t - \pi/2).$$

Wir erhalten weiters

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = U_1 I_1$$

und

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 = 0.$$

Da

$$S = UI,$$

ist mit

$$U = U_1 \quad \text{und} \quad I = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} \neq I_1$$

nunmehr

$$S = U_1 I \neq P.$$

Bei oberflächlicher Betrachtung hätte man wegen $Q = 0$ hier den falschen Schluß $S = P$ ziehen können. Nun wird also die Notwendigkeit der Berücksichtigung von D besonders deutlich:

$$S^2 = P^2 + D^2 \quad \text{und} \quad S \neq P,$$

obwohl $Q = 0$.

Im Zeigerdiagramm nach Abb. 2.35c kommt wegen $Q = 0$ jetzt D in die y -Achse zu liegen (Abb. 2.37).

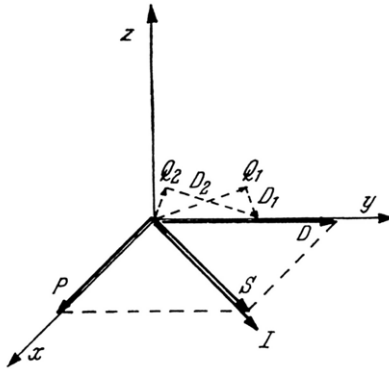


Abb. 2.37. Leistungszeiger zu Abb. 2.36. Angedeutet sind $(Q_1, D_1) \rightarrow (Q_2, D_2)$ für fortschreitende Abnahme von Q_i , woraus zu sehen ist, daß D für $Q = 0$ in die y -Achse fällt.

2.2.6 Kennwerte bei nichtsinusförmigem Strom und sinusförmiger Spannung; Leistungsfaktor und Verschiebungsfaktor

Für die Betrachtung der Netzseite leistungselektronischer Schaltungen kann oft starre, rein sinusförmig eingeprägte Netzspannung angenommen werden. [Dies gilt natürlich nicht, wenn man z. B. Spannungseinbrüche durch Kommutierungen untersuchen will, die zu Netzurückwirkungen (Kapitel 6) und elektromagnetischen Beeinflussungen (Kapitel 7) Anlaß geben; wohl trifft die Vereinfachung aber für die meisten Leistungsüberlegungen mit guter Näherung zu.]

Zunächst sieht man wegen

$$U_d = U_0 = 0; \quad U_k = 0 \quad \text{für} \quad k \geq 2, \quad U = U_1$$

aus Gl. (2.191):

$$P (= P_W) = U I_1 \cos \varphi_1 = P_1. \quad (2.224)$$

Man definiert nun als (totalen) Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{P_S} = \frac{P}{S} \quad (2.225)$$

und als Grundschiwingungswirkstrom

$$I_{W_1} = I_1 \cos \varphi_1. \quad (2.226)$$

Definiert man I_{B_1} als Grundschiwingungsblindstrom, so wird

$$\begin{aligned} I^2 &= I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots = I_1^2 \cos^2 \varphi_1 + I_1^2 \sin^2 \varphi_1 + I_2^2 + I_3^2 + \dots \\ &= I_{W_1}^2 + I_{B_1}^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots \end{aligned}$$

Manchmal werden für $U = U_1$ auch Grundschiwingungsscheinleistung $S_1 = U_1 I_1$, Grundschiwingungswirkleistung $P_1 = U I_1 \cos \varphi_1$ (hier gleich P) sowie Grundschiwingungsblindleistung $Q_1 = U I_1 \sin \varphi_1$ definiert.

