

Mathematik für die Fachschule Technik

Bearbeitet von
Josef Dillinger, Bernhard Grimm, Frank-Michael Gumpert, Gerhard Mack, Thomas Müller, Bernd
Schiemann

1. Auflage 2015. Taschenbuch. ca. 264 S. Paperback

ISBN 978 3 8085 7038 8

Format (B x L): 17 x 24 cm

Gewicht: 454 g

schnell und portofrei erhältlich bei


DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.



Mathematik für die Fachschule für Technik

Bearbeitet von Lehrern und Ingenieuren an beruflichen Schulen
(Siehe nächste Seite)

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 70388

Autoren des Buches „Mathematik für die Fachschule für Technik“

Josef Dillinger	München
Bernhard Grimm	Sindelfingen, Leonberg
Dr. Frank-Michael Gumpert	Stuttgart-Birkach
Gerhard Mack	Esslingen
Thomas Müller	Ulm
Bernd Schiemann	Durbach/Ortenau

Lektorat: Bernd Schiemann

Bildentwürfe: Die Autoren

Bilderstellung und -bearbeitung: Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

1. Auflage 2015
Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-8085-7038-8

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2015 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: Idee Bernd Schiemann, Durbach; Ausführung: Andreas Sonnhüter, 40625 Düsseldorf

Satz: fidus Publikations-Service, 86720 Nördlingen/Löpsingen

Druck: Konrad Tritsch Print und digitale Medien GmbH, 97199 Ochsenfurt-Hohestadt

Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Buch dient der vertieften beruflichen Fortbildung für Fachkräfte, mit beruflicher Erstausbildung oder für Umschüler mit langer beruflicher Erfahrung. Es deckt den Lehrplan für Fachschulen, Fachakademien und auch Berufskollegs ab. Es dient auch zur Vorbereitung auf die Ergänzungsprüfung in Mathematik, Technik und Nichttechnik.

Ein kompaktes Lehr- und Übungsbuch, das auch schwierige mathematische Zusammenhänge anhand praktischer Beispiele visualisiert und erklärt. Dieser Praxisbezug zeigt dem Lernenden die jeweilige Anwendung der mathematischen Themen auf. Im Mittelpunkt des Lernprozesses steht das selbst organisierte und selbst gesteuerte Lernen erwachsener Schülerinnen und Schüler.

Zur Förderung handlungsorientierter Themenbearbeitung enthält das Buch eine große Anzahl von Beispielen, anhand derer eine Vielzahl von Aufgaben zu lösen sind. Zu jeder Aufgabe ist die Lösung auf derselben Seite angegeben. Das Buch ist deshalb auch sehr gut zum selbstständigen Lernen geeignet. Zum Üben dienen eine Vielzahl von Aufgaben am Buchende. Ein didaktisch aufbereiteter Lösungsband mit ausführlichen Schritten zur Lösung, sowie eine Formelsammlung ergänzen das Buch.

Um unterschiedliche Vorkenntnisse auszugleichen, beginnt das Buch mit den Kapiteln Algebraische und Geometrische Grundlagen.

Die Hauptabschnitte des Buches sind

- **Algebraische Grundlagen**
- **Geometrische Grundlagen**
- **Vektorrechnung**
- **Analysis**
- **Differenzialrechnung**
- **Integralrechnung**
- **Komplexe Rechnung**
- **Prüfungsvorbereitung**
- **Aufgaben aus der Praxis**
- **Projektaufgaben**
- **Selbst organisiertes Lernen mit
Übungsaufgaben – Musteraufgaben – Musterprüfungen**

Ihre Meinung interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit.

Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse: info@europa-lehrmittel.de

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Fachbegriffe	7	2.3.3	Stumpfe Körper	42
1 Algebraische Grundlagen		2.3.4	Kugelförmige Körper	43
1.1 Term	9	2.4	Trigonometrische Beziehungen	44
1.2 Gleichung	9	2.4.1	Ähnliche Dreiecke	44
1.3 Definitionsmenge	9	2.4.2	Rechtwinklige Dreiecke	44
1.4 Potenzen	10	2.4.3	Einheitskreis	45
1.4.1 Potenzbegriff	10	2.4.4	Sinussatz und Kosinussatz	46
1.4.2 Potenzgesetze	10	2.4.5	Winkelberechnung	47
1.5 Wurzelgesetze	12	Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	48	
1.5.1 Wurzelbegriff	12	2.4.7	Additionstheoreme	49
1.5.2 Rechengesetze beim Wurzelrechnen	12	3 Vektorrechnung		
1.6 Binomische Formeln	13	3.1	Der Vektorbegriff	51
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	15	3.2	Darstellung von Vektoren im Raum	52
1.7 Logarithmengesetze	16	3.3	Verknüpfungen von Vektoren	54
1.7.1 Logarithmusbegriff	16	3.3.1	Vektoraddition	54
1.7.2 Rechengesetze beim Logarithmus	16	3.3.2	Verbindungsvektor, Vektorsubtraktion	56
1.7.3 Basismrechnung beim Logarithmus	17	3.3.3	Skalare Multiplikation, S-Multiplikation	57
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	18	3.3.4	Einheitsvektor	58
1.8 Mengen	19	Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	59	
1.8.1 Mengen und ihre Elemente	19	3.3.5	Strecke, Mittelpunkt	60
1.8.2 Beziehungen zwischen Mengen	19	3.3.6	Skalarprodukt	61
1.8.3 Verknüpfung mit Mengen	20	Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	63	
1.8.4 Pfeildiagramme	21	3.4	Lineare Abhängigkeit von Vektoren	64
1.9 Funktionen und Gleichungssysteme	22	3.4.1	Zwei Vektoren im Raum	64
1.9.1 Rechtwinkliges Koordinatensystem	22	3.4.2	Drei Vektoren im Raum	65
1.9.2 Funktionen	23	3.4.3	Vier Vektoren im Raum	66
1.9.3 Lineare Funktionen	24	3.4.4	Basisvektoren	67
1.9.3.1 Ursprungsgeraden	24	3.4.4.1	Eigenschaften von linear unabhängigen Vektoren	67
1.9.3.2 Allgemeine Geraden	25	3.4.4.2	Koordinatendarstellung von Vektoren	68
Ü Überprüfen Sie ihr Wissen!	26	3.5	Orthogonale Projektion	69
1.9.4 Betragsfunktion	27	3.6	Lotvektoren	70
1.9.5 Ungleichungen	28	3.6.1	Lotvektoren zu einem einzelnen Vektor	70
1.9.6 Quadratische Funktionen	29	3.6.2	Lotvektoren einer Ebene	71
1.9.6.1 Parabeln mit dem Scheitel im Ursprung	29	3.7	Vektorprodukt	72
1.9.6.2 Verschieben von Parabeln	30	Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	75	
1.9.6.3 Normalform und Nullstellen von Parabeln	31	3.8	Vektorgleichung einer Geraden im Raum	76
1.9.6.4 Zusammenfassung der Lösungsarten	32	3.9	Orthogonale Projektion von Punkten und Geraden auf eine Koordinatenebene	80
Ü Überprüfen Sie ihr Wissen!	33	3.10	Gegenseitige Lage von Geraden	82
1.9.7 Lineare Gleichungssysteme LGS	34	3.11	Abstandsberechnungen	87
1.9.7.1 LGS mit dem Additionsverfahren lösen	34	3.11.1	Abstand Punkt–Gerade und Lotfußpunkt	88
1.9.7.2 Lösung eines LGS mit dem Gleichsetzungsverfahren	35	3.11.2	Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden	89
1.9.7.3 Graphische Lösung eines LGS	36	3.11.3	Abstand zwischen parallelen Geraden	90
2 Geometrische Grundlagen		Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	91	
2.1 Flächeninhalt geradlinig begrenzter Flächen	37	3.12	Ebenengleichung	92
2.2 Flächeninhalt kreisförmig begrenzter Flächen	38	3.12.1	Vektorielle Parameterform der Ebene	92
Ü Überprüfen Sie ihr Wissen!	39	3.12.2	Vektorielle Dreipunkteform einer Ebene	93
2.3 Volumenberechnungen	40	3.12.3	Parameterfreie Normalenform	94
2.3.1 Körper gleicher Querschnittsfläche	40	3.13	Ebene–Punkt	95
2.3.2 Spitze Körper	41			

