Elektrotechnik für Ingenieure - Formelsammlung

Elektrotechnik kompakt

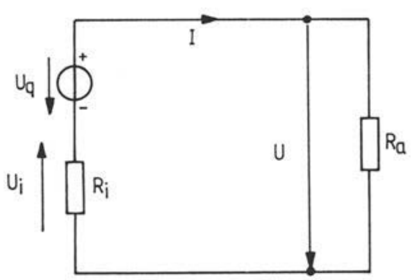
Bearbeitet von
Wilfried Weißgerber

5. Auflage 2015. Buch. XV, 204 S. Kartoniert
ISBN 978 3 658 09089 0
Format (B x L): 16,9 x 24,1 cm
Gewicht: 396 g

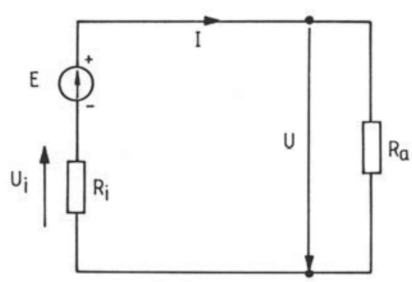
2 Gleichstromtechnik

2.1 Der unverzweigte Stromkreis

2.1.1 Der Grundstromkreis (Band 1, S.27-31)



Grundstromkreis mit Quellspannung U_q



Grundstromkreis mit EMK E

$$U_q = U + U_i \qquad\qquad E = U + U_i$$

normaler Betriebsfall mit $0 < R_a < \infty$

$$I = \frac{U_q}{R_a + R_i} \qquad\qquad I = \frac{E}{R_a + R_i}$$

Kurzschluss: $R_a = 0$ mit $U = 0$

$$I_k = \frac{U_q}{R_i} \qquad\qquad I_k = \frac{E}{R_i}$$

Leerlauf: $R_a = \infty$ mit $I = 0$

$$U_l = U_q \qquad\qquad U_l = E$$

Anpassung: $R_a = R_i$

$$I = \frac{1}{2} I_k \qquad\qquad I = \frac{1}{2} I_k$$

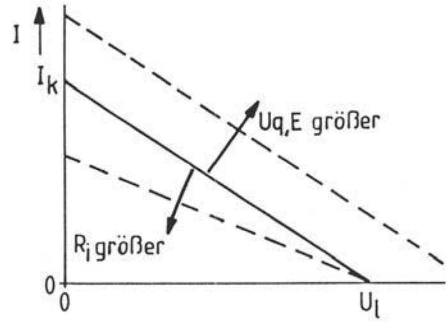
$$U = \frac{1}{2} U_l \qquad\qquad U = \frac{1}{2} U_l$$

W. Weißgerber, *Elektrotechnik für Ingenieure - Formelsammlung*, DOI 10.1007/978-3-658-09090-6_2

Kennlinien des Grundstromkreises:

Kennlinie des aktiven Zweipols

$$\frac{U}{U_l}+\frac{I}{I_k}=1$$



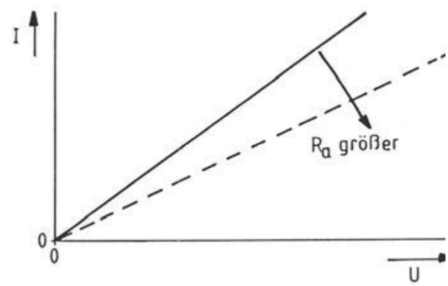
Kennlinie des passiven Zweipols

linearer Widerstand

$U = R_a \cdot I \qquad I = \frac{1}{R_a} U$

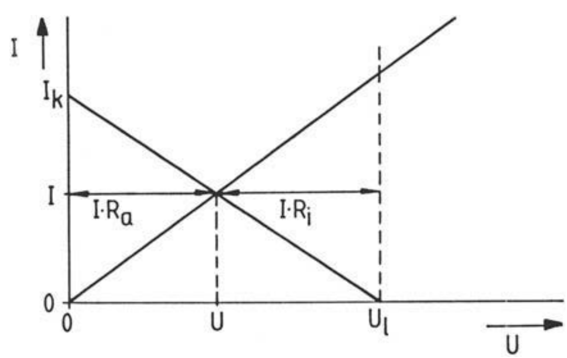
nichtlinearer Widerstand

$U = f(I) \qquad I = f(U)$



Überlagerung der Kennlinien des aktiven und passiven Zweipols

Werden aktiver und passiver Zweipol zusammengeschaltet, dann stellt sich nur ein Strom I und nur eine Klemmenspannung U ein. Diese Größen ergeben sich durch Überlagerung der Kennlinien des aktiven und passiven Zweipols, indem im Schnittpunkt (genannt Arbeitspunkt) die Größen abgelesen werden.



Aus den überlagerten Kennlinien lassen sich die Spannungen am Außenwiderstand und Innenwiderstand abgreifen.

2.1.2 Zählpfeilsysteme (Band 1, S.31,32)

Im *Verbraucherzählpfeilsystem* (VZS-System) werden die im Verbraucher (Widerstand) definierten Strom- und Spannungsrichtungen zugrunde gelegt:

2.1.3 Die Reihenschaltung von Widerständen (Band 1, S.33,34)

$U = U_1 + U_2 + ... + U_n$

$U = I \cdot (R_1 + R_2 + ... + R_n)$

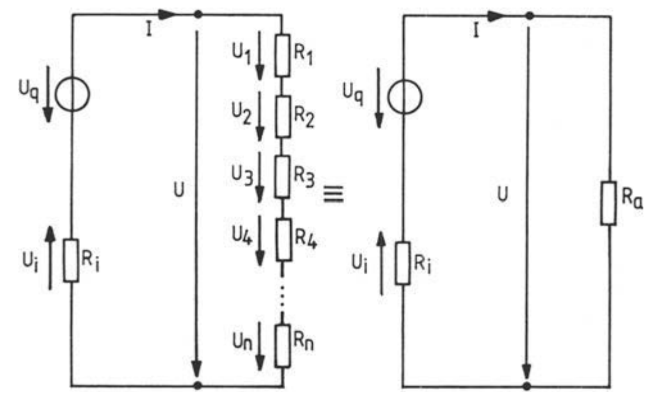
$$U = \sum_{v=1}^{n} U_v = I \cdot \sum_{v=1}^{n} R_v$$

$U = I \cdot R_a$

$$R_a = \sum_{v=1}^{n} R_v$$

oder

$$\frac{1}{G_a} = \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{G_v}$$



Ersatzschaltung eines Stromkreises mit n in Reihe geschalteten ohmschen Widerständen

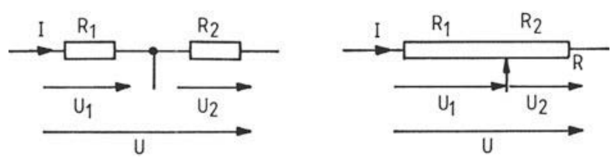
2.1.4 Anwendungen der Reihenschaltung von Widerständen (Band 1, S.34,35)

unbelasteter Spannungsteiler

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R}$$

Potentiometer



Ausführungen unbelasteter Spannungsteiler

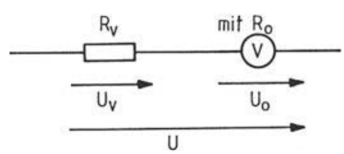
Spannungsteilerregel

Die Spannungen über zwei vom gleichen Strom durchflossenen Widerständen verhalten sich wie die zugehörigen Widerstandswerte.

