

# Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2

Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium

Bearbeitet von  
Lothar Papula

14., überarbeitete und erweiterte Auflage 2015. Buch. XXI, 827 S. Softcover

ISBN 978 3 658 07789 1

Format (B x L): 16,8 x 24 cm

[Weitere Fachgebiete > Mathematik > Mathematik Allgemein](#)

Zu [Inhaltsverzeichnis](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

**beck-shop.de**  
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung [beck-shop.de](http://beck-shop.de) ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

## II Fourier-Reihen

### 1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion

#### 1.1 Einleitung

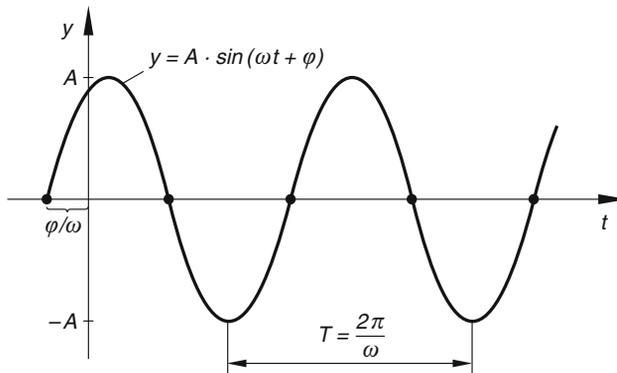
*Periodische* (meist zeitabhängige) Vorgänge spielen in Naturwissenschaft und Technik eine bedeutende Rolle. In einfachen Fällen lässt sich ein *zeitlich periodischer* Vorgang wie beispielsweise die Schwingung eines Federpendels oder eine Wechselspannung durch eine *phasenverschobene Sinusfunktion* vom Typ

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{II-1})$$

beschreiben, die man auch als *Überlagerung* (Superposition) *gleichfrequenter* Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen kann:

$$y(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t) + A_2 \cdot \cos(\omega t) \quad (\text{II-2})$$

Wir sprechen dann von einer *harmonischen Schwingung* oder *Sinusschwingung* mit der Kreisfrequenz  $\omega$  und der Schwingungsdauer  $T = 2\pi/\omega$  (Bild II-1)<sup>1)</sup>:

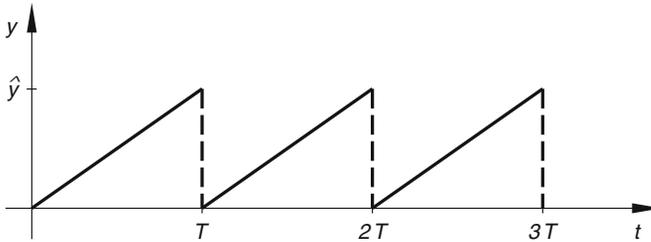


**Bild II-1**  
Harmonische oder  
Sinusschwingung

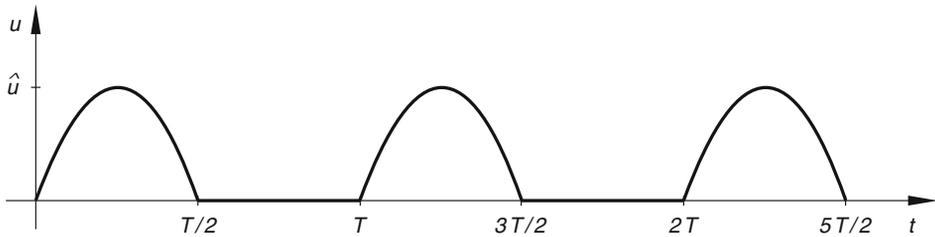
<sup>1)</sup> *Harmonische Schwingungen* wurden bereits in Band 1 (Kap. III, Abschnitt 9.5.1) ausführlich behandelt. Statt der phasenverschobenen Sinusfunktion kann auch eine *phasenverschobene Kosinusfunktion* verwendet werden.

In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen (insbesondere in der Elektrotechnik) treten jedoch häufig auch zeitabhängige Vorgänge auf, die zwar *periodisch*, aber *nicht mehr sinusförmig* verlaufen. Wir nennen zwei einfache Beispiele:

- *Kippschwingung* (*Kippspannung*, auch *Sägezahnimpuls* genannt, siehe Bild II-2)
- *Sinusimpuls* (Sinushalbwellen) eines Einweggleichrichters (Bild II-3)



**Bild II-2**  
Kippschwingung  
(Sägezahnimpuls)



**Bild II-3** Sinusimpuls eines Einweggleichrichters

Von *grundsätzlichem* Interesse ist daher die Frage, ob man eine *nichtsinusförmige* Schwingung aus *harmonischen Einzelschwingungen* zusammensetzen kann. Wir werden später zeigen, dass es unter gewissen Voraussetzungen tatsächlich möglich ist, einen Schwingungsvorgang  $y = y(t)$  mit der Schwingungs- oder Periodendauer  $T$  und der Kreisfrequenz  $\omega_0 = 2\pi/T$  in eine unendliche Summe aus *sinus-* und *kosinusförmigen* Einzelschwingungen wie folgt zu *entwickeln*:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)] = \\
 &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + a_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + \dots \\
 &\quad \dots + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2\omega_0 t) + b_3 \cdot \sin(3\omega_0 t) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{II-3}$$

Diese Darstellung in Form einer unendlichen *trigonometrischen Reihe*<sup>2)</sup> heißt *Fourier-Reihe*, die Entwicklung selbst wird als *harmonische* oder *Fourier-Analyse* bezeichnet.

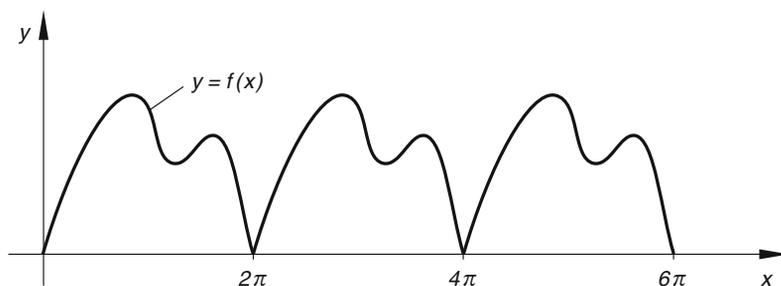
<sup>2)</sup> Die Zerlegung (II-3) enthält noch den *zeitunabhängigen* (d. h. konstanten) Bestandteil  $a_0/2$ .

In dieser Darstellung erscheint die Gesamtschwingung  $y = y(t)$  als *ungestörte Überlagerung* unendlich vieler *harmonischer Teilschwingungen* mit den Kreisfrequenzen  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ . Die Kreisfrequenzen der einzelnen Schwingungskomponenten sind somit stets *ganzzahlige Vielfache* von  $\omega_0$ , der sog. *Grundkreisfrequenz*. Die Teilschwingung mit der *kleinsten* Kreisfrequenz ( $\omega_0$ ) heißt *Grundschiwingung*, alle übrigen Teilschwingungen werden als *Oberschwingungen* bezeichnet.

Vom *physikalischen* Standpunkt aus bedeutet die Darstellung einer nichtsinusförmigen Schwingung  $y = y(t)$  durch ihre Fourier-Reihe eine *Zerlegung* der Schwingung in ihre *harmonischen Schwingungskomponenten*. Sie wird daher in den Anwendungen auch als *Fourier-Zerlegung* bezeichnet. Die „Entwicklungskoeffizienten“  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$  heißen *Fourierkoeffizienten*.

## 1.2 Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe

Bei den weiteren Überlegungen gehen wir zunächst von einer nichtsinusförmigen periodischen Funktion  $f(x)$  mit der Periode  $p = 2\pi$  aus (Bild II-4).



**Bild II-4** Bild einer nichtsinusförmigen periodischen Funktion (Periode:  $p = 2\pi$ )

Sie kann unter gewissen Voraussetzungen, auf die wir später noch eingehen werden, in eine unendliche *trigonometrische Reihe* der Form

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)] = \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos x + a_2 \cdot \cos(2x) + a_3 \cdot \cos(3x) + \dots \\ &\quad \dots + b_1 \cdot \sin x + b_2 \cdot \sin(2x) + b_3 \cdot \sin(3x) + \dots \end{aligned} \quad (\text{II-4})$$

entwickelt werden. Diese Art der Darstellung heißt *Fourier-Reihe* von  $f(x)$ . Sie enthält neben den Sinus- und Kosinusfunktionen mit den *Kreisfrequenzen* 1, 2, 3, ... noch ein *konstantes* Glied  $a_0/2$ . Die Konstanten  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$  der Entwicklung (II-4) sind die *Fourierkoeffizienten*, mit deren Berechnung wir uns jetzt beschäftigen werden.