3.13.1 Punkt P liegt in der Ebene E 95

3.13.2 Kürzester Abstand eines Punktes P von der Ebene E 95

3.14 Ebene–Gerade 96

3.14.1 Gerade parallel zur Ebene 96

3.14.2 Gerade in der Ebene E 97

3.14.3 Gerade schneidet Ebene 97

Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! 98

3.14.4 Spiegelebene und Spiegelpunkt 99

3.15 Lagebezeichnung von Ebenen 100

3.15.1 Parallele Ebenen 100

3.15.2 Sich schneidende Ebenen 100

3.15.3 Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen 101

Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! 102

4 Analysis

4.1 Potenzfunktionen 103

4.2 Wurzelfunktionen 104

4.2.1 Allgemeine Wurzelfunktionen 104

4.2.2 Quadratische Wurzelfunktionen 105

4.3 Ganzrationale Funktionen höheren Grades 106

4.3.1 Funktion dritten Grades 106

4.3.2 Funktion vierten Grades 107

4.3.3 Nullstellenberechnung 107

4.3.3.1 Nullstellenberechnung bei biquadratischen Funktionen 107

4.3.3.2 Nullstellenberechnung mit dem Satz vom Nullprodukt 108

4.3.3.3 Nullstellenberechnung durch Abspalten von Linearfaktoren 109

4.3.3.4 Numerische Methoden 111

4.3.4 Arten von Nullstellen 113

Ü Überprüfen Sie ihr Wissen! 114

4.4 Gebrochenrationale Funktionen 115

4.4.1 Definitionsmenge 115

4.4.2 Definitionslücke 115

4.4.3 Polstellen 115

4.4.4 Grenzwerte 116

4.4.5 Grenzwertsätze 117

4.4.6 Asymptoten 118

Ü Überprüfen Sie ihr Wissen 119

4.5 Exponentialfunktion 120

4.6 e-Funktion 121

Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! 123

4.7 Trigonometrische Funktionen 124

4.7.1 Sinusfunktion und Kosinusfunktion 124

4.7.2 Tangensfunktion und Kotangensfunktion 125

4.7.3 Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen 125

4.7.4 Allgemeine Sinusfunktion und Kosinusfunktion 126

4.8 Eigenschaften von Funktionen 128

4.8.1 Symmetrie bei Funktionen 128

4.8.2 Umkehrfunktionen 129

4.8.3 Monotonie und Umkehrbarkeit 132

4.8.4 Stetigkeit von Funktionen 133

Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! 134

5 Differenzialrechnung

5.1 Erste Ableitung $f'(x)$ 135

5.2 Differenzialquotient 136

5.3 Ableitungsregeln 138

5.3.1 Anwendung der Ableitungsregel 141

5.4 Höhere Ableitungen 143

Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! 145

5.5 Newton'sches Näherungsverfahren (Tangentenverfahren) 146

5.6 Extremwertberechnungen 147

5.6.1 Extremwertberechnung mit einer Hilfsvariablen 149

5.6.2 Randextremwerte 150

Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! 152

5.7 Kurvendiskussion 153

5.7.1 Differenzierbarkeit von Funktionen 153

5.7.2 Monotonie 154

5.7.3 Hochpunkte und Tiefpunkte 156

5.7.4 Wendepunkte 157

5.7.5 Einparametrische Funktionenschar 159

5.7.6 Tangenten und Normalen 162

5.7.6.1 Tangenten und Normalen in einem Kurvenpunkt 162

5.7.6.2 Tangenten parallel zu einer Geraden 163

5.7.6.3 Anlegen von Tangenten an G_f von einem beliebigen Punkt aus 164

5.7.6.4 Zusammenfassung Tangentenberechnung 165

5.7.7 Ermittlung von Funktionsgleichungen 166

5.7.7.1 Ganzrationale Funktion 166

5.7.7.2 Ganzrationale Funktion mit Symmetrieeigenschaft 169

5.7.7.3 Exponentialfunktion 170

5.7.7.4 Sinusförmige Funktion 171

Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! 172

6 Integralrechnung

6.1 Einführung in die Integralrechnung 173

6.1.1 Aufsuchen von Flächeninhaltsfunktionen 174

6.1.2 Stammfunktionen 175

6.2 Integrationsregeln 176

6.2.1 Potenzfunktionen 176

6.2.2 Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen 176

6.3 Das bestimmte Integral 177

6.3.1 Geradlinig begrenzte Fläche 177

6.3.2 „Krummlinig“ begrenzte Fläche 178

6.4 Berechnung von Flächeninhalten 179

6.4.1 Integralwert und Flächeninhalt 179

6.4.2 Integration verketteter Funktionen (Substitutionsregel) 180

6.4.3 Flächen für Graphen mit Nullstellen 181

6.4.4 Musteraufgabe zur Flächenberechnung 182

6.4.5 Regeln zur Vereinfachung bei Flächen 183

6.4.6 Integrieren mit variabler Grenze 185

Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen! 186

6.5 Flächenberechnungen zwischen Graphen 187

6.5.1 Flächenberechnung im Intervall 187

6.5.2 Flächen zwischen zwei Graphen 188

6.5.3	Flächenberechnung mit der Differenzfunktion	189
6.5.4	Musteraufgabe zu gelifteten Graphen	190
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	191
6.6	Numerische Integration	193
6.6.1	Streifenmethode mit Rechtecken.....	193
6.6.2	Flächenberechnung mit Trapezen.....	194
6.6.3	Flächenberechnung mit Näherungsverfahren.....	196
6.7	Volumenberechnung.....	197
6.7.1	Rotation um die x-Achse	197
6.7.2	Rotation um die y-Achse	200
6.8	Anwendungen der Integralrechnung	201
6.8.1	Zeitintegral der Geschwindigkeit	201
6.8.2	Mechanische Arbeit W.....	201
6.8.3	Elektrische Ladung Q	202
6.8.4	Mittelwertsberechnungen	202

7 Komplexe Rechnung

7.1	Darstellung komplexer Zahlen	203
7.2	Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	205
7.3	Rechnen mit konjugiert komplexen Zahlen	205
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	206

8 Prüfungsvorbereitung

8.1	Ganzrationale Funktionen.....	207
8.2	Exponentialfunktion	209
8.3	Goniometrische Gleichungen	211
8.4	Gebrochenrationale Funktionen	212
8.5	Vektoraufgabe Prisma.....	213
8.6	Vektoraufgabe Quader.....	214
8.7	Vektoraufgabe Pyramide	215

9 Aufgaben aus der Praxis und Projektaufgaben

9.1	Kostenrechnung	216
9.2	Optimierung einer Oberfläche	217
9.3	Optimierung einer Fläche.....	217
9.4	Flächenmoment.....	218
9.5	Sammellinse einer Kamera	219
9.6	Abkühlvorgang	220
9.7	Entladevorgang	220
9.8	Wintergarten.....	221
9.9	Bauvorhaben Kirche.....	221
9.10	Aushub Freibad	221
9.11	Berechnung von elektrischer Arbeit und Leistung	222
9.12	Sinusförmige Wechselgrößen.....	222
9.13	Effektivwertberechnung.....	223

10 Projektaufgaben

10.1	Pyramide	224
10.2	Kugelfangrichter für Luftgewehre	225
10.3	Anwendungen in der Differenzialrechnung	226

11 Selbst Organisiertes Lernen Übungsaufgaben – Prüfungsaufgaben

11.1	Übungsaufgaben.....	228
11.2	Musterprüfungen	227
11.1.1	Algebraische Grundlagen.....	228
11.1.2	Mengen	230
11.1.3	Pfeildiagramme	231
11.1.4	Binomische Formeln	232
11.1.5	Quadratische Funktionen.....	233
11.1.6	Geometrische Grundlagen	234
11.1.7	Vektoren	236
11.1.8	Nullstellen	240
11.1.9	Potenzfunktionen.....	241
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	241
11.1.10	Exponentialfunktionen.....	242
11.1.11	Sinusfunktion und Kosinusfunktion	243
11.1.12	Wurzelfunktionen	244
11.1.13	Zeitabhängige Sinusfunktion	244
11.1.14	Kurvendiskussion	245
11.1.15	Flächenberechnungen	246
11.2	Musterprüfungen	247
11.2.1	Kurvendiskussion mit ganzrationalen Funktionen	247
11.2.2	Extremwertberechnung mit ganzrationalen Funktionen	248
11.2.3	e-Funktionen	249
11.2.4	Sinusfunktionen	251
11.2.5	Gebrochenrationale Funktionen	253
11.2.6	e- und ln-Funktion verknüpft mit rationaler Funktion	254
11.2.7	Vektorrechnung	255
11.2.8	Extremwertaufgaben	256

Anhang

Mathematische Zeichen, Abkürzungen und Formelzeichen.....	257
Literaturverzeichnis	259
Sachwortverzeichnis	260

Mathematische Fachbegriffe

Ableitungsfunktion

Ist die Funktion $f'(x)$, deren Werte die Steigungen des Grafen der Funktion $f(x)$ angeben.

Abgestumpfte Körper

Kegelstumpf und Pyramidenstumpf werden so bezeichnet.

Achsenschnittpunkte

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, z. B. x-, y- oder z-Achse.

Äquivalenzumformung

Umformen von Gleichungen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert.

Arkus-Funktionen

Als Arkus-Funktionen z. B. $\arcsin x$, $\arctan x$, werden die Umkehrfunktionen der trigonometrischen $\sin x$, $\tan x$ Funktionen bezeichnet.

Asymptote

Eine Gerade, der sich eine ins Unendliche verlaufende Kurve beliebig nähert.

Biquadratische Gleichung

Es handelt sich um eine Gleichung 4. Grades mit nur geradzahligem Exponenten ($ax^4 + bx^2 + c = 0$).