Messbereichserweiterung eines Spannungsmessers

$R_v = (p - 1) \cdot R_0.$

mit $p = \dfrac{U}{U_0}$



2.1.5 Die Reihenschaltung von Spannungsquellen (Band 1, S.35,36)

Die Ersatz-Quellspannung $U_{q\ ers}$ bzw. die Ersatz-EMK E_{ers} berücksichtigt alle $U_{q\nu}$ bzw. E_ν, die in gleicher Richtung wirken, positiv und die entgegengesetzt wirken, negativ.

Der Ersatz-Innenwiderstand $R_{i\ ers}$ ist gleich der Summe aller Innenwiderstände $R_{i\nu}$.

2.2 Der verzweigte Stromkreis

2.2.1 Die Maschenregel (Der 2. Kirchhoffsche Satz) (Band 1, S.37,38)

Zur Ermittlung der Spannungsgleichungen in einem verzweigten Stromkreis werden beliebige Maschenumläufe gewählt, für die die *Maschenregel* gilt:

Beim Umlauf einer Masche ist die Summe aller vorzeichenbehafteten Spannungen (Quellspannungen und Spannungen an Widerständen) in einer Masche gleich Null:

$$\sum_{i=1}^{l} U_i = 0 \qquad (2.38)$$

Wird mit Quellspannungen gerechnet, dann wird jede Masche nur einmal durchlaufen.

Beim Umlauf einer Masche ist die Summe der vorzeichenbehafteten EMK E gleich der Summe der vorzeichenbehafteten Spannungsabfälle an den Widerständen:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{m} U_i . \qquad (2.39)$$

Wird mit EMK E gerechnet, muss jede Masche zweimal durchlaufen werden, einmal für die EMK und einmal für die Spannungsabfälle.

Vorzeichenbehaftet bedeutet, dass alle in der gewählten Umlaufrichtung liegenden Spannungen und EMK positiv und dass alle entgegengesetzt gerichteten Spannungen und EMK negativ in der Maschengleichung berücksichtigt werden.

2.2.2 Die Knotenpunktregel (Der 1. Kirchhoffsche Satz) (Band 1, S.39)

Treffen sich mehrere stromdurchflossene Leiter in einem Knotenpunkt, so gilt die *Knotenpunktregel:*

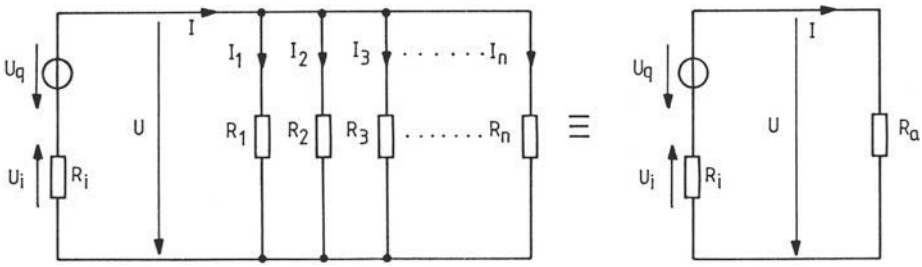
Die Summe aller vorzeichenbehafteten Ströme eines Knotenpunktes ist Null; vorzeichenbehaftet bedeutet, dass die zum Knotenpunkt hinfließenden Ströme positiv und die von ihm wegfließenden Ströme negativ gezählt werden oder umgekehrt:

$$\sum_{i=1}^{l} I_i = 0 \qquad (2.40)$$

Die Summe der zum Knotenpunkt hinfließenden Ströme ist gleich der Summe der vom Knotenpunkt wegfließenden Ströme:

$$\underset{\underset{\uparrow}{\bullet}}{\sum_{i=1}^{n}} I_i = \underset{\underset{\downarrow}{\bullet}}{\sum_{i=1}^{m}} I_i . \qquad (2.41)$$

2.2.3 Die Parallelschaltung von Widerständen (Band 1, S.39,40)



Ersatzschaltung eines Stromkreises mit n parallel geschalteten ohmschen Widerständen

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n} \right) = U \cdot (G_1 + G_2 + G_3 + ... + G_n)$$

$$I = \sum_{v=1}^{n} I_v = U \cdot \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{R_v} = U \cdot \sum_{v=1}^{n} G_v$$

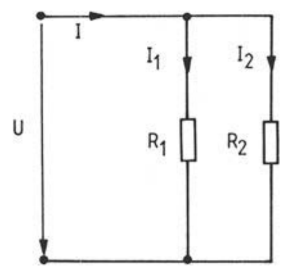
$$G_a = G_1 + G_2 + G_3 + ... + G_n = \sum_{v=1}^{n} G_v \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{R_v}$$

2.2.4 Anwendungen der Parallelschaltung von Widerständen (Band 1, S.41,42)

Stromteiler

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{I_2}{I} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$



Stromteilerregel

Ein Stromteiler besteht aus zwei parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2 , an denen die gleiche Spannung anliegt.

In parallelen Zweigen mit ohmschen Widerständen sind die Teilströme proportional den Zweigleitwerten und umgekehrt proportional den entsprechenden Zweigwiderständen.

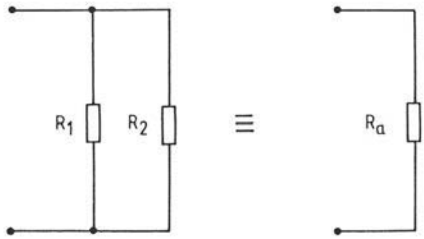
Für zwei parallel geschaltete Widerstände gilt die Regel:

Der Teilstrom verhält sich zum Gesamtstrom wie der Widerstand, der nicht vom Teilstrom durchflossen ist, zum Ringwiderstand der Parallelschaltung. Der Ringwiderstand bedeutet der Widerstand der Reihenschaltung der beiden Widerstände, nicht der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung:

$$\frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{und} \quad \frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Ersatzwiderstand von zwei parallel geschalteten Widerständen

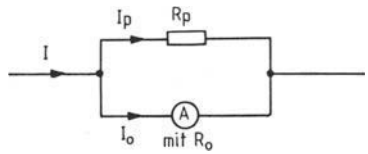
$$R_a = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$



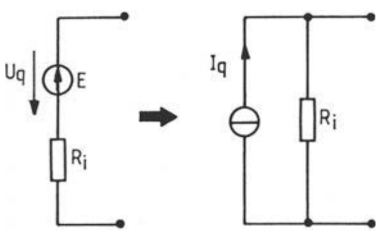
Messbereichserweiterung eines Strommessers

$$R_p = \frac{R_0}{p-1} \qquad \text{mit} \qquad p = \frac{I}{I_0}$$

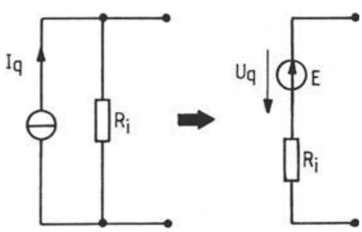
$G_p = (p - 1) \cdot G_0$.