### Berechnung der Fourierkoeffizienten

Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten werden einige Integrale benötigt, die wir in der folgenden **Tabelle 1** zusammengestellt haben.

**Tabelle 1:** Integrale, die für die Berechnung der Fourierkoeffizienten benötigt werden ( $m, n \in \mathbb{N}^*$ )

|  |
|--|
| $\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \left[ \sin(nx) \right]_0^{2\pi} = 0$   |
| $\int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} \left[ \cos(nx) \right]_0^{2\pi} = 0$  |
| $\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx = \begin{cases} \left[ \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} + \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} \right]_0^{2\pi} = 0 & (n \neq m) \\ \left[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4n} \cdot \sin(2nx) \right]_0^{2\pi} = \pi & (n = m) \end{cases}$ |
| $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) dx = \begin{cases} -\left[ \frac{\cos(n-m)x}{2(n-m)} + \frac{\cos(n+m)x}{2(n+m)} \right]_0^{2\pi} = 0 & (n \neq m) \\ \frac{1}{2n} \left[ \sin^2(nx) \right]_0^{2\pi} = 0 & (n = m) \end{cases}$                      |
| $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) dx = \begin{cases} \left[ \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} \right]_0^{2\pi} = 0 & (n \neq m) \\ \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4n} \cdot \sin(2nx) \right]_0^{2\pi} = \pi & (n = m) \end{cases}$ |

#### (1) Berechnung des Fourierkoeffizienten $a_0$

Wir integrieren die Fourier-Reihe (II-4) *gliedweise* im Periodenintervall  $(0, 2\pi)$ , wobei wir die (konstanten) Fourierkoeffizienten vor das Integral ziehen:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot \int_0^{2\pi} 1 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx \right] \quad (\text{II-5})$$

Für die einzelnen Integrale gilt dann unter Verwendung von Tabelle 1:

$$\int_0^{2\pi} 1 \, dx = [x]_0^{2\pi} = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos(nx) \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \, dx = 0 \quad (\text{II-6})$$

Gleichung (II-5) reduziert sich daher auf

$$\int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \pi \quad (\text{II-7})$$

Wir erhalten damit für den Fourierkoeffizienten  $a_0$  die Integralformel

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \, dx \quad (\text{II-8})$$

## (2) Berechnung der Fourierkoeffizienten $a_n$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

Wir multiplizieren die Fourier-Reihe (II-4) zunächst mit  $\cos(mx)$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) und integrieren anschließend wiederum gliedweise über das Periodenintervall  $(0, 2\pi)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(mx) \, dx &= \frac{a_0}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(mx) \, dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) \, dx + b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) \, dx \right] \end{aligned} \quad (\text{II-9})$$

Die anfallenden Integrale berechnen sich nach Tabelle 1 wie folgt:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \, dx = 0 \quad (\text{II-10})$$

**Für  $m \neq n$ :**

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) \, dx = 0 \quad (\text{II-11})$$

**Für  $m = n$ :**

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) \, dx = \pi \quad (\text{II-12})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(mx) dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \cos(nx) dx = 0 \quad (\text{II-13})$$

Daher ist

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(mx) dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx = a_n \pi \quad (\text{II-14})$$

und somit

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \quad (\text{II-15})$$

### (3) Berechnung der Fourierkoeffizienten $b_n$ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

Die Fourier-Reihe (II-4) wird jetzt zunächst mit  $\sin(mx)$  ( $m \in \mathbf{N}^*$ ) multipliziert und anschließend in den Grenzen von  $x = 0$  bis  $x = 2\pi$  integriert:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(mx) dx &= \frac{a_0}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(mx) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cdot \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \sin(mx) dx + b_n \cdot \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) dx \right] \end{aligned} \quad (\text{II-16})$$

Die anfallenden Integrale werden wiederum nach Tabelle 1 berechnet:

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) dx = 0 \quad (\text{II-17})$$

**Für  $m \neq n$ :**

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \sin(mx) dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) dx = 0 \quad (\text{II-18})$$

**Für  $m = n$ :**

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \sin(mx) dx = \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cdot \sin(nx) dx = 0 \quad (\text{II-19})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cdot \sin(mx) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \pi \quad (\text{II-20})$$

Aus Gleichung (II-16) folgt somit

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(mx) dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx = b_n \pi \quad (\text{II-21})$$

und hieraus schließlich

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \quad (\text{II-22})$$

Die Fourierkoeffizienten  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$  lassen sich demnach aus den Integralformeln (II-8), (II-15) und (II-22) berechnen.

Wir fassen die Ergebnisse wie folgt zusammen:

#### Fourier-Reihe einer periodischen Funktion (in reeller Form)

Eine *periodische* Funktion  $f(x)$  mit der Periode  $p = 2\pi$  lässt sich unter bestimmten Voraussetzungen (siehe weiter unten) in eine unendliche *trigonometrische Reihe* der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)] \quad (\text{II-23})$$

entwickeln (sog. *Fourier-Reihe* von  $f(x)$ ). Die Berechnung der *Fourierkoeffizienten*  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$  erfolgt dabei aus den Integralformeln

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \end{aligned} \right\} (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{II-24})$$

#### Anmerkung

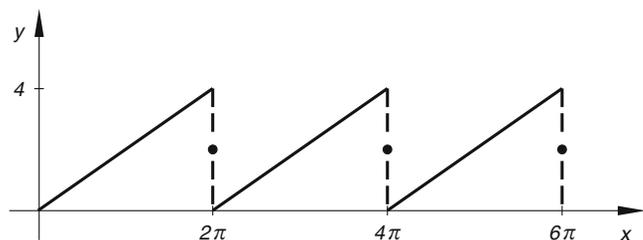
Die Fourier-Reihe einer periodischen Funktion lässt sich auch in *komplexer* Form darstellen. Wir werden im nächsten Abschnitt darauf eingehen.

### Voraussetzung für die Entwicklung

Die Entwicklung einer periodischen Funktion  $f(x)$  in eine *Fourier-Reihe* ist unter den folgenden Voraussetzungen möglich (sog. *Dirichletsche Bedingungen*):

1. Das Periodenintervall lässt sich in *endlich* viele Teilintervalle zerlegen, in denen  $f(x)$  *stetig* und *monoton* ist.
2. In den *Unstetigkeitsstellen* (es kommen nur Sprungunstetigkeiten mit endlichen Sprüngen in Frage) existiert sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert.

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Fourier-Reihe von  $f(x)$  für *alle*  $x \in \mathbb{R}$ . In den *Stetigkeitsstellen* von  $f(x)$  stimmt die Reihe mit der Funktion  $f(x)$  überein, während sie in den *Sprungstellen* das *arithmetische Mittel* aus dem links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion liefert. So besitzt beispielsweise die Fourier-Reihe der in Bild II-5 skizzierten *Kippschwingung* in den Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen)  $x_k = k \cdot 2\pi$  (mit  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) den Funktionswert  $(4 + 0)/2 = 2$ .



**Bild II-5** „Kippschwingung“ mit den Sprungstellen  $x_k = k \cdot 2\pi$  (mit  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

### Symmetriebetrachtungen

Die Fourier-Reihe einer *geraden* Funktion  $f(x)$  enthält nur *gerade* Reihenglieder, d. h. neben dem *konstanten* Glied nur *Kosinusglieder* ( $b_n = 0$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) \quad (\text{II-25})$$

Die Fourier-Reihe einer *ungeraden* Funktion  $f(x)$  enthält dagegen nur *ungerade* Reihenglieder, d. h. ausschließlich *Sinusglieder* ( $a_n = 0$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx) \quad (\text{II-26})$$

### Anmerkungen

- (1) Die Integration darf über ein *beliebiges* Periodenintervall der Länge  $2\pi$  erstreckt werden (beispielsweise auch über das Intervall  $(-\pi, \pi)$ ).
- (2) Durch *Abbruch* der Fourier-Reihe (II-23) nach *endlich* vielen Gliedern erhält man eine Näherungsfunktion für  $f(x)$  in Form einer *trigonometrischen Reihe*. Ähnlich wie bei den Potenzreihen gilt auch hier: Je *mehr* Glieder berücksichtigt werden, um so *besser* ist die Näherung (siehe hierzu das nachfolgende Beispiel).