Differenzenquotient

Ist die Steigung der Sekante durch zwei Punkte der Funktion.

Differenzialquotient

Grenzwert des Differenzenquotienten, entspricht der Steigung der Tangente.

Differenzierbarkeit von Funktionen

Eine Funktion ist differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle eine eindeutig bestimmte Tangente mit einer endlichen Steigung hat.

Ebenengleichung

Fläche, die z. B. durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, festgelegt ist.

e-Funktion

Exponentialfunktionen mit der Basis e , natürliche Exponentialfunktionen genannt.

Exponentialfunktion

Bei der Exponentialfunktion ist die Hochzahl die unabhängige Variable.

Funktion

Eindeutige Zuordnungen von Elementen nennt man Funktionen.

Ganze Zahlen

Sie können positiv, negativ oder null sein.

Ganzrationale Funktion

Ganzrationale Funktionen bestehen aus der Addition verschiedener Potenzfunktionen.

Gebrochenrationale Funktion

Bei einer gebrochenrationalen Funktion steht im Zähler das Zählerpolynom und im Nenner das Nennerpolynom.

Gerade

Der Funktionsgraph für die Darstellung linearer Zusammenhänge (lineare Funktion) heißt Gerade.

Gleichung

Eine Gleichung entsteht durch Verbindung zweier Terme durch ein Gleichheitszeichen.

Hesse'sche Normalenform HNF

In der Hesse'schen Normalenform der Ebenengleichung wird der Normaleneinheitsvektor statt des Normalenvektors verwendet.

Imaginäre Zahlen

Scheinbare (unvorstellbare) Zahlen, z. B. j ; $3j$; $-2j$.

Integrieren

Integrieren heißt, eine abgeleitete Funktion wieder in die ursprüngliche Form zurückzuführen.

Irrationale Zahlen

Sind Dezimalzahlen mit unendlich vielen, nichtperiodischen Nachkommaziffern, z. B. Wurzelzahlen, die Konstanten π und e .

Kartesische Koordinaten

Achsen stehen senkrecht aufeinander und haben die Einheit 1 LE.

Komplexe Zahlen

Zahlen, die reell und/oder imaginär sind.

Konstante Funktion

Funktionswert bleibt für alle x konstant.

Koordinatensystem

Mit Koordinaten (= Zahlen, die die Lage von Punkten angeben) lassen sich diese in einer Ebene oder im Raum eindeutig festlegen.

Lineare Funktion

Ganzrationale Funktion 1. Grades.

Lineares Gleichungssystem LGS

System von Lineargleichungen, deren Variablen die Hochzahl 1 enthalten.

Logarithmische Funktionen

Sie sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen.

Logarithmus

Logarithmieren heißt, die Hochzahl (= Exponent) einer bestimmten Potenz berechnen.

Natürliche Zahlen

Positive, ganze Zahlen einschließlich der Null.

Numerische Integration

Numerische Integration heißt, den Flächeninhalt näherungsweise berechnen, z.B. durch Auszählen von elementaren Teilflächen, wie Rechtecken oder Trapezen. (Anwendung, wenn keine Stammfunktion bekannt ist.)

Nullstellen

Die x-Werte der Schnittpunkte eines Funktionsgraphen mit der x-Achse nennt man Nullstellen.

Orthogonal

Rechtwinklig. Orthogonale (rechtwinklige) Geraden haben einen Winkel von 90° zueinander.

Parabel

Graph einer quadratischen Funktion.

Pol

Stelle, an der eine senkrechte Asymptote vorliegt.

Polynom

Eine andere Bezeichnung für "ganzrationale Funktion".

Potenz

Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren.

Potenzfunktionen

Sind Funktionen, von der Form $y = x^n$.

Quadranten

Zeichenebenen in Koordinatensystemen.

Quadratische Gleichung

Ist eine Gleichung 2. Grades ($ax^2 + bx + c = 0$).

Quadratwurzel

Beim Wurzelziehen (Radizieren) wird der Wert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt.

Rationale Zahlen

Zahlen, die durch Brüche darstellbar sind.

Reelle Zahlen

Zahlen, die rational oder irrational sind.

Relation

Eindeutige oder mehrdeutige Zuordnung.

Skalar

Größe, die durch einen bestimmten reellen Zahlenwert festgelegt ist.

Spitze Körper

Pyramide und Kegel werden als spitze Körper bezeichnet (Prismatische Körper).

Spurgerade

Die gemeinsamen Punkte (Schnittpunkte) einer Ebene mit einer Koordinatenebene bilden die Spurgerade.

Spurpunkte

Spurpunkte nennt man die Durchstoßpunkte (Schnittpunkte) einer Geraden mit den Koordinatenebenen.

Steigung

Als Steigung wird das Verhältnis des Δy -Wertes zum Δx -Wert eines Steigungsdreiecks, z.B. einer Tangente, bezeichnet.

Stetigkeit von Funktionen

Stetige Funktionen können durch einen lückenlosen, zusammenhängenden Kurvenzug dargestellt werden.

Term

Mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen kann.

Trigonometrische Funktionen

Winkelfunktionen, z.B. $\sin x$, $\tan x$.

Umkehrfunktion

Funktion, bei der die Zuordnung der Variablen vertauscht wird.

Variable

Das sind Buchstaben, z.B. x , y , an deren Stelle Zahlen der Grundmenge gesetzt werden.

Vektor

Physikalische oder mathematische Größe, die durch einen Pfeil dargestellt wird und durch Richtung und Betrag festgelegt ist.

Wurzelfunktionen

Das sind Potenzfunktionen, die gebrochene Hochzahlen enthalten.

1 Algebraische Grundlagen

1.1 Term

Terme können Zahlen, z.B. -1 ; $\frac{1}{2}$; 2 oder Variablen, z.B. a ; x ; y , sein. Werden Terme durch Rechenoperationen verbunden, so entsteht wieder ein Term.

1.2 Gleichung

Eine Gleichung besteht aus einem Linksterm T_l und aus einem Rechtsterm T_r .

Werden zwei Terme durch das Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht die Gleichung $T_l = T_r$.

Beispiel 1: Gleichung

Stellen Sie die beiden Terme T_l : $x + 2$ und T_r : -4 als Gleichung dar.

Lösung: $x + 2 = -4$

Werden an Gleichungen Rechenoperationen durchgeführt, so muss auf jeder Seite der Gleichung diese Rechenoperation durchgeführt werden (**Tabelle 1**). Eine Gleichung mit mindestens einer Variablen stellt eine Aussageform dar. Diese Aussageform kann eine wahre oder falsche Aussage ergeben, wenn den Variablen Werte zugeordnet werden.

Ein Wert x einer Gleichung heißt Lösung, wenn beim Einsetzen von x in die Gleichung eine wahre Aussage entsteht.

Beispiel 2: Lösung einer Gleichung

Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung $x + 2 = -4$

Lösung: $x + 2 = -4$ | -2
 $x + 2 - 2 = -4 - 2$
 $x = -6$

1.3 Definitionsmenge

Die Definitionsmenge eines Terms kann einzelne Werte oder ganze Bereiche aus der Grundmenge ausschließen (**Tabelle 2**).

Beispiel 3: Definitionsmenge

Die Definitionsmenge der Gleichung $\sqrt{x-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$; $x \in \mathbb{R}$ ist zu bestimmen.

Lösung: Die Definitionsmenge D_1 des Linksterms wird durch die Wurzel eingeschränkt.

$$D_1 = \{x | x \geq 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

Die Definitionsmenge D_2 des Rechtsterms wird durch den Nenner eingeschränkt. $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
 Für die Gesamtdefinitionsmenge D gilt:

$$D = D_1 \cap D_2 = \{x | x > 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

Tabelle 1: Rechenoperationen bei Gleichungen $T_l = T_r$

Operation	Allgemein	Beispiel
Addition	$T_l + T = T_r + T$	$x - a = 0$ $+a$ $x - a + a = 0 + a$ $x = a$
Subtraktion	$T_l - T = T_r - T$	$x + a = 0$ $-a$ $x + a - a = 0 - a$ $x = -a$
Multiplikation	$T_l \cdot T = T_r \cdot T$	$\frac{1}{2} \cdot x = 1$ $\cdot 2$ $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 2 = 1 \cdot 2$ $x = 2$
Division	$\frac{T_l}{T} = \frac{T_r}{T}$; $T \neq 0$	$2 \cdot x = 4$ $: 2$ $\frac{2 \cdot x}{2} = \frac{4}{2}$ $x = 2$

Tabelle 2: Einschränkung des Definitionsbereichs in \mathbb{R}

Term	Einschränkung	Beispiel
Bruchterm $T_B = \frac{Z(x)}{N(x)}$	$N(x) \neq 0$	$T(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $x - 1 \neq 0$ $x \neq 1$ $D = \{x x \neq 1\}$
Wurzelterm $T_W = \sqrt{x}$	$x \geq 0$ x größer gleich 0	$T(x) = \sqrt{x-1}$ $x - 1 \geq 0$ $x \geq 1$ $D = \{x x \geq 1\}$
Logarithmusterm $T_L = \log_a x$	$x > 0$ x größer 0	$T(x) = \log_{10} x = \lg x$ $x > 0$ $D = \{x x > 0\}$

Bei Aufgaben aus der Technik oder Wirtschaft ergeben sich häufig einschränkende Bedingungen in technischer, technologischer oder ökonomischer Hinsicht. So kann die Zeit nicht negativ sein oder die Temperatur nicht kleiner -273°C werden. Diese eingeeengte Definitionsmenge ist dann die eigentliche Definitionsmenge einer Gleichung.