2.2.5 Ersatzspannungsquelle und Ersatzstromquelle (Band 1, S.44-46)



$$I_q = \frac{U_q}{R_i} \qquad \text{bzw.} \qquad I_q = \frac{E}{R_i}$$



$$U_q = I_q \cdot R_i \qquad \text{bzw.} \qquad E = I_q \cdot R_i$$

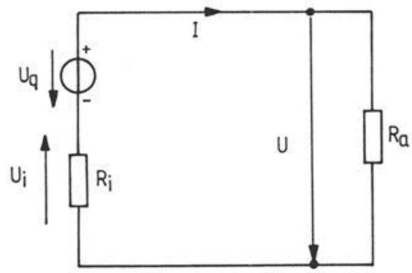
normaler Belastungsfall

für Grundstromkreis mit Ersatzspannungsquelle

$$U = \frac{R_a}{R_i + R_a} \cdot U_q$$

(Spannungsteiler)

$$I = \frac{U_q}{R_i + R_a}$$

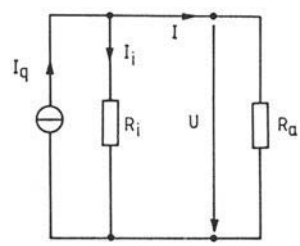


für Grundstromkreis mit Ersatzstromquelle

$$I = \frac{R_i}{R_i + R_a} \cdot I_q$$

(Stromteiler)

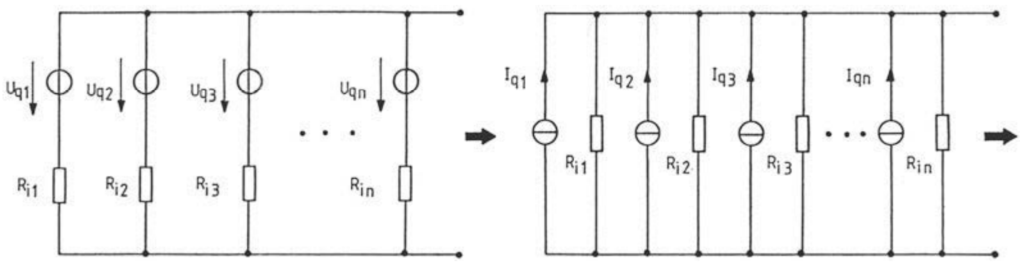
$$U = \frac{R_i \cdot R_a}{R_i + R_a} \cdot I_q$$



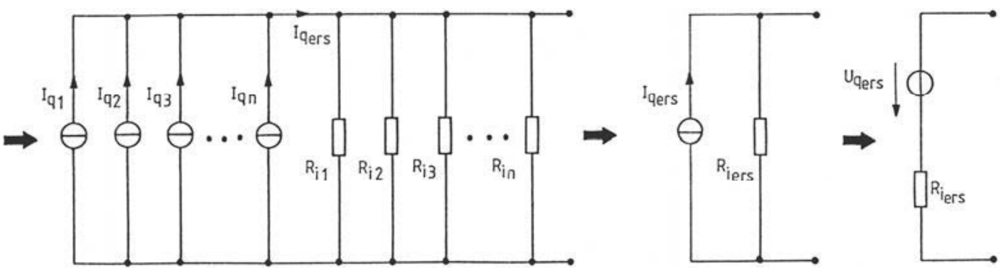
charakteristische Betriebszustände

	für Ersatzspannungsquelle	für Ersatzstromquelle
Kurzschluss mit $R_a = 0$:	$U = 0$ $\quad I = I_k = \frac{U_q}{R_i}$	$U = 0$ $\quad I = I_k = I_q$ weil $I_i = 0$
Leerlauf mit $R_a = \infty$:	$I = 0$ $\quad U = U_l = U_q$ weil $U_i = 0$	$I = 0$ $\quad U = U_l = I_q \cdot R_i$ weil $I_i = I_q$
Anpassung mit $R_a = R_i$:	$U = \frac{U_l}{2} = \frac{U_q}{2}$ $\quad I = \frac{I_k}{2} = \frac{I_q}{2}$	

2.2.6 Die Parallelschaltung von Spannungsquellen (Band 1, S.54-56)



Überführung von n parallel geschalteten Spannungsquellen in n äquivalente Stromquellen



Überführung von n parallel geschalteten Stromquellen in eine Ersatz-Stromquelle und eine Ersatz-Spannungsquelle

$$U_{q\,ers} = \frac{\sum\limits_{v=1}^{n} \frac{U_{qv}}{R_{iv}}}{\sum\limits_{v=1}^{n} \frac{1}{R_{iv}}} = \frac{\frac{U_{q1}}{R_{i1}} + \frac{U_{q2}}{R_{i2}} + \frac{U_{q3}}{R_{i3}} + \ldots + \frac{U_{qn}}{R_{in}}}{\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}} + \frac{1}{R_{i3}} + \ldots + \frac{1}{R_{in}}}$$

$$R_{i\,ers} = \frac{1}{\sum\limits_{v=1}^{n} \frac{1}{R_{iv}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}} + \frac{1}{R_{i3}} + \ldots + \frac{1}{R_{in}}}$$

Sind die parallel geschalteten Spannungsquellen mit einem äußeren Widerstand R_a belastet, dann ist

$$I = \frac{U_{q\,ers}}{R_{i\,ers} + R_a} = \frac{\sum\limits_{v=1}^{n} \frac{U_{qv}}{R_{iv}}}{1 + R_a \cdot \sum\limits_{v=1}^{n} \frac{1}{R_{iv}}} = \frac{\frac{U_{q1}}{R_{i1}} + \frac{U_{q2}}{R_{i2}} + \frac{U_{q3}}{R_{i3}} + \ldots + \frac{U_{qn}}{R_{in}}}{1 + R_a \cdot \left(\frac{1}{R_{i1}} + \frac{1}{R_{i2}} + \ldots + \frac{1}{R_{in}} \right)}$$

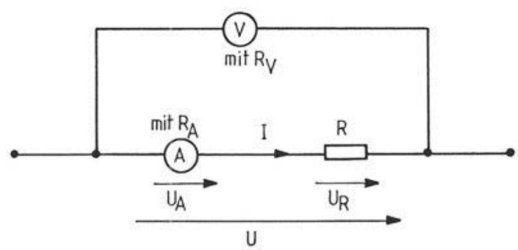
2.2.7 Messung von Widerständen (Band 1, S.58-61)

Stromrichtige Messschaltung zur Messung von großen Widerständen:

$$R_M = \frac{U}{I} = \frac{U_R + U_A}{I} = \frac{U_R}{I} + \frac{U_A}{I}$$

$$R_M = R + \Delta R$$

$$\text{mit } \Delta R = \frac{U_A}{I} = R_A$$

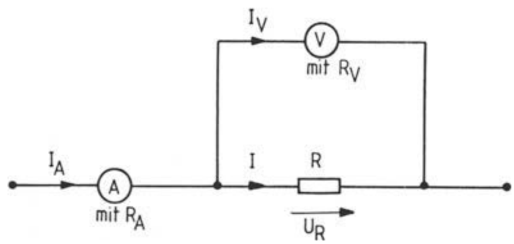


Spannungsrichtige Messschaltung zur Messung von kleinen Widerständen:

$$G_M = \frac{I_A}{U_R} = \frac{I + I_V}{U_R} = \frac{I}{U_R} + \frac{I_V}{U_R}$$

$$G_M = G + \Delta G$$

$$\text{mit} \quad \Delta G = \frac{I_V}{U_R} = G_V = \frac{1}{R_V}$$



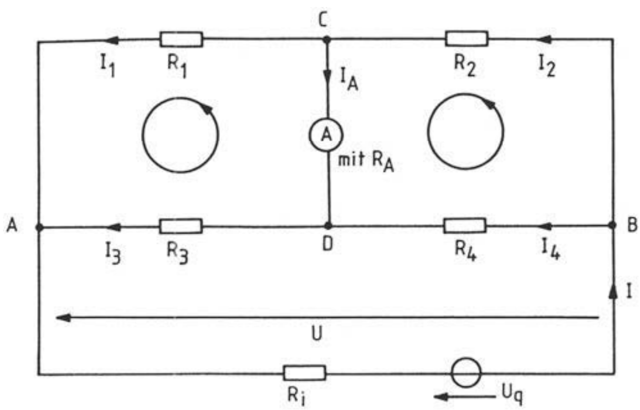
Gleichstrombrücke nach Wheatstone

Bei Abgleich der Brücke sind zwei Zweigströme gleich, weil der Diagonalzweig stromlos ist:

$$I_1 = I_2 \text{ und } I_3 = I_4$$

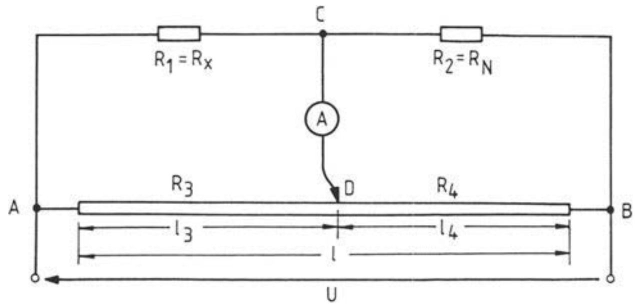
Die Abgleichbedingung der Wheatstonebrücke lässt sich in ohmschen Widerständen ausdrücken:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$