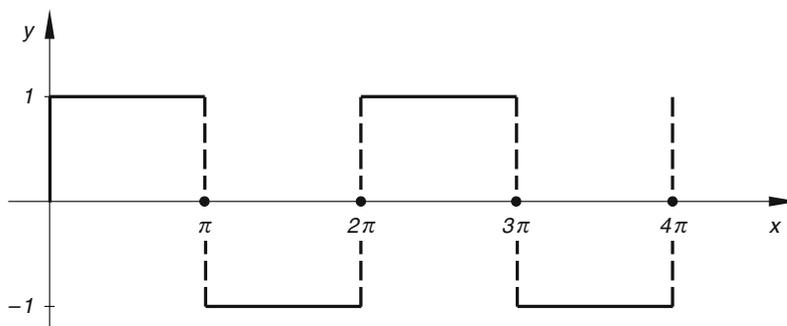
- (3) Die Fourier-Entwicklung ist keineswegs auf periodische Funktionen mit der Periode  $2\pi$  beschränkt. Sie lässt sich auch auf periodische Funktionen mit *beliebiger* Periode  $p$  ausdehnen. Diesen *allgemeinen* Fall behandeln wir im folgenden Abschnitt im Zusammenhang mit der Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung in ihre harmonischen Schwingungskomponenten. Der *allgemeine* Fall kann jedoch stets (mit Hilfe einer geeigneten Substitution) auf den hier dargestellten *speziellen* Fall der Fourier-Entwicklung einer Funktion mit der Periode  $2\pi$  zurückgeführt werden.

### ■ Beispiel

Wir entwickeln die in Bild II-6 dargestellte *Rechteckkurve* mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \text{für } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

und der Periode  $p = 2\pi$  in eine Fourier-Reihe.



**Bild II-6** Rechteckkurve (Rechteckimpuls)

Da  $f(x)$  eine *ungerade* Funktion ist, reduziert sich ihre Entwicklung auf

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)$$

(nur Sinusglieder). Die Berechnung der Fourierkoeffizienten  $b_n$  geschieht nach der Formel (II-24), wobei wir die Integration abschnittsweise durchführen müssen:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \sin(nx) \, dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \sin(nx) \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(nx) \, dx \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left[ \left[ -\frac{1}{n} \cdot \cos(nx) \right]_0^\pi - \left[ -\frac{1}{n} \cdot \cos(nx) \right]_\pi^{2\pi} \right] = \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[ \left[ -\cos(nx) \right]_0^\pi + \left[ \cos(nx) \right]_\pi^{2\pi} \right] = \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[ -\cos(n\pi) + \underbrace{\cos 0}_1 + \underbrace{\cos(n2\pi)}_1 - \cos(n\pi) \right] = \\
&= \frac{1}{n\pi} [2 - 2 \cdot \cos(n\pi)] = \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]
\end{aligned}$$

Der Wert des Summanden  $\cos(n\pi)$  hängt dabei noch davon ab, ob  $n$  gerade oder ungerade ist (Fallunterscheidung):

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = \text{gerade, d. h. } n = 2, 4, 6, \dots \\ -1 & \text{für } n = \text{ungerade, d. h. } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Die Fourierkoeffizienten *verschwinden* daher für *gerades*  $n$ , d. h. für  $n = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ):

$$b_{2k} = \frac{2}{2k\pi} (1 - 1) = 0$$

Für *ungerades*  $n$ , d. h. für  $n = 2k - 1$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) besitzen die Fourierkoeffizienten dagegen den Wert

$$b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi} (1 + 1) = \frac{4}{(2k-1)\pi} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2k-1}$$

Die *Fourier-Reihe* der *Rechteckkurve* besitzt damit die Gestalt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2k-1} \cdot \sin(2k-1)x = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \\
&= \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5x) + \dots \right]
\end{aligned}$$

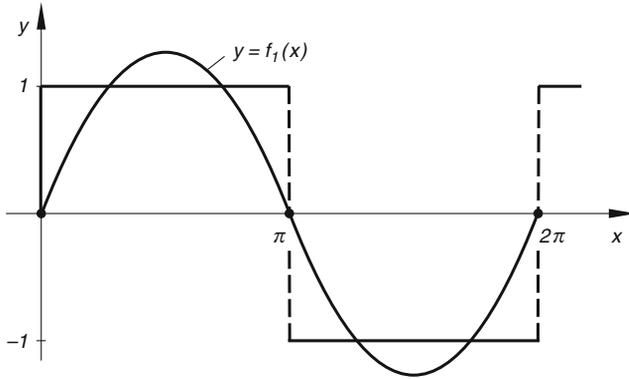
Durch *Abbruch* dieser Reihe nach dem 1., 2. bzw. 3. Glied erhalten wir die folgenden *Näherungsfunktionen*:

$$1. \text{ Näherung: } f_1(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin x$$

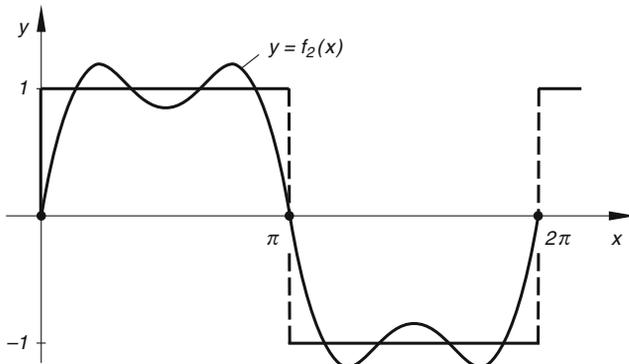
$$2. \text{ Näherung: } f_2(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) \right]$$

$$3. \text{ Näherung: } f_3(x) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin x + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5x) \right]$$

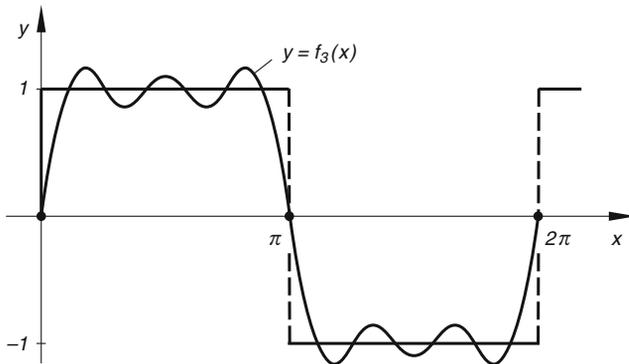
Bild II-7, a) bis c) zeigt den Verlauf dieser Näherungskurven im direkten Vergleich mit der Rechteckkurve. Die Approximation wird dabei (erwartungsgemäß) mit zunehmender Anzahl der Glieder immer besser.



a) 1. Näherung



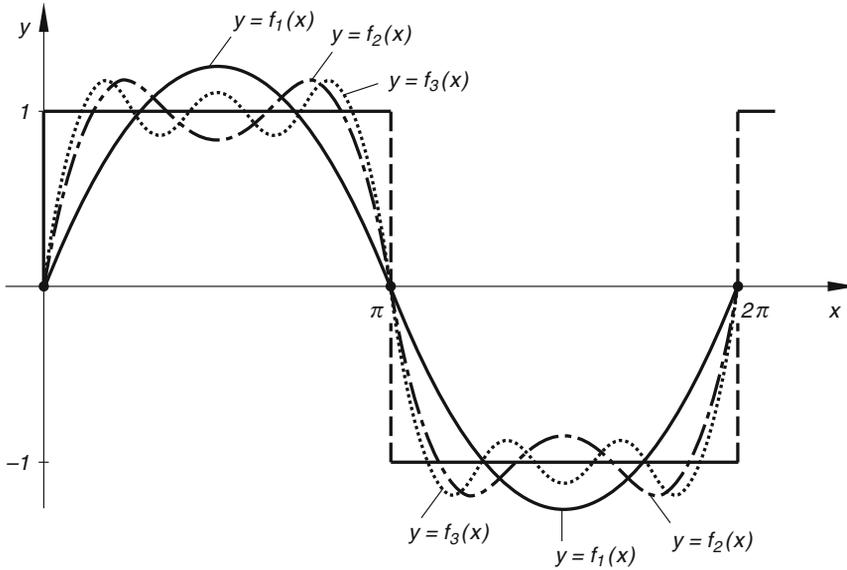
b) 2. Näherung



c) 3. Näherung

**Bild II-7** Näherungsfunktionen der Rechteckkurve

Bild II-8 zeigt die Rechteckkurve und ihre ersten drei Näherungskurven.