Aufgaben:

1. Lösungsmenge. Bestimmen Sie die Lösung für $x \in \mathbb{R}$.

a) $4(2x - 6) = 2x - (x + 4)$

b) $(2x - 1)(3x - 2) = 6(x + 2)(x - 4)$

c) $\frac{x+2}{5} - 2 = 4$

d) $\frac{2-x}{2} + a = 1$

e) $\frac{2x-a}{4} - b = 2$

f) $\frac{3x-5}{5} = \frac{2x-3}{4}$

2. Lösen von Gleichungen. Lösen Sie die Gleichungen nach allen Variablen auf.

a) $h = \frac{1}{2}g \cdot t^2$

b) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

3. Definitions- und Lösungsmenge. Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

a) $\sqrt{2x+2} = \sqrt{4x-8}$

b) $\frac{3x-1}{x+2} = \frac{2-3x}{2-x}$

Lösungen:

1. a) $x = \frac{20}{7}$ b) $x = -10$ c) $x = 28$ d) $x = 2a$

e) $x = \frac{1}{2}a + 2b + 4$ f) $x = \frac{5}{2}$

2. a) $g = \frac{2h}{t^2}$; $t = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$ b) $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$; $R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}$; $R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$

3. a) $D = \{x | x \geq 2\}_{\mathbb{R}}$; $L = \{5\}$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; $L = \left\{\frac{6}{11}\right\}$

1.4 Potenzen

1.4.1 Potenzbegriff

Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren. Eine Potenz besteht aus der Basis (Grundzahl) und dem Exponenten (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss.

Beispiel 1: Potenzschreibweise

Schreiben Sie

- a) das Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ als Potenz und
 b) geben Sie den Potenzwert an.

Lösung: a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ b) $2^5 = 32$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}} = a^n$$

$$a^n = b$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

a Basis; $a > 0$ n Exponent
 b Potenzwert

1.4.2 Potenzgesetze

Potenz mit negativem Exponenten

Eine Potenz, die mit positivem Exponenten im Nenner steht, kann auch mit einem negativen Exponenten im Zähler geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit negativem Exponenten im Zähler als Potenz mit positivem Exponenten im Nenner geschrieben werden.

Beispiel 2: Exponentenschreibweise

Schreiben Sie die Potenzterme a) 2^{-3} ; b) 10^{-3} mit entgegengesetztem Exponenten und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$

b) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$

Beispiel 3: Physikalische Benennungen

Schreiben Sie folgende physikalischen Benennungen mit umgekehrtem Exponenten.

- a) $m \cdot s^{-2}$ b) $U \cdot \text{min}^{-1}$ c) $\frac{m}{s}$

Lösung:

a) $m \cdot s^{-2} = \frac{m}{s^2}$ b) $U \cdot \text{min}^{-1} = \frac{U}{\text{min}}$ c) $\frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$

Addition und Subtraktion

Gleiche Potenzen oder Vielfaches von gleichen Potenzen, die in der Basis und im Exponenten übereinstimmen, lassen sich durch Addition und Subtraktion zusammenfassen (**Tabelle 1**).

Beispiel 4: Addition und Subtraktion von Potenztermen

Die Potenzterme $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$ sind zusammenzufassen.

Lösung: $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$
 $= (3 + 1 + 2)x^3 + (4 - 2)y^2 = 6x^3 + 2y^2$

Tabelle 1: Potenzgesetze	
Regel, Definition	algebraischer Ausdruck
Addition und Subtraktion Potenzen dürfen addiert oder subtrahiert werden, wenn sie denselben Exponenten und dieselbe Basis haben.	$r \cdot a^n \pm s \cdot a^n$ $= (r \pm s) \cdot a^n$
Multiplikation Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält. Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält.	$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenzieren Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Definition Jede Potenz mit dem Exponenten null hat den Wert 1.	$a^0 = 1$; für $a \neq 0$

Multiplikation von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Potenzen als Produkt schreibt und dann ausmultipliziert oder indem man die Exponenten addiert.

Beispiel 1: Multiplikation

Berechnen Sie das Produkt $2^2 \cdot 2^3$ und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

$$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 32$$

$$\text{oder } 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

Beispiel 2: Flächen- und Volumenberechnung

- a) Die Fläche des Quadrates mit $a = 2 \text{ m}$ (Bild 1) und
b) das Volumen des Würfels für $a = 2 \text{ m}$ ist zu berechnen.

Lösung:

$$\text{a) } A = a \cdot a = a^1 \cdot a^1 = a^{1+1} = a^2$$

$$A = 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{m} = 2^2 \text{ m}^2 = 4 \text{ m}^2$$

$$\text{b) } V = a \cdot a \cdot a = a^1 \cdot a^1 \cdot a^1 = a^{1+1+1} = a^3$$

$$= 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{m} \cdot \text{m}$$

$$= 2^3 \text{ m}^3 = 8 \text{ m}^3$$

$$(-a)^2 = a^2 \qquad -a^2 = -(a^2)$$

a Basis; $a > 0$

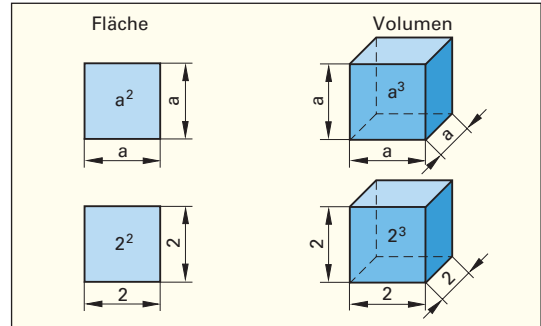


Bild 1: Fläche und Volumen

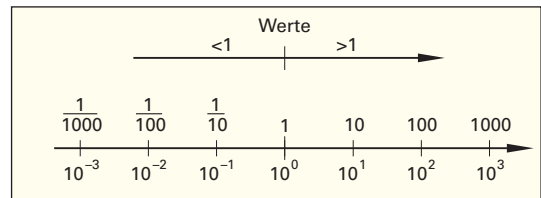


Bild 2: Zehnerpotenzen

Division von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man den Quotienten in ein Produkt umformt und dann die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man den Nennerexponenten vom Zählerexponenten subtrahiert.

Beispiel 3: Division

Der Potenzterm $\frac{2^5}{2^3}$ ist zu berechnen.

Lösung:

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^5 \cdot \frac{1}{2^3} = 2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

$$\text{oder } \frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

Tabelle 1: Zehnerpotenzen, Schreibweise

ausgeschriebene Zahl	Potenz	Vorsatz bei Einheiten
1 000 000 000	10^9	G (Giga)
1 000 000	10^6	M (Mega)
1 000	10^3	k (Kilo)
100	10^2	h (Hekto)
10	10^1	da (Deka)
1	10^0	–
0,1	10^{-1}	d (Dezi)
0,01	10^{-2}	c (Centi)
0,001	10^{-3}	m (Milli)
0,000 001	10^{-6}	μ (Mikro)
0,000 000 001	10^{-9}	n (Nano)

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man das Produkt der Potenzen bildet und die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man die Exponenten multipliziert.

Beispiel 4: Potenzieren

Berechnen Sie die Potenzterme

a) $(2^2)^3$ b) $(-3)^2$ c) -3^2

Lösung:

$$\text{a) } (2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = 64$$

$$\text{oder } (2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$$

$$\text{b) } (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9 \qquad \text{c) } -3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$$

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Potenzen mit der Basis 10 werden sehr häufig als verkürzte Schreibweise für sehr kleine oder sehr große Zahlen verwendet. Werte größer 1 können als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten, Werte kleiner 1 als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten dargestellt werden (Bild 2 und Tabelle 1).

Beispiel 5: Zehnerpotenzen

Schreiben Sie die Zehnerpotenzen

a) 20 μH b) 10 ml c) 3 kHz

Lösung:

a) $20 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ b) $10 \cdot 10^{-3} \ell$ c) $3 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

1.5 Wurzelgesetze

1.5.1 Wurzelbegriff

Das Wurzelziehen oder Radizieren (von lat. radix = Wurzel) ist die Umkehrung des Potenzierens. Beim Wurzelziehen wird derjenige Wurzelwert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt. Eine Wurzel besteht aus dem Wurzelzeichen, dem Radikanden unter dem Wurzelzeichen und dem Wurzelexponenten. Bei Quadratwurzeln darf der Wurzelexponent 2 weggelassen werden
 $\Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$.