Aus Gl. (2.204) (letzter Term) erhält man

$$P_V^2 = D^2 = U^2 \sum_{k=2}^{\infty} I_k^2, \quad (2.227)$$

aus Gl. (2.198)

$$P_S^2 = S^2 = U^2 I^2 = U^2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2. \quad (2.228)$$

Gleichung (2.205) liefert

$$P_B^2 = Q^2 = U^2 I_1^2 \sin^2 \varphi_1 = Q_1^2 \quad (2.229)$$

und somit nach Anwendung von Gln. (2.224) und (2.227) ... (2.229)

$$S^2 = P_1^2 + Q_1^2 + D^2. \quad (2.230)$$

Kombiniert man nun Gln. (2.224) ... (2.226) und (2.228), so ergibt sich

$$\lambda = \frac{P_1}{S} = \frac{U I_{W_1}}{U I} = \frac{I_{W_1} I_1}{I_1 I} \quad (2.231)$$

nach Erweiterung mit I_1 . Berücksichtigt man Gl. (2.195) und wieder Gl. (2.226), so erhält man

$$\lambda = g_i \cos \varphi_1, \quad (2.232)$$

wobei der Index i oft auf den Grundschiwingungsgehalt g des Stromes hinweist. $\cos \varphi_1$ wird somit nur bei rein sinusförmigem Strom gleich λ , da nur dann $I = I_1$ und $g_i = I_1/I = 1$ gelten; hierzu tritt noch die Bedingung rein sinusförmiger Span-

nung, wie ja hier vorausgesetzt ist (da sonst schon $P = P_1$ und Gln. (2.224) sowie (2.231) nicht zuträfen). Bei $\lambda \neq \cos \varphi_1$ heißt $\cos \varphi_1$ Verschiebungsfaktor.

2.3 Literatur

- [2.1] BRONSTEIN, I. N., und K. A. SEMENDJAJEW: Taschenbuch der Mathematik, 2. Aufl. Leipzig: VEB Edition Leipzig. 1961.
- [2.2] SPIEGEL, M. R.: Mathematical Handbook of Formulas and Tables. New York: McGraw-Hill. 1968.
- [2.3] BARTSCH, H.-J.: Mathematische Formeln, 11. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag. 1971.
- [2.4] HOFMANN, H.: Die Laplacetransformation und ihre Anwendung in der Elektrotechnik und Regelungstechnik. ÖZE **15** (2), 33 ... 40 (1962); ÖZE **15** (3), 79 ... 84 (1962); ÖZE **15** (4), 121 ... 128 (1962); ÖZE **15** (7), 301 ... 307 (1962).
- [2.5] WEBER, H.: Laplace-Transformation für Ingenieure der Elektrotechnik. Stuttgart: Teubner. 1976.
- [2.6] DOETSCH, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation, 2. Aufl. München: R. Oldenbourg. 1961.
- [2.7] NEUPAUER, H.: Stabilitätsuntersuchungen am Parallelschwingkreisumrichter mit Hilfe einer Nachbildung des Umrichters an einer digitalen Rechenanlage. Dissertation, TU Wien. 1972.
- [2.8] MEIER, U.: Berechnung selbstgeführter Wechselrichter mit und ohne Gegendioden auf Grund eines Ersatzschemas dritter Ordnung. Zürich: Juris-Verlag. 1968.
- [2.9] MÜLLER-STROBEL, J.: Ein Beitrag zur Berechnung des Gleich-Wechselstrom-Mutators mittels der Laplaceschen Transformation. Bull. SEV **31**, 508 (1940).
- [2.10] ECKHARDT, H.: Fourieranalyse der ideellen Spannung eines Steuerumrichters. ETZ-A **92** (2), 70 ... 73 (1971).
- [2.11] ECKHARDT, H., und F. HOLZMANN: Berechnung des Oberschwingungsgehaltes in der Ausgangsspannung eines Steuerumrichters. ETZ-A **92** (6), 354 ... 357 (1971).
- [2.12] LIPO, T. A.: Analog Computer Simulation of a Three-Phase Full-Wave Controlled Rectifier Bridge. Proc. IEEE **57**, 2137 ... 2146 (1969).
- [2.13] BÜCHNER, P.: Methoden zur analogen Simulation von Stromrichterstellgliedern. Elektrie **25** (4), 146 ... 148 (1971).
- [2.14] BÜCHNER, P.: Zwei Methoden zur Analogsimulation der Ströme bei Pulswechselrichtern. Elektrie **23** (9), 360 ... 362 (1969).
- [2.15] HORNIG, G.: Analoge Simulation als Hilfsmittel zur Dimensionierung von Schwingkreiswechselrichtern. Elektrie **27** (6), 301 ... 304 (1973).
- [2.16] KRAUSE, P. C., T. A. LIPO und D. P. CARROLL: Applications of Analog and Hybrid Computation in Electric Power System Analysis. Proc. IEEE **62** (7), 994 ... 1009 (1974).
- [2.17] LIPO, T. A.: The Analysis of Induction Motors with Voltage Control by Symmetrically Triggered Thyristors. IEEE Trans. **PAS 90** (2), 515 ... 525 (1971).
- [2.18] BEDFORD, B. D., und R. G. HOLT: Principles of Inverter Circuits. New York: Wiley. 1964.
- [2.19] DAVIS, R. M.: Power Diode and Thyristor Circuits. London: Cambridge University Press. 1971.
- [2.20] MUTSCHLER, P.: Verfahren zur digitalen Simulation beliebiger Stromrichterschaltungen. ETZ-A **95** (11), 610 ... 614 (1974).
- [2.21] EISENACK, H., und H. HOFMEISTER: Digitale Nachbildung von elektrischen Netzwerken mit Dioden und Thyristoren. Arch. Elektrotechnik **55**, 32 ... 43 (1972).
- [2.22] MÜLLER, R.: Erzeugung des Differentialgleichungssystems für die Simulation einer HGÜ mit mehreren Drehstrombrückenschaltungen. ETZ-A **93**, 144 ... 147 (1972).
- [2.23] REVANKAR, G. N.: Topological Approach to Thyristor-Circuit Analysis. Proc. Inst. Electr. Eng. **120** (11), 1403 ... 1405 (1973).
- [2.24] VOGT, F.: Die Simulation von Stromrichtern. ETZ-A **94** (8), 479 ... 482 (1973).
- [2.25] REVANKAR, G. N., und S. A. MAHAJAN: Digital Simulation for Mode Identification in Thyristor Circuits. Proc. IEE **120** (2), 269 ... 272 (1973).