**Bild II-8** Rechteckkurve im direkten Vergleich mit ihren ersten drei Näherungsfunktionen

### 1.3 Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe

Die Fourier-Reihe einer periodischen Funktion mit der Periode  $p = 2\pi$  lässt sich auch in *komplexer Form* darstellen. Bei der Herleitung dieser Darstellungsform gehen wir zunächst von der *reellen Form* (II-23) aus und ersetzen in dieser die trigonometrischen Funktionen  $\cos(nx)$  und  $\sin(nx)$  mit Hilfe der *komplexen e-Funktion* wie folgt<sup>3)</sup>:

$$\cos(nx) = \frac{1}{2} (e^{jnx} + e^{-jnx}) \quad (\text{II-27})$$

$$\sin(nx) = \frac{1}{2j} (e^{jnx} - e^{-jnx}) = -\frac{1}{2} j (e^{jnx} - e^{-jnx}) \quad (\text{II-28})$$

Die reelle Form (II-23) geht dann über in

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} a_n (e^{jnx} + e^{-jnx}) - \frac{1}{2} j b_n (e^{jnx} - e^{-jnx}) \right] \quad (\text{II-29})$$

<sup>3)</sup> Diese Beziehungen erhält man aus den Eulerschen Formeln  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$  und  $e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \cdot \sin \varphi$  durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen (mit  $\varphi = nx$ ).

Der unter dem Summenzeichen stehende Ausdruck kann noch vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a_n \cdot e^{jn_x} + \frac{1}{2} a_n \cdot e^{-jn_x} - \frac{1}{2} j b_n \cdot e^{jn_x} + \frac{1}{2} j b_n \cdot e^{-jn_x} = \\ & = \left( \frac{1}{2} a_n - \frac{1}{2} j b_n \right) \cdot e^{jn_x} + \left( \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} j b_n \right) \cdot e^{-jn_x} = \\ & = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \cdot e^{jn_x} + \frac{1}{2} (a_n + j b_n) \cdot e^{-jn_x} \end{aligned} \quad (\text{II-30})$$

Einsetzen in Gleichung (II-29) und Aufspalten der Summe in zwei Teilsommen ergibt dann:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \cdot e^{jn_x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + j b_n) \cdot e^{-jn_x} \quad (\text{II-31})$$

Mit den Abkürzungen

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) \quad (\text{II-32})$$

erhalten wir schließlich <sup>4)</sup>:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn_x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot e^{-jn_x} \quad (\text{II-33})$$

In der 2. Summe setzen wir vorübergehend  $k = -n$  und somit  $n = -k$ . Der neue Summationsindex  $k$  läuft dann von  $k = -1$  bis hin zu  $k = -\infty$ :

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn_x} + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k \cdot e^{jk_x} \quad (\text{II-34})$$

Da die Bezeichnung des Summationsindex ohne jede Bedeutung ist, ersetzen wir in der 2. Summe  $k$  durch  $n$  und erhalten:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn_x} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \cdot e^{jn_x} \quad (\text{II-35})$$

Da  $e^{jn_x}$  für  $n = 0$  den Wert  $e^{j0x} = e^0 = 1$  annimmt, lässt sich der konstante Summand  $c_0$  in der Darstellung (II-35) auch in der Form

$$c_0 = c_0 \cdot e^{j0x} \quad (\text{II-36})$$

schreiben und wir können diesen Summand und die beiden Teilsommen zu *einer* unendlichen Summe zusammenfassen, wobei der Summationsindex  $n$  alle Werte von  $-\infty$  über 0 bis  $+\infty$  durchläuft:

<sup>4)</sup> Man beachte:  $c_{-n}$  und  $c_n$  sind zueinander konjugiert komplex:  $c_{-n} = c_n^*$ .

$$\begin{aligned}
 f(x) &= c_0 \cdot e^{j0x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \cdot e^{jn x} = \\
 &= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot e^{jn x}}_{n=-\infty \text{ bis } -1} + \underbrace{c_0 \cdot e^{j0x}}_{n=0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x}}_{n=1 \text{ bis } \infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x}
 \end{aligned}
 \tag{II-37}$$

### Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten $c_n$ ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

Wir wollen jetzt eine Formel für die *Berechnung* der komplexen Fourierkoeffizienten  $c_n$  herleiten. Aus diesem Grund multiplizieren wir die Gleichung (II-37) beiderseits mit  $e^{-jm x}$  und integrieren dann *gliedweise* über das Periodenintervall, d. h. von  $x = 0$  bis hin zu  $x = 2\pi$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-jm x} dx &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x} \right) \cdot e^{-jm x} dx = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{jn x} \cdot e^{-jm x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \int_0^{2\pi} e^{j(n-m)x} dx = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \int_0^{2\pi} e^{jk x} dx
 \end{aligned}
 \tag{II-38}$$

(mit  $k = n - m$ ). Bei der Auswertung des unter dem Summenzeichen stehenden Integrals sind die Fälle  $k = 0$  und  $k \neq 0$  zu unterscheiden.

1. Fall:  $k = 0$ , d. h.  $m = n$

$$\int_0^{2\pi} e^{j0x} dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = [x]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi
 \tag{II-39}$$

2. Fall:  $k \neq 0$ , d. h.  $m \neq n$

$$\int_0^{2\pi} e^{jk x} dx = \left[ \frac{e^{jk x}}{jk} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{jk 2\pi} - e^0}{jk} = \frac{e^{jk 2\pi} - 1}{jk}
 \tag{II-40}$$

Mit der *Eulerschen Formel* lässt sich  $e^{jk 2\pi}$  wie folgt berechnen:

$$e^{jk 2\pi} = \cos(k 2\pi) + j \cdot \sin(k 2\pi) = \underbrace{\cos 0}_1 + j \cdot \underbrace{\sin 0}_0 = 1
 \tag{II-41}$$

$$(\cos(k 2\pi) = \cos 0 = 1 \quad \text{und} \quad \sin(k 2\pi) = \sin 0 = 0)$$

Das Integral (II-40) *verschwindet* daher für  $k \neq 0$ :

$$\int_0^{2\pi} e^{jkx} dx = \frac{e^{jk2\pi} - 1}{jk} = \frac{1 - 1}{jk} = 0 \quad (\text{II-42})$$

Somit gilt:

$$\int_0^{2\pi} e^{j(n-m)x} dx = \begin{cases} 2\pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad \text{für} \quad (\text{II-43})$$

In der Gleichung (II-38) verschwinden daher alle Summanden der rechten Seite bis auf den Summand für  $m = n$ . Daher gilt:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-jn x} dx = c_n \cdot 2\pi \quad (\text{II-44})$$

Daraus erhalten wir die gesuchte *Integralformel* für die Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-jn x} dx \quad (\text{II-45})$$

Wir fassen das Ergebniss kurz zusammen:

**Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe einer periodischen Funktion  $f(x)$  mit der Periode  $p = 2\pi$**

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x} \quad (\text{II-46})$$

Die Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_n$  erfolgt mit der *Integralformel*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-jn x} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{II-47})$$

### Anmerkungen

- (1) Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten ist im *Komplexen* meist einfacher als im *Reellen*, da in der Integralformel (II-47) keine trigonometrischen Funktionen mehr auftreten.