Eine Wurzel kann auch in Potenzschreibweise dargestellt werden. Deshalb gelten bei Wurzeln auch alle Potenzgesetze.

Beispiel 1: Potenzschreibweise und Wurzelziehen

Der Wurzelterm $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$ ist

- a) in Potenzschreibweise darzustellen und
- b) der Wert der Wurzel zu bestimmen.

Lösung:

a) $\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4^1} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$ b) $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$; denn $2 \cdot 2 = 4$

$\sqrt[n]{a} = x; a \geq 0$	$\sqrt[m]{a^m} = a^m; a \geq 0$
n Wurzelexponent	a Radikand, Basis
x Wurzelwert	m, $\frac{m}{n}$ Exponent

Tabelle 1: Wurzelgesetze	
Regel	algebraischer Ausdruck
Addition und Subtraktion Wurzeln dürfen addiert und subtrahiert werden, wenn sie gleiche Exponenten und Radikanden haben.	$r \cdot \sqrt[n]{a} \pm s \cdot \sqrt[n]{a}$ $= (r \pm s) \cdot \sqrt[n]{a}$
Multiplikation Ist der Radikand ein Produkt, kann die Wurzel aus dem Produkt oder aus jedem Faktor gezogen werden.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Division Ist der Radikand ein Quotient, kann die Wurzel aus dem Quotienten oder aus Zähler und Nenner gezogen werden.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Potenzieren Beim Potenzieren einer Wurzel kann auch der Radikand potenziert werden.	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

1.5.2 Rechengesetze beim Wurzelrechnen

Addition und Subtraktion

Gleiche Wurzeln, die im Wurzelexponenten und im Radikand übereinstimmen, dürfen addiert und subtrahiert werden (Tabelle 1).

Beispiel 2: Addition und Subtraktion von Wurzeln

Die Wurzelterme $3\sqrt{a}, -2\sqrt[3]{b}, +2\sqrt{a}, +4\sqrt[3]{b}$ sind zusammenzufassen.

Lösung:

$$3\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b} + 2\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b} = (3 + 2)\sqrt{a} + (4 - 2)\sqrt[3]{b} = 5\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b}$$

Multiplikation und Division von Wurzeln

Ist beim Wurzelziehen der Radikand ein Produkt, so kann entweder aus dem Produkt oder aus jedem einzelnen Faktor die Wurzel gezogen werden. Bei einem Quotienten kann die Wurzel auch aus Zählerterm und Nennerterm gezogen werden (Tabelle 1).

Beispiel 3: Multiplikation und Division

Berechnen Sie aus den Wurzeltermen $\sqrt{9 \cdot 16}$ und $\sqrt{\frac{9}{16}}$ den Wert der Wurzel.

Lösung:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 \cdot 16} &= \sqrt{144} = 12 \\ \text{oder } \sqrt{9 \cdot 16} &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12 \\ \sqrt{\frac{9}{16}} &= 0,75 \\ \text{oder } \sqrt{\frac{9}{16}} &= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$

Bei der Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

gerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

ungerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Das Ergebnis einer Quadratwurzel ist immer positiv.

Beispiel 4: Zwei Lösungen

Warum müssen beim Wurzelterm $\sqrt[2]{a^2}$ zwei Fälle unterschieden werden?

Lösung:

$$\sqrt[2]{a^2} = |a|$$

Fall 1: **a für a > 0**

Fall 2: **-a für a < 0**

Beispiel 1: Für $|a| = 2$ gilt $\sqrt[2]{(-2)^2} = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2$

1.6 Binomische Formeln

Binomische Formeln finden Anwendung in der Algebra z. B. beim Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken und bei der Vereinfachung von Bruchtermen. Die Formeln lassen sich aus den Distributivgesetzen der Multiplikation herleiten. Der Begriff „Binom“ geht zurück auf die in den Klammertermen $(a + b)$, $(a - b)$ und $(a + b) \cdot (a - b)$ vorkommenden 2 (lat. *bi*) Variablen a und b .

1. Binomische Formel

Beispiel 1: Anwendung der 1. Binomischen Formel

Lösen Sie folgende Klammerterme auf:

a) $(3 + 6)^2$ b) $(x + 2)^2$ c) $(3x + 5y)^2$

Lösung:

a) $(3 + 6)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 + 6^2 = 81$

b) $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

c) $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (5y) + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$

Bild 1 veranschaulicht die 1. Binomische Formel: Die gesamte Quadratfläche $(a + b)^2$ setzt sich zusammen aus der roten und der gelben Quadratfläche $a^2 + b^2$ und den beiden grünen Rechteckflächen $2ab$, d. h. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. Binomische Formel

Beispiel 2: Anwendung der 2. Binomischen Formel

Lösen Sie folgende Klammertexte auf:

a) $(3a - 4)^2$ b) $(5u - 3v)^2$ c) $(\frac{2}{3}p - \frac{5}{4}q)^2$

Lösung:

a) $(3a - 4)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot (3a) \cdot 4 + 4^2 = 9a^2 - 24a + 16$

b) $(5u - 3v)^2 = (5u)^2 - 2 \cdot (5u) \cdot (3v) + (3v)^2 = 25u^2 - 30uv + 9v^2$

c) $(\frac{2}{3}p - \frac{5}{4}q)^2 = (\frac{2}{3}p)^2 - 2 \cdot (\frac{2}{3}p) \cdot (\frac{5}{4}q) + (\frac{5}{4}q)^2 = \frac{4}{9}p^2 + \frac{5}{3}pq + \frac{25}{16}q^2$

Bild 2 veranschaulicht die 2. Binomische Formel: Zieht man von der gesamten Quadratfläche a^2 die beiden Rechteckflächen $2(a - b)b$ und die gelbe Quadratfläche b^2 ab, verbleibt die rote Quadratfläche $(a - b)^2$, d. h.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2(a - b)b - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel

Bild 3 veranschaulicht die 3. Binomische Formel: Die blaue Differenzfläche $a^2 - b^2$ im linken Teil der Grafik setzt sich aus 2 gleichgroßen Trapezflächen zusam-

1. Binomische Formel (Plus-Formel):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Binomische Formel (Minus-Formel):

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel (Plus-Minus-Formel):

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

a, b Variable ($a, b \in \mathbb{R}$)

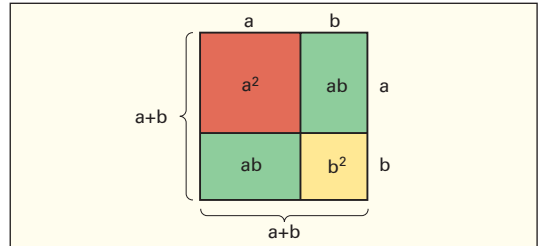


Bild 1: 1. Binomische Formel

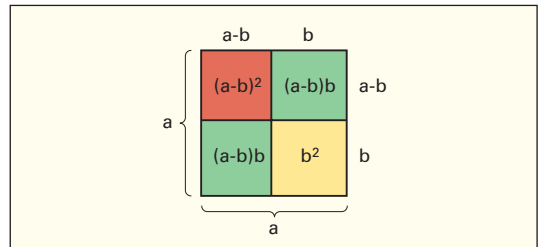


Bild 2: 2. Binomische Formel

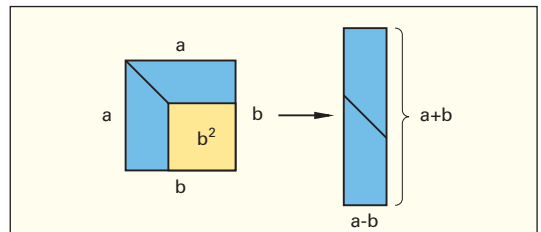


Bild 3: 3. Binomische Formel

Beispiel 3: Anwendung der 3. Binomischen Formel

Lösen Sie folgende Klammerterme auf:

a) $(3a + 4) \cdot (3a - 4)$ b) $(7q + 5a) \cdot (7q - 5a)$

c) $(5e - 6f) \cdot (5e + 6f)$

Lösung:

a) $(3a + 4) \cdot (3a - 4) = (3a)^2 - 4^2 = 9a^2 - 16$

b) $(7q + 5a) \cdot (7q - 5a) = (7q)^2 - (5a)^2 = 49q^2 - 25a^2$

c) $(5e - 6f) \cdot (5e + 6f) = (5e + 6f) \cdot (5e - 6f) = (5e)^2 - (6f)^2 = 25e^2 - 36f^2$

men, die auch zu einer Rechteckfläche $(a + b) \cdot (a - b)$ angeordnet werden können, d. h. $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

1.6 Binomische Formeln

So wie für $(a + b)^2$ lassen sich auch für $(a + b)^3$ und höhere Potenzen binomische Formeln herleiten.

Binomischer Lehrsatz

Beispiel 1: Binomische Formel für $(a + b)^3$

Lösen Sie mithilfe der 1. binomischen Formel $(a + b)^3$ auf.