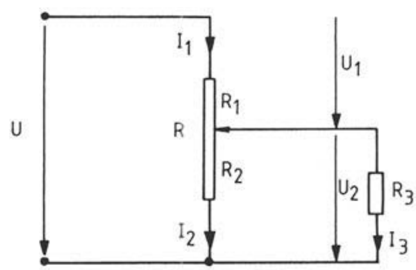
Schleifdraht-Messbrücke

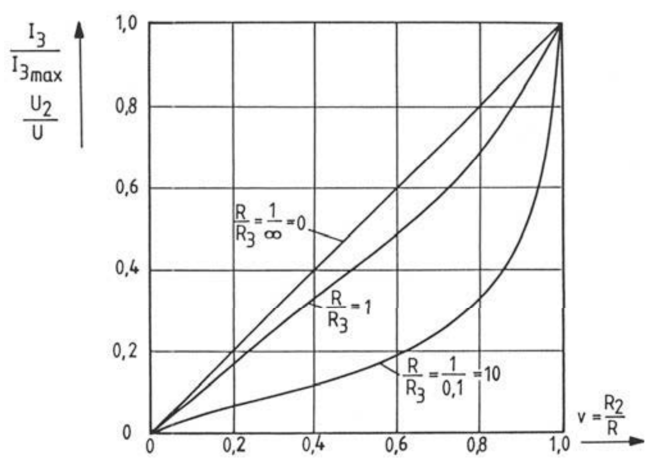
$$R_X = R_N \frac{l_3}{l_4} = R_N \frac{l_3}{l - l_3}$$



2.2.8 Der belastete Spannungsteiler (Band 1, S.62-66)

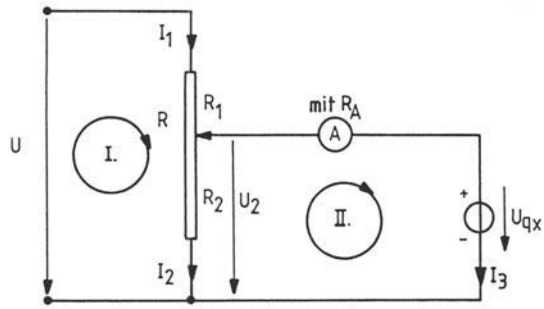
$$\frac{I_3}{I_{3max}} = \frac{U_2}{U} = \frac{v}{\frac{R}{R_3}(v - v^2) + 1}$$





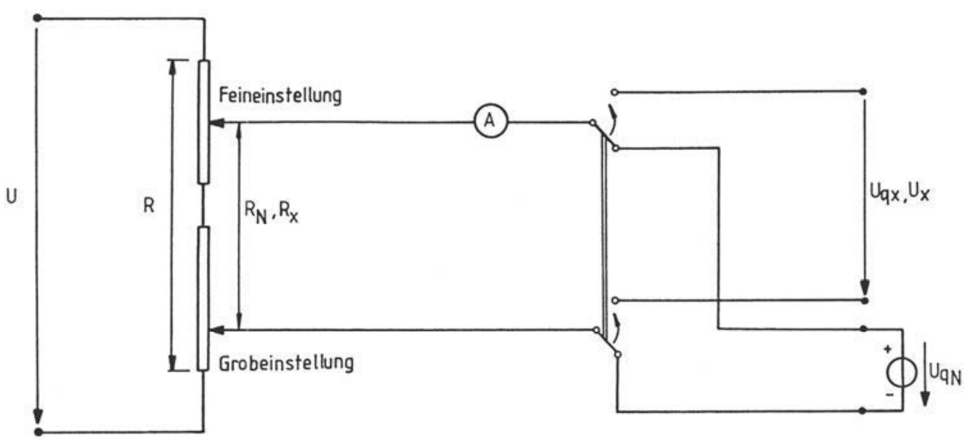
2.2.9 Kompensationsschaltungen (Band 1, S.66-69)

$$I_3 = \frac{UR_2 - U_{qx}R}{R_A R + R_1 R_2}$$



Im Zustand der Kompensation ist der Spannungsteiler unbelastet, denn der Belastungsstrom I_3 ist Null. Die unbekannte Spannung ergibt sich dann aus

$$U_{qx} = U\frac{R_2}{R}$$



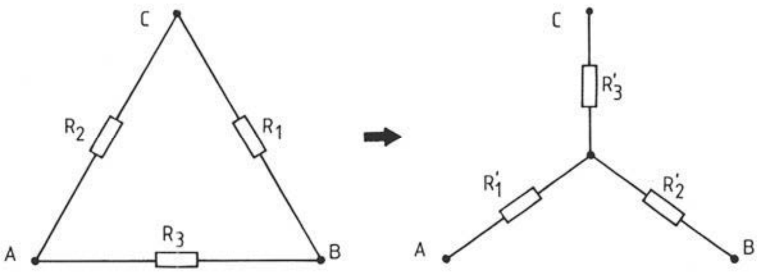
Zweifache Spannungskompensation

Die unbekannte Spannung kann unabhängig von der Hilfsspannung auf vier Ziffern genau berechnet werden:

$$U_x = \frac{R_x}{R_N} \cdot U_{qN}$$

2.2.10 Umwandlung einer Dreieckschaltung in eine Sternschaltung und umgekehrt (Band 1, S.69-73)

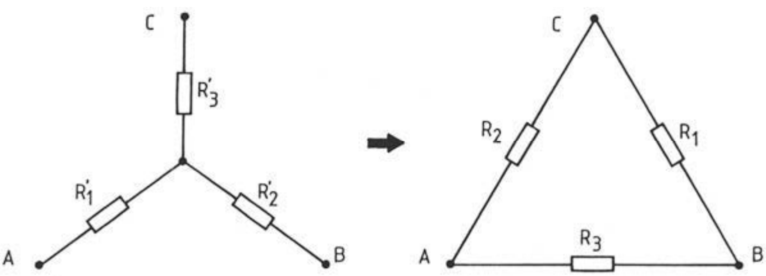
Dreieck-Stern-Transformation



$$R_1' = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad R_2' = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad R_3' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Merkregel: $\text{Sternwiderstand} = \dfrac{\text{Produkt der beiden Dreieckwiderstände}}{\text{Summe aller Dreieckwiderstande}}$

Stern-Dreieck-Transformation



$$R_1 = R_2' + R_3' + \frac{R_2' R_3'}{R_1'} = \frac{R_1' R_2' + R_2' R_3' + R_1' R_3'}{R_1'} \qquad G_1 = \frac{G_3' G_2'}{G_1' + G_2' + G_3'}$$

$$R_2 = R_1' + R_3' + \frac{R_1' R_3'}{R_2'} = \frac{R_1' R_2' + R_2' R_3' + R_1' R_3'}{R_2'} \qquad \text{oder} \qquad G_2 = \frac{G_1' G_3'}{G_1' + G_2' + G_3'}$$

$$R_3 = R_1' + R_2' + \frac{R_1' R_2'}{R_3'} = \frac{R_1' R_2' + R_2' R_3' + R_1' R_3'}{R_3'} \qquad G_3 = \frac{G_1' G_2'}{G_1' + G_2' + G_3'}$$

2.3 Verfahren zur Netzwerkberechnung

Für ein Gleichstrom-Netzwerk, in dem Spannungsquellen, Stromquellen und ohmsche Widerstände gegeben sind, sollen die Zweigströme und Spannungen berechnet werden. Die Richtungen der Spannungsquellen und Stromquellen sind durch Zählpfeile vorgegeben.