- [2.26] BEATTIE, W. C., und W. MONTEITH: Digital Modelling of a Thyristor. Proc. IEE **120** (7), 789...790 (1973).
- [2.27] VÖKLER, K. D.: Digitale Simulation von Stromrichter-Stellgliedern. Elektrische **27** (1), 12...14(1973).
- [2.28] REVANKAR, G. N.: Computer Analysis of SCR Circuits. IEEE Trans. **IECI** **22** (1), 48...55 (1975).
- [2.29] REVANKAR, G. N.: Digital Computation of SCR Chopper Circuits. IEEE Trans. **IECI** **20**, 20...23 (1973).
- [2.30] REVANKAR, G. N.: Digital Computation of Cycloconverter Operation. IEEE Trans. **IECI** **20**, 81...85 (1973).
- [2.31] WILLIAMS, S., und I. R. SMITH: Fast Digital Computation of 3-Phase Thyristor Bridge Circuits. Proc. IEE **120**, 791...795 (1973).
- [2.32] PFEILER, V.: Grundlagen einer Modelltheorie zur Berechnung von Stromrichtersystemen. Elektrische **24** (8), 273...275 (1970).
- [2.33] PFEILER, V., M. STREUBER und W. DELINSKY: Mathematisches Modell für die Berechnung der Strom-Spannungsverhältnisse in Stromrichtersystemen. Elektrische **24** (10), 366...369 (1970).
- [2.34] PFEILER, V., M. STREUBER und D. STADE: Bestimmung der Strom-Spannungsverhältnisse in Stromrichtersystemen durch ein digitales Rechenprogramm und durch Kurzschlußmessungen. Elektrische **24** (12), 450...454 (1970).
- [2.35] HTSUI, J. S. C., und W. SHEPHERD: Method of Digital Computation of Thyristor Switching Circuits. Proc. IEE **118**, 993...998 (1971).
- [2.36] EISENACK, H., und D. CORDES: Digitale Nachbildung der Vorgänge in Stromrichterschaltungen. ETZ-A **92** (2), 120...122 (1971).
- [2.37] HOFFMANN, D.: Ein Beitrag zur automatischen Simulation von Stromrichterschaltungen mittels Digitalrechner. Diss., TU Berlin. 1974.
- [2.38] RECHENBERG, P.: Simulationssysteme für Digitalrechner. Diss., TU Berlin. 1969.
- [2.39] RECHENBERG, P.: Die Simulation kontinuierlicher Prozesse mit Digitalrechnern. Braunschweig: Vieweg. 1972.
- [2.40] LIPO, T. A.: Simulation of a Current Source Inverter Drive. Power Electronics Specialists Conference, Palo Alto, CA, USA, Juni 1977.
- [2.41] STEIGERWALD, R. L., und T. A. LIPO: Analysis of a Novel Forced-Commutation Starting Scheme for a Load Commutated Synchronous Motor Drive. IEEE/IAS Annual Meeting, Los Angeles, CA, USA, Oktober 1977.
- [2.42] BURNS, W. W., H. A. OWEN, TH. G. WILSON, G. E. RODRIGUEZ und J. PAULKOVICH: A Digital Computer Simulation and Study of a Direct-Energy-Transfer Power-Conditioning System. Power Electronics Sp. Conf., 1975. (Siehe [8.30].)
- [2.43] BOWERS, J. C., und H. E. NIENHAUS: Model of High-Power SCRs Extends Range of Computer-Aided Design. Electronics **50** (8), 100...105 (1977).
- [2.44] LAKOTA, J.: Simulation von stromrichtergespeisten Gleichstrom-Motorantrieben. ETZ-A **94** (1), 26...30 (1973).
- [2.45] MICHELAKAKIS, P.: Neues Verfahren zur digitalen Berechnung von stationären und nichtstationären Vorgängen in 12pulsigen Stromrichteranlagen. Neue Technik **14** (7), 225...231 (1972).
- [2.46] EISENACK, H., und H. HOFMEISTER: Verwendung der digitalen Simulation beim Entwurf von Schaltungen der Leistungselektronik. Siemens Forsch.- u. Entwickl.-Ber. **3** (5), 288D...293D (1974).
- [2.47] EISENACK, H., und H. HOFMEISTER: Digitale Nachbildung von elektrischen Netzwerken mit Dioden und Thyristoren. Archiv für Elektrotechnik **55**, 32...43 (1972).
- [2.48] ANDRONESCU, PL. : Graphische Darstellung der Wirk-, Blind- und Scheinleistung, ... Archiv für Elektrotechnik **31** (3), 205...210 (1937); siehe auch **31** (12), 832...834 (1937); **34**, 424 (1940); **29**, 802...806 (1935).
- [2.49] RANDALL, R. B.: Application of B & K Equipment to Frequency Analysis. Naerum, Dänemark: Brüel & Kjaer. 1977.
- [2.50] WEBER, J.: Die Entwicklung der Leistungselektronik im vergangenen Jahrzehnt und ihre Aus-