Lösung:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Nachfolgend sind einige binomische Formeln aufgelistet:

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

⋮ ⋮

Der Exponent (Hochzahl) der a-Potenzen fällt von einem Glied zum nächsten, während der Exponent der b-Potenzen wächst, wobei die Summe beider Exponenten konstant bleibt. Am Beispiel von $(a+b)^4$ heiße das: die Summe beider Exponenten ist 4 in jedem Glied (beachte, a^4 kann man sich auch geschrieben denken als a^4b^0 und b^4 als a^0b^4). Die blau markierten Zahlen heißen **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (gelesen n ber k); n steht fur den Grad der Potenz und k ($0 \leq k \leq n$) fur das betreffende Glied der Reihe. Damit lässt sich die binomische Formel z.B. fur $n = 4$ auch in der Form schreiben (**Binomischer Lehrsatz**):

$$(a + b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

Beispiel 2: Binominalkoeffizienten berechnen

Berechnen Sie die ersten 3 Koeffizienten von $(a + b)^4$.

Lösung:

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0! \cdot (4-0)!} = \frac{24}{1 \cdot 24} = 1, \quad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{24}{1 \cdot 6} = 4, \quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Beispiel 3: Binominalkoeffizienten berechnen und Formel aufstellen

Stellen Sie analog zu $n = 4$ den Binomischen Lehrsatz fur $n = 5$ auf.

Lösung:

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}a^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \text{ fur } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$$

$$0! = 1; 1! = 1$$

Binominalkoeffizienten ($n, k \in \mathbb{N}; k \leq n$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

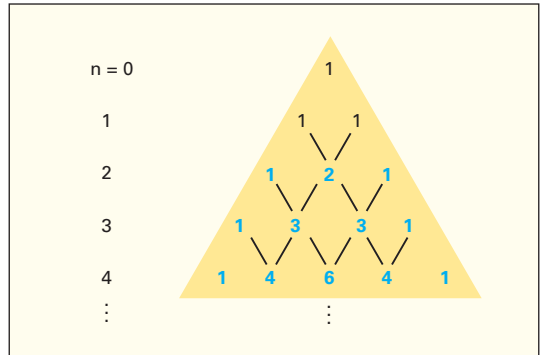


Bild 1: Pascal'sches Dreieck

Pascal'sches Dreieck

Ordnet man, beginnend mit

$$(a + b)^0 = 1 \text{ und } (a + b)^1 = 1a + 1b,$$

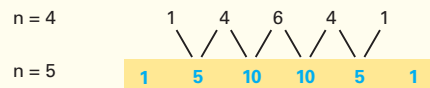
die Koeffizienten dreieckformig untereinander an, entsteht das **Pascal'sche Dreieck** (Bild 1). Die Zahlen einer jeden Zeile erhält man, indem die zwei benachbarten Zahlen der daruber stehenden Zeile addiert werden. Auf diese Weise lässt sich das Dreieck Zeile um Zeile erweitern, ohne auf Berechnungsformeln zurückgreifen zu müssen. Dieses Hilfsmittel stellt somit eine „formelfreie“ Alternative zur algebraischen Bestimmung der Binomialkoeffizienten dar.

Beispiel 4: Pascal'sches Dreieck fortsetzen

Stellen Sie die Koeffizientenzeile fur $n = 5$ (Bild 1) dar und vergleichen Sie das Ergebnis mit Beispiel 3.

Lösung:

Ausgehend von der Zeile fur $n = 4$, gelangt man gemäß des oben beschriebenen Bildungsprinzips zur Folgezeile fur $n = 5$:



Diese Werte stimmen mit den in Beispiel 3 berechneten Binomialkoeffizienten überein.

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

- Leiten Sie die ersten beiden binomischen Formeln aus dem Distributivgesetz der Multiplikation her.
- Lösen Sie mithilfe der binomischen Formeln die Klammern auf und fassen Sie dann zusammen.
 - $-3(a+b)^2 + 6ab$; **b)** $(a+b)^2 - (a-b)^2 - 3ab$
 - $(5u+3v)(5u-3v) - 24u^2 + 8v^2$
 - $4(a+3)(a+1)(a-3) + 36(a+1)$
- Faktorisieren Sie, d. h. wandeln Sie Summen oder Differenzen in Produkte um (Binomische Formeln rückwärts).
 - $4x^2 + 12xy + 9y^2$ **b)** $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{5}ab + \frac{1}{25}b^2$
 - $3x^2 + 12x + 12$ **d)** $9p^2 - 42pq + 49q^2$
 - $\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{3}pq + \frac{1}{9}q^2$ **f)** $20v^2 - 60vw + 45w^2$
 - $64x^2 - 144y^2$ **h)** $\frac{9}{16}u^2 - \frac{1}{25}v^2$
 - $7a^2 - 63b^2$
- Vereinfachen Sie soweit wie möglich durch Ausklammern, Produktbildung und Kürzen.
 - $\frac{x^2 + 10x + 25}{3x + 15}$ **b)** $\frac{2x^2 - 24xy + 72y^2}{8x - 48y}$
 - $\frac{(x-1)^2}{x^2 - 1}$ **d)** $\frac{u^2 - 9v^2}{u^2 + 6uv + 9v^2}$
 - $\frac{4a^2 - 28ab + 49b^2}{4ab - 14b^2}$ **f)** $\frac{ax + bx + ay + by}{x^2 - y^2}$
- Leiten Sie Binomische Formeln her für
 - $(a-b)^3$
 - $(a-b)^4$

Hinweis: Verwenden Sie die bereits bekannten Binomischen Formeln für $(a+b)^3$ und $(a+b)^4$ (**vorhergehende Seite**) und ersetzen Sie hierin b durch $(-b)$.

- Lösen Sie mithilfe des Binomischen Lehrsatzes die Klammerterme auf:
 - $(3x+2)^4$ **b)** $(x-2y)^4$ **c)** $(x-y)^5$

Lösungen:

- Erste Binomische Formel:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Zweite Binomische Formel:

$$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = (a+(-b)) \cdot (a+(-b))$$

$$= a \cdot a + a \cdot (-b) + (-b) \cdot a + (-b) \cdot (-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Fortsetzung Lösungen:

- $-3a^2 - 3b^2$; **b)** ab ; **c)** $u^2 - v^2$; **d)** $4a^3 + 4a^2$
- $(2x+3y)^2$; **b)** $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{5}b)^2$; **c)** $3(x+2)^2$
 - $(3p-7q)^2$; **e)** $(\frac{1}{2}p - \frac{1}{3}q)^2$; **f)** $5(2v-3w)^2$
 - $(8x+12y)(8x-12y)$; **h)** $(\frac{3}{4}u + \frac{1}{5}v)(\frac{3}{4}u - \frac{1}{5}v)$
 - $7(a+3b)(a-3b)$
- $\frac{x^2 + 10x + 25}{3x + 15} = \frac{(x+5)^2}{3(x+5)} = \frac{1}{3}(x+5)$
 - $\frac{2x^2 - 24xy + 72y^2}{8x - 48y} = \frac{2(x^2 - 12xy + 36y^2)}{8(x-6y)} = \frac{1}{4}(x-6y)$
 - $\frac{(x-1)^2}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-1}{x+1}$
 - $\frac{u^2 - 9v^2}{u^2 + 6uv + 9v^2} = \frac{(u+3v) \cdot (u-3v)}{(u+3v)^2} = \frac{u-3v}{u+3v}$
 - $\frac{4a^2 - 28ab + 49b^2}{4ab - 14b^2} = \frac{(2a-7b)^2}{2b(2a-7b)} = \frac{2a-7b}{2b}$
 - $\frac{ax + bx + ay + by}{x^2 - y^2} = \frac{(a+b)x + (a+b)y}{(x+y)(x-y)} = \frac{a+b}{x-y}$
- $(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 - $(a-b)^4 = a^4 + 4a^3(-b) + 6a^2(-b)^2 + 4a(-b)^3 + (-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
- $$(3x+2)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4 + \binom{4}{1}(3x)^3 \cdot 2 + \binom{4}{2}(3x)^2 \cdot 2^2$$

$$+ \binom{4}{3}(3x) \cdot 2^3 + \binom{4}{4}2^4$$

$$= 81x^4 + 4 \cdot 27x^3 \cdot 2 + 6 \cdot 9x^2 \cdot 4 + 4 \cdot 3x \cdot 8 + 16$$

$$= 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$$
 - $$(x-2y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(-2y) + \binom{4}{2}x^2(-2y)^2$$

$$+ \binom{4}{3}x(-2y)^3 + \binom{4}{4}(-2y)^4$$

$$= x^4 - 4x^3 \cdot 2y + 6x^2 \cdot 4y^2 - 4x \cdot 8y^3 + 16y^4$$

$$= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$$
 - $$(x-y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(-y) + \binom{5}{2}x^3(-y)^2$$

$$+ \binom{5}{3}x^2(-y)^3 + \binom{5}{4}x(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5$$

$$= x^5 + 5x^4(-y) + 10x^3(-y)^2 + 10x^2(-y)^3$$

$$+ 5x(-y)^4 + (-y)^5$$

$$= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

1.7 Logarithmengesetze

1.7.1 Logarithmusbegriff

Der Logarithmus (von griech. logos = Verhältnis und arithmos = Zahl) ist der Exponent (Hochzahl), mit der man die Basis (Grundzahl) a potenzieren muss, um den Numerus (Potenzwert, Zahl) zu erhalten.