2.3.1 Netzwerkberechnung mit Hilfe der Kirchhoffschen Sätze (Zweigstromanalyse) (Band 1, S.80-86)

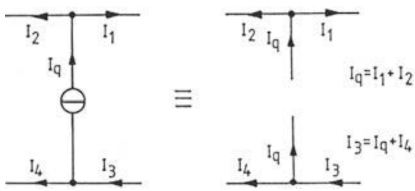
Lösungsweg:

1. *Kennzeichnung der Richtung der Zweigströme*

   Ist die Stromrichtung nicht vorauszusagen, dann ist sie beliebig anzunehmen. Die Berechnung ergibt negative Ströme, wenn die Stromrichtung falsch vorausgesagt wurde.

2. *Aufstellen der k – 1 Knotenpunktgleichungen*

   Für ein Netzwerk mit k Knotenpunkten ergeben sich k – 1 voneinander unabhängige Knotenpunktgleichungen mit Hilfe der Knotenpunktregel. Die Gleichungen sind voneinander linear abhängig, wenn sie sich aus einer oder mehreren Knotenpunktgleichungen ableiten lassen. Stromquellen im Netzwerk werden als Ein- und Ausströmungen in jeweils zwei Knotenpunkten und in den Knotenpunktgleichungen berücksichtigt. Sie sind also keine Zweige, denn sie haben einen unendlich großen Widerstand:



Beispiel zur Behandlung von Stromquellen bei der Zweigstromanalyse

3. *Willkürliche Festlegung der Maschen-Umlaufrichtungen und Aufstellen der unabhängigen Maschengleichungen nach der Maschenregel*

   Für die Berechnung eines Netzwerkes sind z Gleichungen mit z unbekannten Zweigströmen notwendig, k – 1 Knotenpunktgleichungen sind bereits aufgestellt. Dazu kommen noch die unabhängigen Maschengleichungen für die Spannungen der Maschen, die man erhält, wenn nach jedem Maschenumlauf die behandelte Masche aufgetrennt gedacht wird. Diese Trennstelle wird in einem Zweig des Netzes durch zwei Striche gekennzeichnet. Ein neuer Maschenumlauf darf nicht über diese Trennstelle erfolgen. Nach dem Umlauf wird eine zweite Trennstelle vorgesehen, die beim dritten Umlauf nicht überschritten werden darf, usw. Ist wegen der eingezeichneten Trennstellen kein Umlauf mehr möglich, sind alle unabhängigen Maschengleichungen aufgestellt. Nun ist noch zu kontrollieren, ob die k – 1 Knotenpunktgleichungen und die unabhängigen Maschengleichungen z Gleichungen ergeben.

4. *Auflösen des Gleichungssystems nach den gesuchten Strömen und Spannungen*

   Handelt es sich um kleine Netze, können das Eliminationsverfahren, das Einsetzverfahren, das Determinantenverfahren (Abschnitt 2.3.6.3), das Bilden der inversen Matrix (Abschnitt 2.3.6.2) oder der Gaußsche Algorithmus (Abschnitt 2.3.6.3) angewendet werden. Bei größeren Netzen sollte ein Rechner zu Hilfe genommen werden, für den z.B. der Gaußsche Algorithmus programmiert wird.

2.3.2 Netzwerkberechnung mit Hilfe des Überlagerungssatzes (Superpositionsverfahren) (Band 1, S.86-89)

Für elektrische Netze lautet das Überlagerungsprinzip:

> Die Ströme in den Zweigen eines linearen Netzwerks sind gleich der Summe der Teilströme in den betreffenden Zweigen, die durch die einzelnen Quellspannungen und Quellströme hervorgerufen werden. Lineares Netzwerk bedeutet, dass zwischen den Strömen und Spannungen lineare Zusammenhänge bestehen.

Lösungsweg:

1. *Kennzeichnung der Richtung der Zweigströme*
   Ist die Stromrichtung nicht vorauszusagen, dann ist sie beliebig anzunehmen. Die Berechnung ergibt negative Ströme, wenn die Stromrichtung falsch vorausgesagt wurde.
2. *Nullsetzen und Kurzschließen aller Quellspannungen und Nullsetzen und Unterbrechen aller Quellströme bis auf eine Quellspannung oder einen Quellstrom*
   Innenwiderstände verbleiben in der Schaltung. Es empfiehlt sich, die Schaltung mit nur einer Spannungs- oder Stromquelle noch einmal zu zeichnen.
3. *Berechnen des von der einen Quellspannung oder von dem einen Quellstrom verursachten Teilstrom in dem Zweig, in dem der Zweigstrom ermittelt werden soll*
   Da nur eine Energiequelle in der Schaltung wirkt, kann in den meisten Fällen die Stromrichtung in dem betreffenden Zweig vorausgesagt werden. Die Richtung des Teilstroms kann dabei auch entgegengesetzt zur angenommenen Richtung des unter 1. vereinbarten Richtung des gesamten Zweigstroms verlaufen.
4. *Nullsetzen und Kurzschließen aller Quellspannungen und Nullsetzen und Unterbrechen aller Quellströme bis auf eine zweite Quellspannung oder einen zweiten Quellstrom und Berechnen des Teilstroms in dem betreffenden Zweig*
5. *Berechnen der Teilströme in dem betreffenden Zweig auf Grund einer dritten, vierten, ... Energiequelle*
   Es ergeben sich so viele Teilströme, wie Spannungs- und Stromquellen in der Schaltung vorhanden sind.
6. *Aufsummieren der Teilströme bei Beachten der Vorzeichen der Teilströme*
   Teilströme, die die gleiche Richtung haben wie der unter l. vereinbarte gesuchte Zweigstrom, werden positiv berücksichtigt. Die Teilströme, die entgegengesetzt gerichtet sind, gehen negativ in die Berechnung ein.

2.3.3 Netzwerkberechnung mit Hilfe der Zweipoltheorie (Band 1, S.46-54, 90-97)

Durch die Netzwerkberechnung nach der Zweipoltheorie wird das gegebene Gleichstrom-Netzwerk in einen Grundstromkreis überführt, wobei der gesuchte Zweigstrom gleich dem Belastungsstrom des Grundstromkreises ist bzw. die gesuchte Spannung gleich der Klemmenspannung des Grundstromkreises ist. Es gibt zwei mögliche Ersatzschaltungen für ein Gleichstromnetz:

die Spannungsquellen-Ersatzschaltung und
die Stromquellen-Ersatzschaltung.

Nach der Überführung kann der Strom bzw. die Spannung nach den Formeln für den Grundstromkreis berechnet werden.

Lösungsweg:

1. *Aufteilung des Netzwerks in einen aktiven und einen passiven Zweipol*
   Die Aufteilung muss so vorgenommen werden, dass der gesuchte Zweigstrom von der oberen Klemme des aktiven Zweipols in die obere Klemme des passiven Zweipols und von der unteren Klemme des passiven Zweipols in die untere Klemme des aktiven Zweipols oder umgekehrt fließt bzw. die gesuchte Spannung zwischen den Klemmen der Zweipole liegt.