- (2) In der *komplexen* Darstellung (II-46) wird die periodische Funktion  $f(x)$  in *komplexe Teilschwingungen* vom Typ  $e^{jn_x}$  zerlegt, die sich nach der Eulerschen Formel als *komplexe Linearkombinationen gleichfrequenter* Kosinus- und Sinusschwingungen erweisen:

$$e^{jn_x} = \cos(nx) + j \cdot \sin(nx) \quad (\text{II-48})$$

## 1.4 Übergang von der komplexen zur reellen Darstellungsform

Der *Zusammenhang* zwischen den *reellen* Fourier-Koeffizienten  $a_n, b_n$  und den *komplexen* Fourier-Koeffizienten  $c_n$  ist durch die Gleichungen (II-32) gegeben. Aus ihnen gewinnen wir für die *reellen* Koeffizienten folgende *Umrechnungsformeln*:

$$a_0 = 2c_0 \quad (\text{II-49})$$

$$\begin{aligned} c_n + c_{-n} &= c_n + c_n^* = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) + \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \\ &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n + a_n + jb_n) = \frac{1}{2}(2a_n) = a_n \end{aligned} \quad (\text{II-50})$$

$$\begin{aligned} c_n - c_{-n} &= c_n - c_n^* = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) - \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \\ &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n - a_n - jb_n) = \frac{1}{2}(-2jb_n) = -jb_n \end{aligned} \quad (\text{II-51})$$

Die letzte Gleichung multiplizieren wir mit  $j$  und beachten dabei, dass  $j^2 = -1$  ist:

$$j(c_n - c_{-n}) = j(c_n - c_n^*) = -j^2 \cdot b_n = -(-1) \cdot b_n = b_n \quad (\text{II-52})$$

Damit ergeben sich folgende Umrechnungen zwischen den Fourier-Koeffizienten der reellen und der komplexen Fourier-Zerlegung:

### Zusammenhang zwischen den reellen und den komplexen Fourier-Koeffizienten

#### 1. Übergang von der reellen zur komplexen Form ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad (\text{II-53})$$

#### 2. Übergang von der komplexen zur reellen Form ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0, & a_n &= c_n + c_{-n} = c_n + c_n^*, \\ b_n &= j(c_n - c_{-n}) = j(c_n - c_n^*) \end{aligned} \quad (\text{II-54})$$

### ■ Beispiel

Im vorherigen Abschnitt haben wir die *Rechteckkurve* mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad \text{für}$$

und der Periode  $p = 2\pi$  in eine *reelle* Fourier-Reihe entwickelt (siehe hierzu auch Bild II-6). Jetzt interessieren wir uns nur für die *komplexe* Darstellung, wobei wir (da die reelle Darstellung *bekannt* ist) zwei verschiedene Möglichkeiten haben, die *komplexen* Fourierkoeffizienten  $c_n$  zu bestimmen.

**1. Lösungsweg:** Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_n$  aus den (als bekannt vorausgesetzten) *reellen* Koeffizienten

$$a_n = 0 \quad \text{und} \quad b_n = \begin{cases} 0 & n = \text{gerade} \\ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n} & n = \text{ungerade} \end{cases} \quad \text{für}$$

(die reelle Entwicklung enthält nur *Sinusterme* mit *ungeradem* Index). Aus den Umrechnungsbeziehungen (II-53) folgt dann:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Da *alle* Koeffizienten  $a_n$  sowie die *geraden* Koeffizienten  $b_n$  *verschwinden*, können nur die *ungeraden* komplexen Koeffizienten  $c_n$  von Null verschieden sein:

$$c_n = 0 \quad \text{für} \quad n = \text{gerade}$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) = \frac{1}{2} \left( 0 - j \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \right) = -\frac{2j}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{für} \quad n = \text{ungerade}$$

Somit gilt für jedes  $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$c_{2k} = 0, \quad c_{2k-1} = -\frac{2j}{\pi} \cdot \frac{1}{2k-1}$$

Die *komplexe* Darstellung der Rechteckkurve lautet damit:

$$f(x) = -\frac{2j}{\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cdot e^{j(2k-1)x} = -\frac{2j}{\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j(2k-1)x}}{2k-1}$$

**2. Lösungsweg:** Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_n$  auf *direktem* Wege über die *Integralformel* (II-47):

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-jnx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-jnx} dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot e^{-jnx} dx \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} e^{-jnx} dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-jnx} dx \right\} \end{aligned}$$

Die Auswertung der beiden Teilintegrale erfolgt mit der *Integraltafel*, wobei die Fälle  $n = 0$  und  $n \neq 0$  zu unterscheiden sind (das 2. Integral ist ein *uneigentliches* Integral wegen der Sprungstellen bei  $\pi$  und  $2\pi$ ):

1. Fall:  $n = 0$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} e^0 dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^0 dx \right\} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} 1 dx - \int_{\pi}^{2\pi} 1 dx \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ [x]_0^{\pi} - [x]_{\pi}^{2\pi} \right\} = \frac{1}{2\pi} \{(\pi - 0) - (2\pi - \pi)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} (\pi - \pi) = 0 \end{aligned}$$

2. Fall:  $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} e^{-jnx} dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-jnx} dx \right\} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ \frac{e^{-jnx}}{-jn} \right]_0^{\pi} - \left[ \frac{e^{-jnx}}{-jn} \right]_{\pi}^{2\pi} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2\pi jn} \left\{ [e^{-jnx}]_0^{\pi} - [e^{-jnx}]_{\pi}^{2\pi} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi j n} \{e^{-jn\pi} - e^0 - (e^{-jn2\pi} - e^{-jn\pi})\} = \\
&= -\frac{1}{2\pi j n} (e^{-jn\pi} - 1 - e^{-jn2\pi} + e^{-jn\pi}) = \\
&= -\frac{1}{2\pi j n} (2 \cdot e^{-jn\pi} - e^{-jn2\pi} - 1) = \frac{j}{2\pi n} (2 \cdot e^{-jn\pi} - e^{-jn2\pi} - 1)
\end{aligned}$$

(nach Erweitern mit  $j$  unter Beachtung von  $j^2 = -1$ )

Mit der *Eulerschen Formel* berechnen wir die Werte der in der Klammer stehenden Summanden:

$$e^{-jn\pi} = \cos(n\pi) - j \cdot \underbrace{\sin(n\pi)}_0 = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n = \text{gerade} \\ -1 & n = \text{ungerade} \end{cases} \text{ für}$$

$$e^{-jn2\pi} = \underbrace{\cos(n2\pi)}_1 - j \cdot \underbrace{\sin(n2\pi)}_0 = 1 - j \cdot 0 = 1$$

Somit müssen wir noch die Fälle  $n = 2k$  (*gerades*  $n$ ) und  $n = 2k - 1$  (*ungerades*  $n$ ) unterscheiden:

$$c_{n=2k} = c_{2k} = \frac{j}{2\pi(2k)} (2 \cdot 1 - 1 - 1) = \frac{j}{4\pi k} (2 - 2) = 0$$

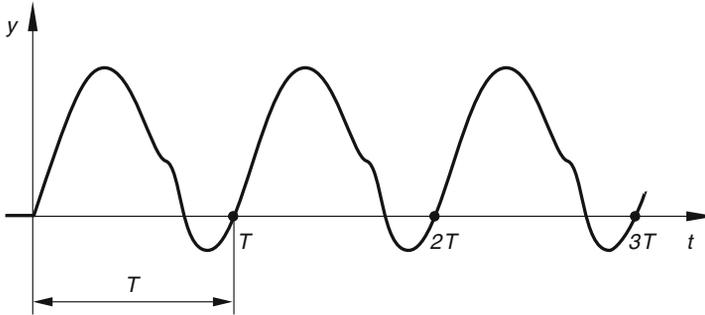
$$\begin{aligned}
c_{n=2k-1} = c_{2k-1} &= \frac{j}{2\pi(2k-1)} (2 \cdot (-1) - 1 - 1) = \\
&= \frac{j}{2\pi(2k-1)} \cdot (-4) = \frac{-2j}{\pi(2k-1)} = -\frac{2j}{\pi} \cdot \frac{1}{2k-1}
\end{aligned}$$

Es treten nur *ungerade* Fourier-Koeffizienten auf (in völliger Übereinstimmung mit dem Ergebnis des 1. Lösungsweges). ■

## 2 Anwendungen

### 2.1 Fourier-Zerlegung einer Schwingung (harmonische Analyse)

Wir betrachten einen *nichtsinusförmigen* Schwingungsvorgang  $y = y(t)$  mit der Schwingungsdauer  $T$  und der Kreisfrequenz  $\omega_0 = 2\pi/T$  (Bild II-9):