Einen Logarithmus berechnen heißt den Exponenten (Hochzahl) einer bestimmten Potenz zu berechnen.

Für das Wort Exponent wurde der Begriff Logarithmus eingeführt.

Beispiel 1: Logarithmus

Suchen Sie in der Gleichung $2^x = 8$ die Hochzahl x , sodass die Gleichung eine wahre Aussage ergibt.

Lösung:

$$2^x = 8; 2^3 = 8; \Rightarrow x = 3$$

Die Sprechweise lautet: x ist der Exponent zur Basis 2, der zum Potenzwert 8 führt.

Die Schreibweise lautet: $x = \log_2 8 = 3$

1.7.2 Rechengesetze beim Logarithmus

Die Logarithmengesetze ergeben sich aus den Potenzgesetzen und sind für alle definierten Basen gültig (**Tabelle 1**).

Mit dem Taschenrechner können Sie den Logarithmus zur Basis 10 und zur Basis e bestimmen. Dabei wird \log_{10} mit \log und \log_e mit \ln abgekürzt (**Tabelle 2**).

Multiplikation

Wird von einem Produkt der Logarithmus gesucht, so ist dies gleich der Summe der einzelnen Faktoren.

Beispiel 2: $\log_{10} 1000$

Bestimmen Sie den Logarithmus von 1000 zur Basis 10

- mit dem Taschenrechner und
- interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

a) Eingabe: 1000 log oder log 1000 (taschenrechnerabhängig)

$$\text{Anzeige: } 3 \Rightarrow \log_{10} 1000 = 3$$

Wird der Wert 1000 faktorisiert, z. B. in $10 \cdot 100$, gilt Folgendes: $\log_{10} 1000 = \log_{10} (10 \cdot 100)$

$$= \log_{10} 10 + \log_{10} 100 = 1 + 2 = 3$$

b) $\log_{10} 1000 = 3$, denn $10^3 = 1000$

Quotient

Wird von einem Quotienten der Logarithmus gesucht, so ist dies gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.

Bei der Berechnung eines Logarithmus kann die Eingabe der Gleichung, abhängig vom Taschenrechner, unterschiedlich sein.

$$x = \log_a b$$

x Logarithmus (Hochzahl)
 b Numerus (Zahl)

$$a^x = b$$

a Basis; $a > 0$

Tabelle 1: Logarithmengesetze

Regel	algebraischer Ausdruck
Produkt Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.	$\log_a (u \cdot v)$ $= \log_a u + \log_a v$
Quotient Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.	$\log_a \left(\frac{u}{v}\right)$ $= \log_a u - \log_a v$
Potenz Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Potenzbasis.	$\log_a u^v = v \cdot \log_a u$

Tabelle 2: Spezielle Logarithmen

Basis	Art	Schreibweise	Taschenrechner
10	Zehnerlogarithmus	$\log_{10}; \lg$	log-Taste
e	Natürlicher Logarithmus	$\log_e; \ln$	ln-Taste
2	Binärer Logarithmus	$\log_2; \lg$	—

Beispiel 3: Division

Berechnen Sie $\log_{10} \left(\frac{10}{100}\right)$ mit dem Taschenrechner.

$$\text{Lösung: } \log_{10} \left(\frac{10}{100}\right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 100$$

Eingabe: 10 log - 100 log =

Anzeige: 1 2 -1

$$\Rightarrow \log_{10} 10 - \log_{10} 100 = 1 - 2 = -1$$

oder durch Ausrechnen des Numerus $\left(\frac{10}{100}\right) = 0,1$

Eingabe: 0,1 log

Anzeige: -1

$$\Rightarrow \log_{10} 0,1 = -1$$

Potenz

Soll der Logarithmus von einer Potenz genommen werden, so gibt es die Möglichkeit, die Potenz zu berechnen und dann den Logarithmus zu nehmen oder das Rechengesetz für Logarithmen anzuwenden und dann die Berechnung durchzuführen.

Beispiel 1: Berechnung einer Potenz

Berechnen Sie den Logarithmus der Potenz 10^2 zur Basis 10

- durch Ausrechnen der Potenz und
- durch Anwendung der Rechengesetze für Logarithmen.

Lösung:

a) $\log_{10} 10^2 = \log_{10} 100 = 2$

b) $\log_{10} 10^2 = 2 \cdot \log_{10} 10 = 2 \cdot 1 = 2$

Beispiel 2: Berechnung einer Wurzel

Der Logarithmustrm $\log_{10} \sqrt[3]{1000}$ ist zu berechnen

- in Wurzelschreibweise,
- in Potenzschreibweise.

Lösung:

$\sqrt[3]{1000} = 10 \Rightarrow \log_{10} \sqrt[3]{1000} = \log_{10} 10 = 1$ oder

$\log_{10} \sqrt[3]{1000}$ kann umgeformt werden in $\log_{10} (1000)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow \log_{10} \sqrt[3]{1000} = \log_{10} (1000)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_{10} 1000$

$= \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$

1.7.3 Basisumrechnung beim Logarithmus

Der Taschenrechner bietet zur Berechnung der Logarithmen nur die Basis 10 ($\log_{10} = \log$) und die Basis e ($\log_e = \ln$) an.

In der Physik oder Technik sind jedoch andere Basen erforderlich. Um Berechnungen mit dem Taschenrechner durchführen zu können, muss die Basis so umgeformt werden, dass Lösungen mit log oder ln möglich sind.

Beispiel 3: Logarithmus mit der Basis 2

Berechnen Sie $\log_2 8$ mit dem Taschenrechner.

Lösung:

Die Berechnung kann a) mit log oder b) mit ln durchgeführt werden.

a) $\log_2 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} = \frac{\log 8}{\log 2}$

Eingabe: z. B. $8 \log$: $2 \log$ =

Anzeige: $0,903089987$ $0,301029995$ 3

$\Rightarrow \log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{0,90309}{0,30103} = 3$

b) $\log_2 8 = \frac{\log_e 8}{\log_e 2} = \frac{\ln 8}{\ln 2}$

Eingabe: z. B. $8 \ln$: $2 \ln$ =

Anzeige: $2,07944154$ $0,69314718$ 3

$\Rightarrow \log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{2,07944154}{0,69314718} = 3$

$$\log_a b = \frac{\log_u b}{\log_u a}$$

a, u Basen

a, b Numerus (Zahl)

Bei der Basisumrechnung können die Basen der Logarithmen auf dem Taschenrechner verwendet werden. Es gilt:

$$\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_e b}{\log_e a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Aufgaben:

- Die Gleichungen $x = \log_a b$ und $b = a^x$ sind gleichwertig. Geben Sie in der **Tabelle 1** für die Aufgaben a) bis d) jeweils die gleichwertige Beziehung und die Lösung an.

Tabelle 1: Gleichwertigkeit und Lösung

	$x = \log_2 8$	$8 = 2^x$	$8 = 2^3$	$x = 3$
a)	$x = \log_2 32$			
b)	$x = \log_2 \sqrt{2}$			
c)		$81 = 3^x$		
d)		$10^{-3} = 10^x$		

- Geben Sie den Logarithmus an und überprüfen Sie die Ergebnisse durch Potenzieren.
a) $\log_{10} 1$ b) $\log_{10} 10$ c) $\log_e 1$ d) $\log_3 \frac{1}{27}$
- Zerlegen Sie die Logarithmenterme nach den gültigen Logarithmengesetzen.
a) $\log_a (3 \cdot u)$ b) $\log_a \frac{1}{u}$ c) $\log_a \frac{u^3}{\sqrt{2}}$
- Berechnen Sie mit dem Taschenrechner:
a) $\log 16$ b) $\log 111$ c) $\log 8^2$ d) $\log \sqrt{100}$
e) $\ln 16$ f) $\ln 111$ g) $2 \cdot \ln 8$ h) $\ln 8^2$
- Mit dem Taschenrechner sind zu berechnen:
a) $\log_2 12$ b) $\log_3 12$ c) $\log_4 12$ d) $\log_5 12$

Lösungen:

- a) $32 = 2^x$; $x = 5$ b) $\sqrt{2} = 2^x$; $x = \frac{1}{2}$
c) $x = \log_3 81$; $x = 4$ d) $x = \log_{10} 10^{-3}$; $x = -3$
- a) 0, denn $10^0 = 1$ b) 1, denn $10^1 = 10$
c) 0, denn $e^0 = 1$ d) -3, denn $3^{-3} = \frac{1}{27}$
- a) $\log_a 3 + \log_a u$
b) $-\log_a u$
c) $3 \cdot \log_a u - 2 \cdot \log_a v$
- a) 1,204 12 b) 2,045 32 c) 1,806 18 d) 1
e) 2,772 59 f) 4,709 53 g) 4,158 88 h) 4,158 88
- a) 3,584 96 b) 2,261 86 c) 1,792 48 d) 1,543 9

1.8 Mengen

1.8.1 Mengen und ihre Elemente

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Elementen zu einem Ganzen. Mengen werden in beschreibender, aufzählender Form oder graphisch mithilfe von Mengenbildern (Venn-Diagramm) angegeben.