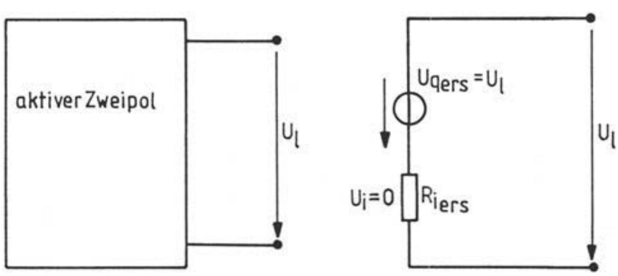
2. *Berechnung der Ersatzschaltung des aktiven Zweipols*

Ersatzspannungsquelle mit $U_{q\,ers} = U_l$ und $R_{i\,ers}$	oder	Ersatzstromquelle mit $I_{q\,ers} = I_k$ und $R_{i\,ers}$

$\underline{U_{q\,ers}}$: Die Ersatz-Quellspannung ist gleich der Leerlaufspannung

$$U_{q\,ers} = U_l,$$

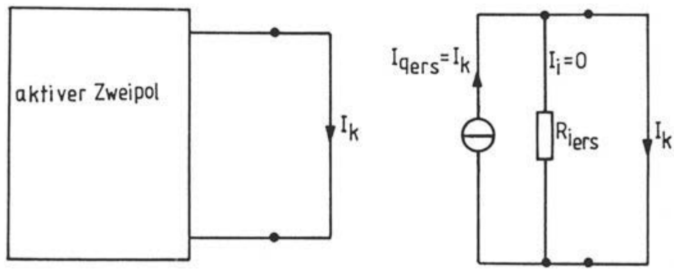
d.h. für den aktiven Zweipol des Gleichstromnetzes wird bei offenen Klemmen, also bei Leerlauf, die Klemmenspannung rechnerisch oder messtechnisch ermittelt. Sollten Spannungsquellen oder Stromquellen in Reihe oder parallel geschaltet sein, dann werden diese zusammengefasst und bei der Berechnung von U_l berücksichtigt.



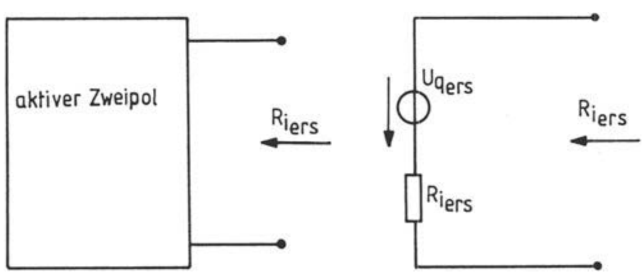
$I_{q\,ers}$: Der Ersatz -Quellstrom ist gleich dem Kurzschlussstrom

$$I_{q\,ers} = I_k,$$

d. h. für den aktiven Zweipol des Gleichstromnetzes wird bei kurzgeschlossenen Klemmen, also bei Kurzschluss, der Klemmenstrom rechnerisch oder messtechnisch ermittelt. In Reihe oder parallel geschaltete Spannungs- oder Stromquellen werden zusammengefasst und bei der Ermittlung des Kurzschlussstroms berücksichtigt.



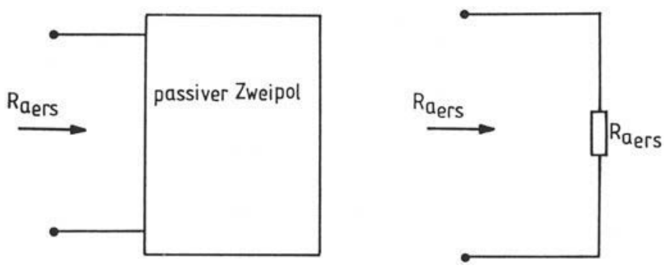
$R_{i\,ers}$: Der Ersatz-Innenwiderstand ist gleich dem ohmschen Widerstand des aktiven Zweipols hinsichtlich der offenen Zweipolklemmen, wenn alle Spannungsquellen des Gleichstromnetzes als kurzgeschlossen und alle Stromquellen als unterbrochen angenommen werden. Innenwiderstände bleiben berücksichtigt in der Schaltung des Netzes. Anschließend müssen Brückenschaltungen durch Dreieck-Stern-Umwandlungen oder Stern-Dreieck-Umwandlungen (Abschnitt 2.2.10) in zusammenfassbare Reihen- und Parallelschaltungen überführt werden und mit den übrigen ohmschen Widerständen zusammengefasst werden.



3. Berechnung der Ersatzschaltung des passiven Zweipols

Ersatz-Außenwiderstand $R_{a\,ers}$

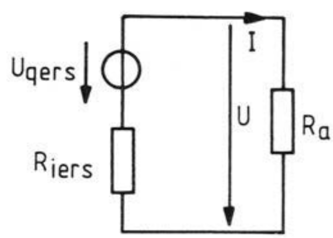
$\underline{R_{a\,ers}}$: Der Ersatz-Außenwiderstand ist gleich dem ohmschen Widerstand des passiven Zweipols hinsichtlich der offenen Zweipolklemmen. Dabei müssen Brückenschaltungen durch Dreieck-Stern-Umwandlungen oder Stern-Dreieck-Umwandlungen (Abschnitt 2.2.10) in zusammenfassbare Reihen- und Parallelschaltungen überführt werden und mit den übrigen ohmschen Widerständen zusammengefasst werden.



4. Ermittlung des gesuchten Stroms oder der gesuchten Spannung mit Hilfe der Ersatzschaltung (Grundstromkreis)

für die Spannungsquellen-Ersatzschaltung:

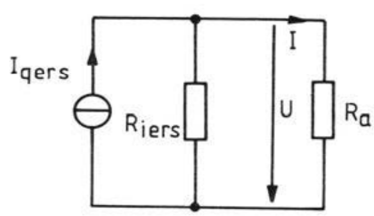
$$I = \frac{U_{q\,ers}}{R_{i\,ers} + R_{a\,ers}}$$



$$U = \frac{R_{a\,ers}}{R_{i\,ers} + R_{a\,ers}} \cdot U_{q\,ers}$$

für die Stromquellen-Ersatzschaltung:

$$I = \frac{R_{i\,ers}}{R_{i\,ers} + R_{a\,ers}} \cdot I_{q\,ers}$$



$$U = \frac{R_{i\,ers} \cdot R_{a\,ers}}{R_{i\,ers} + R_{a\,ers}} \cdot I_{q\,ers}$$

2.3.4 Netzwerkberechnung nach dem Maschenstromverfahren (Band 1, S.98-102)

Beim Maschenstromverfahren werden nur Maschengleichungen für Spannungen berücksichtigt. Deshalb sind im Gleichstromnetz vorkommende Stromquellen zunächst in äquivalente Spannungsquellen zu überführen. Bei idealen Stromquellen mit $G_i = 0$ ist die Umwandlung nicht möglich. In diesem Fall kann ein zur Stromquelle parallel geschalteter Innenwiderstand angenommen werden, der dann im Endergebnis unendlich gesetzt wird. Das Maschenstromverfahren kann aber auch für ideale Stromquellen erweitert werden [16].

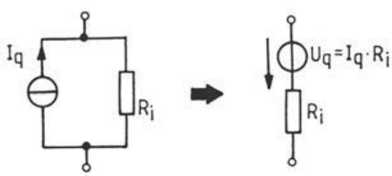
Jeder unabhängigen Masche wird dann ein geschlossener Maschenstrom zugeordnet. In den Zweigen, die mehreren Maschen angehören, werden die Maschenströme überlagert. Die Zweigströme sind also gleich der vorzeichenbehafteten Summe der Maschenströme, je nachdem ob die Maschenströme in dem Zweig gleich gerichtet oder entgegengesetzt gerichtet sind.