- wirkungen auf die VDE-Arbeit. ETZ-A **44** (6), 359 ... 364 (1973).
- [2.51] SPENKE, E.: Leistungsgleichrichter auf Halbleiterbasis. ETZ-A **79** (22), 867 ... 875 (1958).
- [2.52] ZACH, F.: Entwicklungsproblematik der modernen Leistungselektronik, EuM **92** (2), 79 ... 91 (1975).
- [2.53] KLOSS, A.: Auf den Spuren der Leistungselektronik – Erfinder und Erfindungen der Stromrichtertechnik. Berlin und Offenbach: VDE-Verlag. 1990.

Anhang 2A. Winkelfunktionen – Additionstheoreme

Bei Leistungsberechnungen, speziell bei der Anwendung von Gln. (6.8a) und (6.8b), insbesondere aber bei den Auswertungen gemäß der Fußnote auf S. 543 werden immer wieder die folgenden Beziehungen benötigt:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (2A.1)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (2A.2)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (2A.3)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (2A.4)$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \quad (2A.5)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (2A.6)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (2A.7)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \quad (2A.8)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \quad (2A.9)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha \quad (2A.10)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \quad (2A.11)$$

Leistungselektronik

Ein Handbuch Band 1 / Band 2

Zach, F.

2015, CXL, 2877 S. 1574 Abb. In 2 Bänden, nicht einzeln
erhältlich., Hardcover

ISBN: 978-3-658-04898-3