Mengen werden mit großen Buchstaben, z.B. A, B, ..., Z, bezeichnet, die Elemente von Mengen mit kleinen Buchstaben z.B. a, b, ..., z.

Beispiel 1:

Stellen Sie die Menge A mit den Elementen a, b, c in expliziter aufzählender Form und als Mengenbild dar.

Lösung: **Bild 1**

Bei der expliziten Darstellung der Elemente ist die Reihenfolge beliebig. Für die Darstellung der Verknüpfung werden Mengenoperatoren verwendet (**Tabelle 1**).

Für die aufzählende Form wird auch die implizite Darstellung verwendet.

Beispiel 2:

Stellen Sie die Menge K mit den Elementen 2, 4, 6, 8 in impliziter aufzählender Form dar.

Lösung:

$K = \{ x \mid x \text{ ist gerade, eine natürliche Zahl und } x < 10 \}$

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt Mächtigkeit oder Kardinalität und wird mit $|M|$ bezeichnet (**Tabelle 2**). Die leere Menge hat die Kardinalität 0. Mehrfach dargestellte Elemente werden nur je einmal gezählt.

Eine leere Menge enthält keine Elemente.

1.8.2 Beziehungen zwischen Mengen

Teilmengen

A ist eine Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist (Bild 2). A ist eine echte Teilmenge von B, wenn A Teilmenge von B, aber von B verschieden. B enthält mindestens ein Element, das nicht in A enthalten ist.

Beispiel 3:

Enthält die Menge B in **Bild 2** die Teilmenge A?

Lösung:

$A = \{ b, d \}$, $B = \{ a, b, c, d, e \}$ somit gilt $A \subset B$

Gleichheit von Mengen

Es gilt $A = B$, wenn die Mengen $A = \{ 5, 6, 7 \}$ und $B = \{ 5, 6, 7 \}$ die gleichen Elemente haben.

„Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“.

Georg Cantor, Begründer der Mengenlehre
(1845 bis 1918)

G Grundmenge

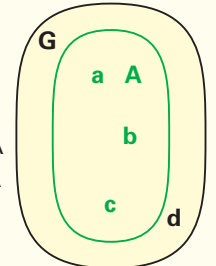
$A = \{ a, b, c \}$

a ist Element von $A \Rightarrow a \in A$

b ist Element von $A \Rightarrow b \in A$

c ist Element von $A \Rightarrow c \in A$

d ist nicht Element von $A \Rightarrow d \notin A$



Venn-Diagramm

Bild 1: Mengendarstellung in aufzählender Form und als Venn-Diagramm

Tabelle 1: Relationale Mengen-Operatoren

Operator	Beispiel	Erklärung
\subset	$A \subset B$	A ist Teilmenge von B
$\not\subset$	$A \not\subset B$	A ist nicht Teilmenge von B
\subseteq	$A \subseteq B$	A ist unechte Teilmenge von B
$=$	$A = B$	Mengen A und B sind gleich
\in	$a \in A$	a ist Element von A
\notin	$d \notin A$	d ist nicht Element von A

Tabelle 2: Begriffe aus der Mengenlehre

Begriff	Bedeutung	Beispiel
Mächtigkeit, Kardinalität	Anzahl der Elemente	$M = \{1,2,3\}$ $\Rightarrow M = 3$
Leere Menge	Kardinalität 0	$ M = 0$
Mehrfach dargestellte Elemente	Elemente werden nur einfach gezählt	$ M = \{1,2,1,4,2,7\} = 4$

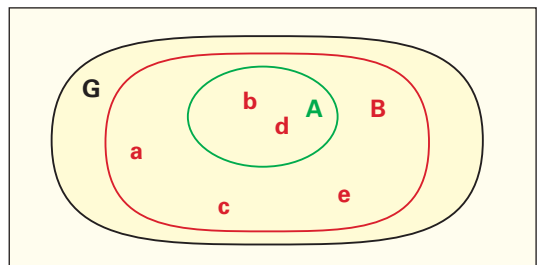


Bild 2: Echte Teilmenge A der Menge B

1.8.3. Verknüpfung mit Mengen

Das Verknüpfen von Mengen mit Operatoren (**Tabelle 1**) wird zum Veranschaulichen von Strukturen, z. B. Zusammenfassungen oder Einteilungen verwendet.

Schnittmenge

Die Schnittmenge C der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A und zu B gehören (**Bild 1**).

$$C = A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}_G$$

Beispiel 1:

Welche Schnittmenge C bilden die Menge $A = \{2, 5, 6, 7, 9\}$ und die Menge $B = \{3, 5, 6, 7, 9\}$?

Lösung: $C = A \cap B = \{5, 6, 7, 9\}$.

Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge C der beiden Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A oder zu B gehören (**Bild 2**).

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}_G$$

Beispiel 2:

Welche Vereinigungsmenge C bilden die Menge $A = \{1, 2, 5, 6\}$ und die Menge $B = \{3, 5, 6, 7, 9\}$?

Lösung: $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$.

Differenzmenge, Restmenge

Die Differenzmenge C ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören (**Bild 3**).

$$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}_G$$

Beispiel 3:

Welche Differenzmenge C bilden die Menge $A = \{1, 2, 4\}$ und die Menge $B = \{2, 3\}$?

Lösung: $C = A \setminus B = \{1, 4\}$.

Produktmenge

Auch als kartesisches Produkt oder Paarmenge bezeichnet.

Die Produktmenge $C = A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) die aus den Mengen A und B bildbar sind (**Bild 4**).

$$C = A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}_G$$

Beispiel 4:

Welche Paarmenge C bilden die Mengen $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$?

Lösung: $C = A \times B = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (2, 3)\}$.

Paarmengen werden oft in Koordinatensystemen dargestellt.

Tabelle 1: Verknüpfungs-Operatoren für Mengen		
Operator	Beispiel	Erklärung, Bedeutung
\cap	$C = A \cap B$	C ist die Schnittmenge von A und B.
\cup	$C = A \cup B$	C ist die Vereinigungsmenge von A und B
\setminus	$C = A \setminus B$	C ist die Differenzmenge von A und B
\times	$C = A \times B$	C ist die Produktmenge von A und B
logische Operatoren: \wedge Und, \vee Oder		

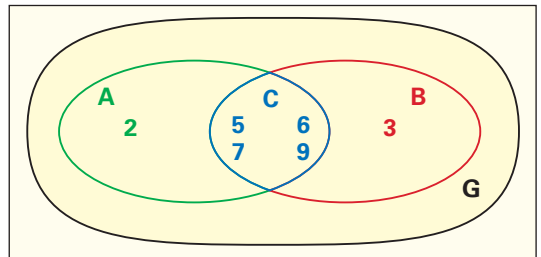


Bild 1: Schnittmenge $C = A \cap B$

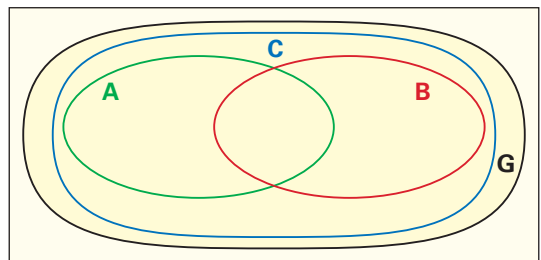


Bild 2: Vereinigungsmenge $C = A \cup B$

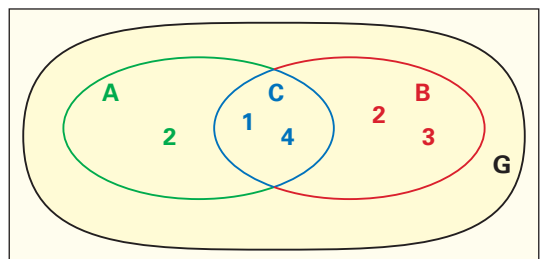


Bild 3: Differenzmenge $C = A \setminus B$

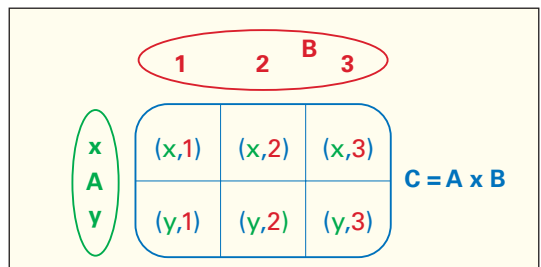


Bild 4: Produktmenge $C = A \times B$