**Bild II-9** Nichtsinusförmiger Schwingungsvorgang

Die *zeitabhängige periodische* Funktion  $y(t)$  lässt sich dann unter den bekannten Voraussetzungen<sup>5)</sup> in eine *Fourier-Reihe* vom Typ

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)] = \\
 &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + a_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + \dots \\
 &\quad \dots + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2\omega_0 t) + b_3 \cdot \sin(3\omega_0 t) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{II-55}$$

*entwickeln*. Diese Entwicklung in unendlich viele *Sinus-* und *Kosinusfunktionen* bedeutet aus physikalischer Sicht eine *Zerlegung* der Schwingung  $y(t)$  in ihre *harmonischen Bestandteile*, auch Schwingungskomponenten genannt. Sie bestehen aus der *Grundschwingung* mit der Grundkreisfrequenz  $\omega_0$  und den *harmonischen Oberschwingen*, deren Kreisfrequenzen *ganzzahlige* Vielfache der Grundkreisfrequenz sind:  $2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0, \dots$ . Bringen wir umgekehrt Grundschwingung und Oberschwingungen zur *ungestörten Überlagerung*, so erhalten wir als *Resultierende* genau die Schwingung  $y = y(t)$  (*Superpositionsprinzip* der Physik). Die Fourier-Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$  bestimmen dabei die *Amplituden* der harmonischen Teilschwingungen und somit letztlich deren *Anteile* an der Gesamtschwingung.

<sup>5)</sup>  $y(t)$  muss im Periodenintervall die *Dirichletschen* Bedingungen erfüllen.

Die als *harmonische Analyse* oder auch *Fourier-Analyse* bezeichnete *Zerlegung* einer nichtsinusförmigen Schwingung  $y = y(t)$  in *Grundschiwingung* und *harmonische Oberschwingungen* läuft somit auf die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten in der Entwicklung (II-55) hinaus. Sie können mit Hilfe der folgenden Integralformeln berechnet werden:

#### Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung (in reeller Form)

Ein *nichtsinusförmiger* Schwingungsvorgang  $y = y(t)$  mit der Kreisfrequenz  $\omega_0$  und der Schwingungsdauer (Periodendauer)  $T = 2\pi/\omega_0$  kann wie folgt nach *Fourier* in seine harmonischen Bestandteile (*Grundschiwingung* und *Oberschwingungen*) zerlegt werden:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)] \quad (\text{II-56})$$

Dabei bedeuten:

$\omega_0$ : Kreisfrequenz der *Grundschiwingung*

$n\omega_0$ : Kreisfrequenzen der *harmonischen Oberschwingungen* ( $n = 2, 3, 4, \dots$ )

Die Fourier-Koeffizienten dieser Zerlegung werden dabei aus den Integralformeln

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} y(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} y(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned} \right\} (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{II-57})$$

berechnet.

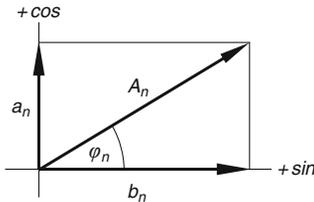
#### Anmerkungen

- (1) Das Symbol  $(T)$  unter dem Integralzeichen bedeutet, dass die Integration über ein (beliebiges) *Periodenintervall* der Länge  $T$  zu erstrecken ist.
- (2) Die Berechnung des Koeffizienten  $a_0$  ist auch mit der Formel (II-57) für  $n = 0$  möglich, da  $\cos(0\omega_0 t) = \cos 0 = 1$  ist.
- (3) Ein Beispiel folgt in Abschnitt 2.3.

Die in der Fourier-Zerlegung (II-56) auftretenden *gleichfrequenten* Kosinus- und Sinusschwingungen können z. B. mit Hilfe des *Zeigerdiagramms*<sup>6)</sup> zu einer *phasenverschobenen Sinusschwingung* zusammengeführt werden (siehe Bild II-10):

$$a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) = A_n \cdot \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (\text{II-58})$$

( $A_n$ : Amplitude;  $\varphi_n$ : Nullphasenwinkel;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ).



$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2, \quad \tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$$

**Bild II-10**

Dies führt zu der folgenden Darstellung der Fourier-Reihe durch phasenverschobene Sinusschwingungen:

#### Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung $y(t)$ in phasenverschobene Sinusschwingungen

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)] = \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \end{aligned} \quad (\text{II-59})$$

Zusammenhang zwischen  $a_n, b_n$  und  $A_n, \varphi_n$  (siehe hierzu auch Bild II-10):

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n} \end{aligned} \quad (\text{II-60})$$

#### Bezeichnungen

$A_n$ : Amplitudenspektrum

$\varphi_n$ : Phasenspektrum

<sup>6)</sup> Die Darstellung von harmonischen Schwingungen im Zeigerdiagramm wurde ausführlich in Band I behandelt (Kap. III, Abschnitt 9.5).

*Anmerkungen*

- (1) Dem *konstanten* Anteil  $A_0 = a_0/2$  wird die Kreisfrequenz  $\omega = 0$  und der Nullphasenwinkel  $\varphi_0 = \pi/2$  zugeordnet (der Schwingungsanteil  $A_n \cdot \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$  hat dann für  $n = 0$  den richtigen Wert  $a_0/2$ ).
- (2) Amplituden- und Phasenspektrum sind *Linienspektren* (nur *diskrete* Werte von  $\omega$  sind möglich:  $\omega = n\omega_0$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

**Fourier-Analyse in komplexer Form**

Die *Fourier-Analyse* einer nichtsinusförmigen Schwingung  $y = y(t)$  lässt sich auch in *komplexer* Form durchführen:

**Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung  $y = y(t)$  in komplexer Form**

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{II-61})$$

Die *Berechnung* der komplexen Fourierkoeffizienten  $c_n$  erfolgt mit der *Integralformel*

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T y(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (\text{II-62})$$

Dabei bedeuten:

$\omega_0$ : Kreisfrequenz der Schwingung

$T$ : Schwingungs- oder Periodendauer ( $T = 2\pi/\omega_0$ )

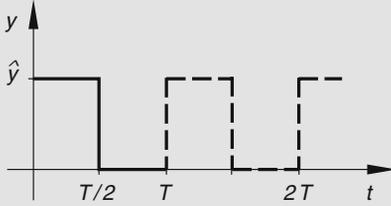
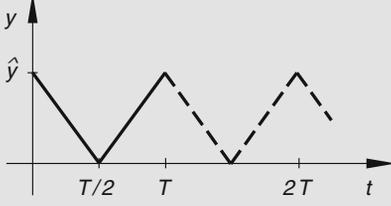
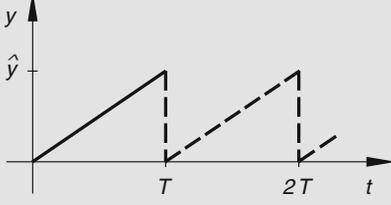
*Anmerkungen*

- (1) Das Spektrum  $|c_n|$  ist eine Funktion der *diskreten* Variablen  $n$  bzw.  $n\omega_0$  (*Linienspektrum*).
- (2) Die *Umrechnung* zwischen der *reellen* und der *komplexen* Darstellungsform erfolgt über die Gleichungen (II-53) bzw. (II-54).

## 2.2 Zusammenstellung wichtiger Fourier-Reihen (Tabelle)

In Tabelle 2 haben wir die Fourier-Reihen einiger in den Anwendungen besonders wichtiger periodischer Funktionen (Impulse) mit der Perioden- oder Schwingungsdauer  $T$  zusammengestellt.