Anschließend werden die unabhängigen Maschengleichungen für die Zweigströme nach der Maschenregel aufgestellt und zwar mit den angenommenen Maschenströmen.

Gegenüber der Netzberechnung nach den Kirchhoffschen Sätzen (Abschnitt 2.3.1) werden beim Maschenstromverfahren die Knotenpunktgleichungen eingespart, wodurch sich in vielen Fällen Vereinfachungen ergeben.

Lösungsweg:

1. *Umwandlung sämtlicher Stromquellen in äquivalente Spannungsquellen*



Behandlung von Stromquellen beim Maschenstromverfahren

2. *Jeder unabhängigen Masche wird ein Maschenstrom zugeordnet*

   Dabei kann die Umlaufrichtung der Maschenströme beliebig gewählt werden. Die Zuordnung der Maschenströme wird so vorgenommen, dass durch den Zweig, für den der Strom berechnet werden soll, nur ein Maschenstrom angenommen wird, damit nach Auflösung des Gleichungssystems nicht die Summe oder Differenz von Maschenströmen gebildet werden muss. Es wird also mit der Festlegung des Maschenstroms begonnen, zu dem der gesuchte Zweigstrom gehört. Anschließend wird dieser Zweig getrennt gedacht und mit zwei Strichen gekennzeichnet. Dann wird ein neuer Umlauf mit einem neuen Maschenstrom gesucht und wieder getrennt gedacht, usw. Ist infolge der gedachten Trennstellen kein Umlauf mehr möglich, sind sämtliche unabhängigen Maschen berücksichtigt.

3. *Aufstellen der Maschengleichungen für die ausgewählten Maschen und zwar für Zweigströme*

4. *Berechnen des gesuchten Stroms oder der gesuchten Ströme mit Hilfe des geordneten Gleichungssystems*

   (Eliminationsverfahren, Cramersche Regel, Matrizenrechnung, Gaußscher Algorithmus im Abschnitt 2.3.6.3)

2.3.5 Netzwerkberechnung nach dem Knotenspannungsverfahren (Band 1,S.102-108)

Das Knotenspannungsverfahren basiert auf dem Knotenpunktsatz und dem Ohmschen Gesetz. Dabei wird mit den Spannungen zwischen dem jeweiligen Knotenpunkt und einem mit dem Potential Null festgelegten Knotenpunkt gerechnet.

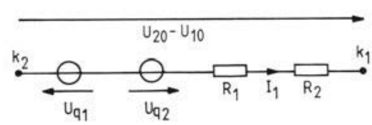
Verbindet eine ideale Spannungsquelle mit $R_i = 0$ zwei Knotenpunkte, dann wird in einem der beiden Anschlusspunkte der Spannungsquelle das Potential Null angenommen, wodurch das Potential des anderen Knotenpunktes über die Quellspannung bekannt ist. Mit den übrigen Spannungen und den Leitwerten ergeben sich dann die gesuchten Zweigströme.

Einströmungen, z.B. Quellströme, lassen sich in den Knotenpunktgleichungen berücksichtigen.

Lösungsweg:

1. *Kennzeichen der Knotenpunkte von 0 bis k – 1: k0, k1, k2, k3, ...*
   Der Knotenpunkt k0 erhält das Potential Null. Zwischen den k – 1 Knotenpunkten und dem Knotenpunkt k0 bestehen dann die k – l Spannungen U_{i0} :
   $U_{10} = \varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_1 \qquad U_{20} = \varphi_2 - \varphi_0 = \varphi_2 \qquad \ldots \qquad U_{k-1,0} = \varphi_{k-1} - \varphi_0 = \varphi_{k-1}$
2. *Festlegen der Richtungen der z Zweigströme $I_1, I_2, \ldots, I_z$ im Gleichstromnetz*
   Einströmungen (zu- und abfließende Ströme) und Stromquellen (Quellströme) sind vorgegeben.
3. *Aufstellen der k – 1 Knotenpunktgleichungen in den Knotenpunkten k1, k2, ... nach der Knotenpunktregel*
4. *Aufstellen der z Gleichungen für die Zweigströme in Abhängigkeit von den Zweigleitwerten G, den Spannungen U_{10} und den eventuell vorhandenen Quellspannungen*

   Erläuterungsbeispiel:

   Der Zweigstrom I_1 fließt vom Knotenpunkt k2 zum Knotenpunkt k1, dann wird er durch die Spannungsdifferenz $U_{20} - U_{10}$ getrieben.

   Befinden sich zwischen den Knotenpunkten k1 und k2 Quellspannungen, dann sind diese zu der Spannungsdifferenz $U_{20} - U_{10}$ zu addieren, wenn die Quellspannungen entgegengesetzt zum Zweigstrom I_1 gerichtet sind, und zu subtrahieren, wenn die Quellspannungen gleichgerichtet sind mit dem Zweigstrom I_1. Im Beispiel wirkt die Quellspannung U_{q1} stromtreibend (entgegengesetzt gerichtet zu I_1) und die Quellspannung U_{q2} stromhemmend (in gleicher Richtung wie I_1).

   Fließt der Zweigstrom durch mehrere in Reihe geschaltete Widerstände, dann ist deren Leitwert zu ermitteln. Im Beispiel fließt der Zweigstrom I_1 durch die beiden Widerstände R_1 und R_2; der zugehörige Zweigleitwert beträgt $G_{12} = 1/(R_1 + R_2)$.

   $$I_1 = G_{12} \cdot (U_{20} - U_{10} + U_{q1} - U_{q2})$$

   Für die übrigen k – l Zweigströme werden auf die gleiche Weise die Gleichungen ermittelt.
5. *Einsetzen der Gleichungen für die Zweigströme in die Knotenpunktgleichungen und Ordnen des Gleichungssystems*
   Durch das Einsetzen der unter 4. entwickelten Gleichungen in die unter 3. aufgestellten Knotenpunktgleichungen entsteht ein Gleichungssystem mit bekannten Leitwerten, gegebenen Quellspannungen und unbekannten Spannungen U_{i0}
6. *Lösen des Gleichungssystems nach den unbekannten Spannungen U_{i0} und Berechnen der gesuchten Zweigströme $I_1, I_2, \ldots, I_z$*
   (Eliminationsverfahren, Cramersche Regel, Matrizenrechnung, Gaußscher Algorithmus im Abschnitt 2.3.6.3)

2.4 Elektrische Energie und elektrische Leistung

2.4.1 Energie und Leistung (Band 1, S.132-135)

$P = \frac{W}{t}$ bzw. $P = \frac{dW}{dt}$ potentielle Energie: $W_{pot} = m \cdot g \cdot \Delta h$

Energiesatz: $\sum_{v=1}^{n} W_v = \text{konstant}$ kinetische Energie: $W_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$

2.4.2 Energieumwandlungen (Band 1, S.135-138)

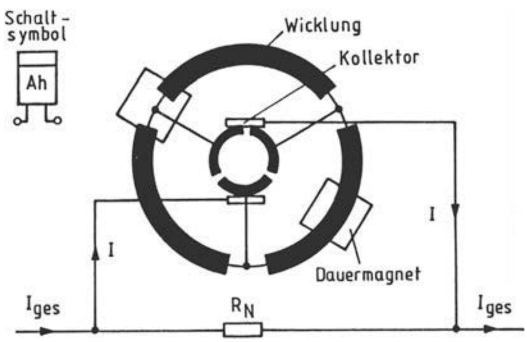
Elektrische Energie in Wärmeenergie

$W_{el} = W_{th}$ $U \cdot I \cdot t = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta$