**Tabelle 2:** Fourier-Reihen einiger besonders wichtiger periodischer Funktionen ( $T$ : Perioden- oder Schwingungsdauer)

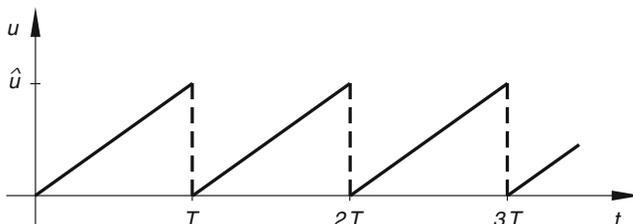
|   |   |
|---|---|
| <p><b>(1) Rechteckkurve</b></p>                      | $y(t) = \begin{cases} \hat{y} & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad \text{für}$ $y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{2\hat{y}}{\pi} \left[ \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots \right]$  |
| <p><b>(2) Dreieckskurve</b></p>                     | $y(t) = \begin{cases} -\frac{2\hat{y}}{T}t + \hat{y} & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{2\hat{y}}{T}t - \hat{y} & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad \text{für}$ $y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{4\hat{y}}{\pi^2} \left[ \frac{1}{1^2} \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cdot \cos(5\omega_0 t) + \dots \right]$ |
| <p><b>(3) Kippschwingung (Sägezahnimpuls)</b></p>  | $y(t) = \frac{\hat{y}}{T}t \quad (0 \leq t < T)$ $y(t) = \frac{\hat{y}}{2} - \frac{\hat{y}}{\pi} \left[ \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \dots \right]$   |

**Tabelle 2:** (Fortsetzung)

|   |  |
|---|--|
| <b>(4) Sinusimpuls (Einweggleichrichtung)</b>   |  |
|   | $y(t) = \begin{cases} \hat{y} \cdot \sin(\omega_0 t) & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$ |
| $y(t) = \frac{\hat{y}}{\pi} + \frac{\hat{y}}{2} \cdot \sin(\omega_0 t) - \frac{2\hat{y}}{\pi} \left[ \frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6\omega_0 t) + \dots \right]$ |  |
| <b>(5) Sinusimpuls (Zweiweggleichrichtung)</b>  |  |
|   | $y(t) = \hat{y}  \sin(\omega_0 t)  \quad (0 \leq t \leq T)$  |
| $y(t) = \frac{2\hat{y}}{\pi} - \frac{4\hat{y}}{\pi} \left[ \frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6\omega_0 t) + \dots \right]$   |  |

### 2.3 Ein Anwendungsbeispiel: Fourier-Zerlegung einer Kippspannung

Wir betrachten den in Bild II-11 dargestellten zeitlichen Verlauf einer Kippspannung mit der Schwingungsdauer  $T$ :



**Bild II-11**  
Zeitlicher Verlauf  
einer Kippspannung  
(Sägezahnimpuls)

Diese *sägezahnförmige* Impulsfolge wird im Periodenintervall  $0 \leq t < T$  durch die Funktionsgleichung

$$u(t) = \frac{\hat{u}}{T} \cdot t \quad (\text{II-63})$$

beschrieben. Die Zerlegung dieser periodischen Funktion in *Grundschwingung* und *Oberschwingungen* erfordert die Berechnung der *reellen* Fourier-Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ . Wir wählen den rechnerisch bequemerem *komplexen* Ansatz (II-61) und gehen anschließend zur *reellen* Darstellung über. Die Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_n$  mit Hilfe der Integralformel (II-62) führt auf das folgende Integral:

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{\hat{u}}{T^2} \cdot \underbrace{\int_0^T t \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt}_{I_n} = \frac{\hat{u}}{T^2} \cdot I_n \quad (\text{II-64})$$

Das Integral  $I_n$  wird unter Verwendung der *Integraltafel* ausgewertet, wobei die Fälle  $n = 0$  und  $n \neq 0$  zu unterscheiden sind.

1. Fall:  $n = 0$

$$I_0 = \int_0^T t \cdot e^0 dt = \int_0^T t \cdot 1 dt = \int_0^T t dt = \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_0^T = \frac{1}{2} T^2$$

$$c_0 = \frac{\hat{u}}{T^2} \cdot I_0 = \frac{\hat{u}}{T^2} \cdot \frac{1}{2} T^2 = \frac{\hat{u}}{2} \quad (\text{II-65})$$

2. Fall:  $n \neq 0$

Integral Nr. 313 mit  $a = -jn\omega_0$

$$I_n = \int_0^T t \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \left[ \frac{-jn\omega_0 t - 1}{j^2 n^2 \omega_0^2} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \right]_0^T =$$

$$= \left[ \frac{jn\omega_0 t + 1}{n^2 \omega_0^2} \cdot e^{-jn\omega_0 t} \right]_0^T = \frac{1}{n^2 \omega_0^2} \left[ (jn\omega_0 T + 1) \cdot e^{-jn\omega_0 T} \right]_0^T =$$

$$= \frac{1}{n^2 \omega_0^2} [(jn\omega_0 T + 1) \cdot e^{-jn\omega_0 T} - 1] \quad (\text{II-66})$$

(unter Berücksichtigung von  $e^0 = 1$  und  $j^2 = -1$ )

Mit  $\omega_0 T = 2\pi$  und dem nach der Eulerschen Formel berechneten Wert

$$e^{-jn\omega_0 T} = e^{-jn2\pi} = \underbrace{\cos(n2\pi)}_1 - j \cdot \underbrace{\sin(n2\pi)}_0 = 1 - j0 = 1 \quad (\text{II-67})$$

folgt dann:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n^2 \omega_0^2} [(jn2\pi + 1) \cdot 1 - 1] = \frac{jn2\pi + 1 - 1}{n^2 \omega_0^2} = \frac{jn2\pi}{n^2 \omega_0^2} = \frac{j2\pi}{n\omega_0^2} \\ c_n &= \frac{\hat{u}}{T^2} \cdot I_n = \frac{\hat{u}}{T^2} \cdot \frac{j2\pi}{n\omega_0^2} = j \cdot \frac{\hat{u}(2\pi)}{n(\underbrace{\omega_0 T}_{2\pi})^2} = j \cdot \frac{\hat{u}(2\pi)}{n(2\pi)^2} = \\ &= j \cdot \frac{\hat{u}}{n2\pi} = j \cdot \frac{\hat{u}}{2\pi n} \end{aligned} \quad (\text{II-68})$$

Aus den *komplexen* Fourier-Koeffizienten  $c_n$  berechnen wir jetzt die gesuchten Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  der *reellen* Fourier-Zerlegung mit Hilfe der Umrechnungsformeln (II-54):

$$a_0 = 2c_0 = 2 \cdot \frac{\hat{u}}{2} = \hat{u} \quad (\text{II-69})$$

$$a_n = c_n + c_n^* = j \cdot \frac{\hat{u}}{2\pi n} - j \cdot \frac{\hat{u}}{2\pi n} = 0 \quad (\text{II-70})$$

$$\begin{aligned} b_n &= j(c_n - c_n^*) = j \left( j \cdot \frac{\hat{u}}{2\pi n} - (-j) \cdot \frac{\hat{u}}{2\pi n} \right) = j \cdot 2j \cdot \frac{\hat{u}}{2\pi n} = \\ &= j^2 \cdot \frac{\hat{u}}{\pi n} = -\frac{\hat{u}}{\pi n} = -\frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (\text{II-71})$$

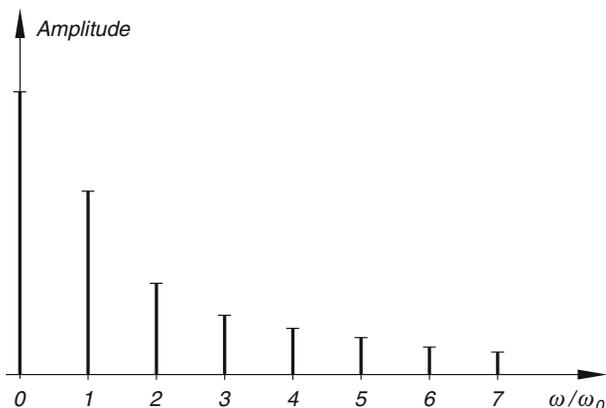
Die Kippspannung enthält somit neben dem konstanten Anteil nur *Sinusanteile*, ihre *Fourier-Reihe* besitzt demnach die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(n\omega_0 t) = \\ &= \frac{\hat{u}}{2} - \frac{\hat{u}}{\pi} \cdot \left[ \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{II-72})$$

In der Kippspannung sind demnach folgende *Komponenten* enthalten (sog. *harmonische Analyse*):

1. Der *Gleichspannungsanteil*  $\hat{u}/2$ .
2. Die sinusförmige *Grundschwingung* mit der Kreisfrequenz  $\omega_0$  und der Amplitude  $\hat{u}/\pi$ .
3. *Sinusförmige Oberschwingungen* mit den Kreisfrequenzen  $2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0, \dots$  und den Amplituden  $\hat{u}/2\pi, \hat{u}/3\pi, \hat{u}/4\pi, \dots$ .

Einen sehr anschaulichen Einblick in die Struktur der Kippspannung gewinnt man aus dem sog. *Amplitudenspektrum* (Bild II-12). In ihm werden die *Amplituden* der einzelnen Schwingungskomponenten als Funktion der *Kreisfrequenz* abgetragen. Dem Amplitudenspektrum können wir unmittelbar entnehmen, *welche Schwingungskomponenten* in der Kippspannung enthalten sind und mit *welchen (prozentualen) Anteilen* sie an der Gesamtschwingung beteiligt sind. Dem Gleichspannungsanteil  $\hat{u}/2$  wird dabei die Kreisfrequenz  $\omega = 0$  zugeordnet.



**Bild II-12**  
Amplitudenspektrum  
einer Kippspannung

## Übungsaufgaben

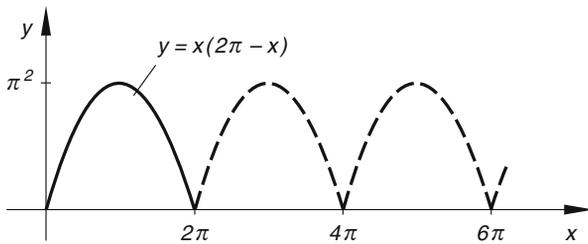
### Zu Abschnitt 1

*Hinweis:* Die Fourier-Reihen sind stets in der *reellen* Form darzustellen (Ausnahme: Aufgabe 4).

- 1) Die in Bild II-13 skizzierte periodische Funktion besteht aus *Parabelbögen*. Ihre Funktionsgleichung lautet im Periodenintervall  $0 \leq x \leq 2\pi$ :

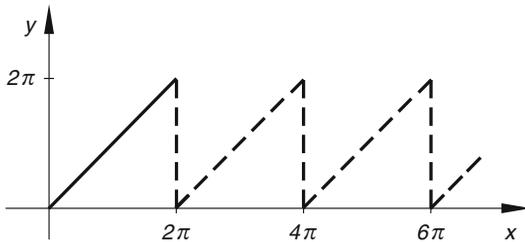
$$f(x) = x(2\pi - x) = 2\pi x - x^2$$

Bestimmen Sie die Fourier-Reihe dieser Funktion.



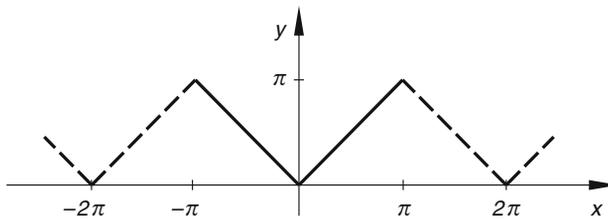
**Bild II-13** Parabelförmiger Impuls

- 2) Wie lautet die Fourier-Reihe der in Bild II-14 dargestellten periodischen Funktion mit der Gleichung  $f(x) = x$  im Periodenintervall  $0 \leq x < 2\pi$ ?



**Bild II-14**

- 3) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der in Bild II-15 skizzierten periodischen Funktion, die im Periodenintervall  $[-\pi; \pi]$  durch die Gleichung  $f(x) = |x|$  beschrieben wird.



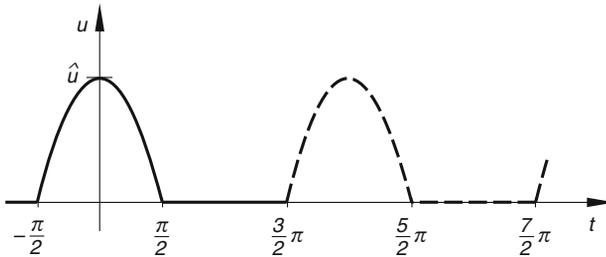
**Bild II-15**

- 4) Eine periodische Funktion wird im Periodenintervall  $-\pi \leq x \leq \pi$  durch die Gleichung  $f(x) = e^x$  beschrieben. Wie lautet ihre Fourier-Reihe in *komplexer* Darstellung? Leiten Sie anschließend aus der komplexen Form die *reelle* Form her.

## Zu Abschnitt 2

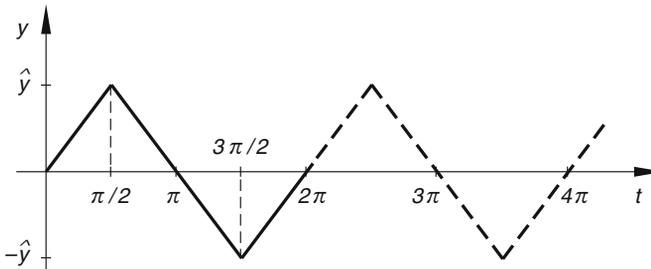
- 1) Zerlegen Sie den folgenden *Kosinusimpuls* (Einweggleichrichtung nach Bild II-16) in seine *harmonischen* Komponenten (*Fourier-Zerlegung*):

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \hat{u} \cdot \cos t & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}\pi \end{array} \right\} \quad (\text{Periode: } p = 2\pi)$$



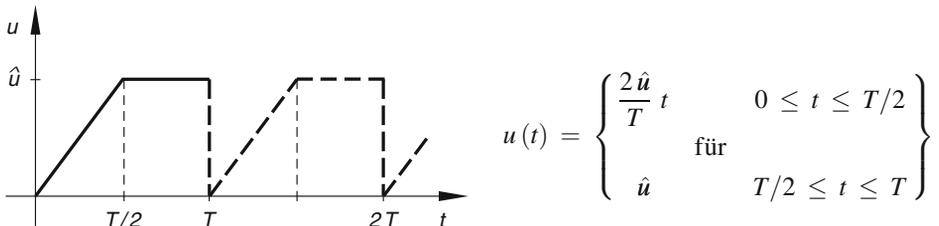
**Bild II-16** Kosinusimpuls (Einweggleichrichtung)

- 2) Wie lautet die *Fourier-Zerlegung* des in Bild II-17 dargestellten *Dreiecksimpulses*?



**Bild II-17** Dreiecksimpuls

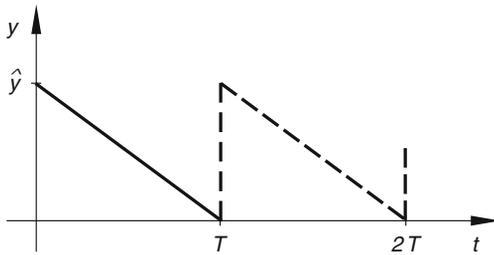
- 3) Bild II-18 zeigt einen *trapezförmigen* Impuls. Zerlegen Sie diese periodische Funktion in ihre *harmonischen* Komponenten.



$$u(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2\hat{u}}{T} t & 0 \leq t \leq T/2 \\ \hat{u} & \text{für } T/2 \leq t \leq T \end{array} \right\}$$

**Bild II-18** Trapezförmiger Impuls

- 4) Wie lautet die *Fourier-Zerlegung* der in Bild II-19 dargestellten *Kippschwingung* (Sägezahnfunktion)?

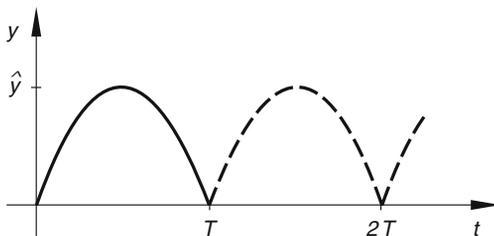


**Bild II-19** Kippschwingung (sägezahnförmiger Impuls)

- 5) Zerlegen Sie den in Bild II-20 dargestellten *Sinusimpuls* (Zweiweggleichrichtung) mit der Funktionsgleichung

$$y(t) = \hat{y} \cdot |\sin(\omega_0 t)| \quad (0 \leq t \leq T)$$

in seine *harmonischen Bestandteile* (*Fourier-Analyse*).



**Bild II-20** Sinusimpuls (Zweiweggleichrichtung)

<http://www.springer.com/978-3-658-07789-1>

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Band 2

Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium

Papula, L.

2015, XXI, 827 S. 345 Abb. Mit 345 Abbildungen, 300

Beispielen aus Naturwissenschaft und Technik sowie

324 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen.,

Softcover

ISBN: 978-3-658-07789-1