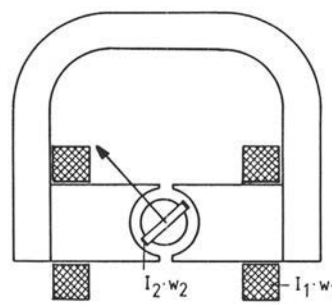
Energieäquivalente $1\ J = 1\ Nm = 1\ Ws = 1\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$

	J = Nm = Ws	cal	kWh	kpm	eV
1 J = 1 Nm = 1 Ws	1	0,2388	$2{,}778\ 10^{-7}$	0,102	$6{,}25 \cdot 10^{18}$
1 cal	4,1868	1	$1{,}163 \cdot 10^{-6}$	0,4269	$2{,}62 \cdot 10^{19}$
1 kWh	$3{,}6 \cdot 10^{6}$	$859{,}8 \cdot 10^{3}$	1	$3{,}671 \cdot 10^{5}$	$2{,}25 \cdot 10^{25}$
1 kpm	9,80665	2,342	$2{,}724 \cdot 10^{-6}$	1	$6{,}12 \cdot 10^{19}$
1 eV	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$	$3{,}82 \cdot 10^{-20}$	$4{,}44 \cdot 10^{-26}$	$1{,}63 \cdot 10^{-20}$	1

2.4.3 Messung der elektrischen Energie und Leistung (Band 1, S.138-142)



Magnet-Motorzähler



Leistungsmesser

Ankerumdrehungen

$$z = t \cdot n = \frac{c_1}{c_2} \cdot I \cdot t = \frac{c_1}{c_2} \cdot Q$$

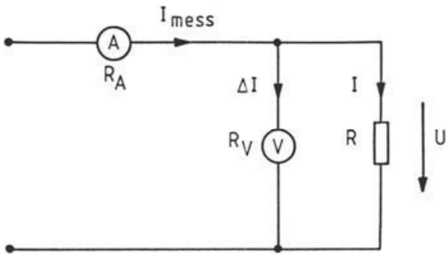
mit Drehzahl n

Zeigerausschlag

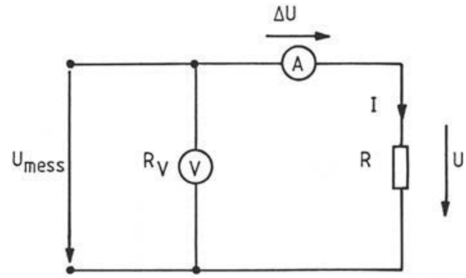
$$\alpha = \frac{c}{D^*} \cdot U \cdot I = c_{stat} \cdot P_{el}$$

mit D^* = Drehfederkonstante

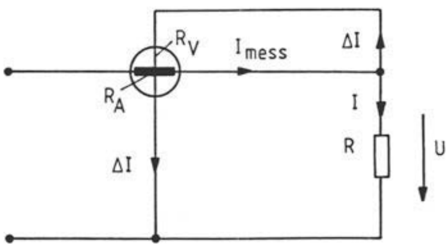
Stromrichtige und spannungsrichtige Leistungsmessung



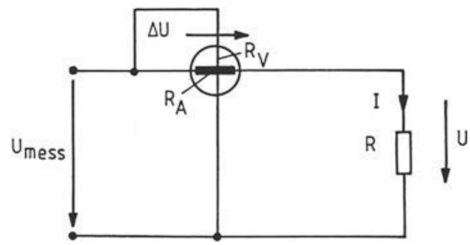
Spannungsrichtige Messschaltung
mit zwei getrennten Instrumenten



Stromrichtige Messschaltung
mit zwei getrennten Instrumenten



Spannungsrichtige Messschaltung
mit einem elektrodynamischen Messwerk



Stromrichtige Messschaltung
mit einem elektrodynamischen Messwerk

Die in den Instrumenten auftretende Verlustleistung bestimmt die Messgenauigkeit:

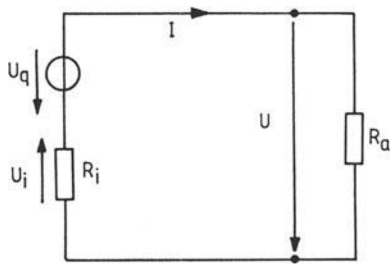
	spannungsrichtige Messschaltung	stromrichtige Messschaltung
Leistung des Verbrauchers	$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R}$	$P = U \cdot I = I^2 \cdot R$
Leistungsverlust im Spannungs- bzw. Strompfad	$\Delta P = U \cdot \Delta I = \frac{U^2}{R_V}$ mit $\Delta I = \frac{U}{R_V}$	$\Delta P = \Delta U \cdot I = I^2 \cdot R_A$ mit $\Delta U = I \cdot R_A$
Messleistung	$P_{mess} = P + \Delta P$	$P_{mess} = P + \Delta P$
relativer Fehler	$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\frac{U^2}{R_V}}{\frac{U^2}{R}} = \frac{R}{R_V}$	$\frac{\Delta P}{P} = \frac{I^2 \cdot R_A}{I^2 \cdot R} = \frac{R_A}{R}$

2.4.4 Wirkungsgrad in Stromkreisen (Band 1, S.142-145)

$$\eta = \frac{P_N}{P_{ges}} = \frac{P_N}{P_N + P_V}$$

Nutzleistung P_N
Verlustleistung P_V
zugeführte Gesamtleistung P_{ges}

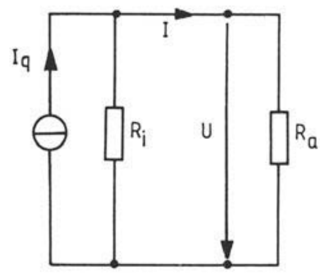
Wirkungsgrad des Grundstromkreises mit Ersatzspannungsquelle



$$\eta = \frac{P_a}{P_E} = \frac{P_a}{P_a + P_i} = \frac{1}{1 + \frac{P_i}{P_a}}$$

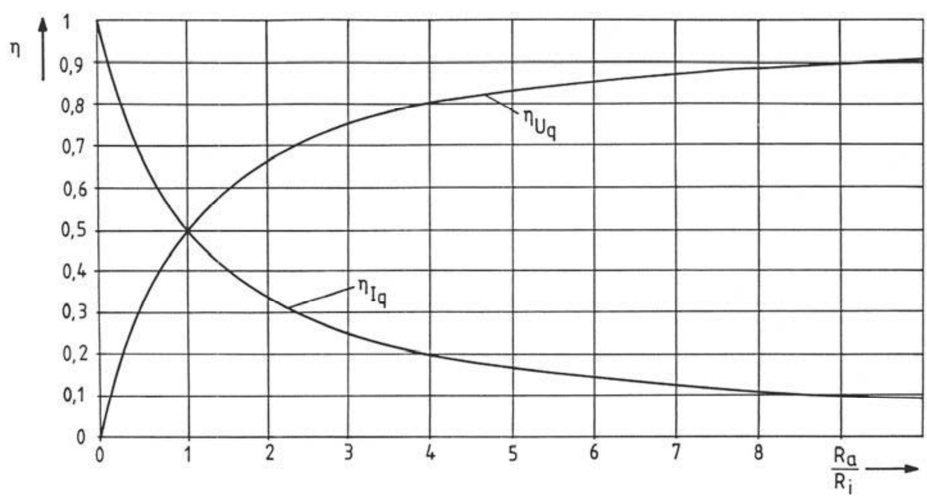
$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_a}}$$

Wirkungsgrad des Grundstromkreises mit Ersatzstromquelle



$$\eta = \frac{P_a}{P_E} = \frac{P_a}{P_a + P_i} = \frac{1}{1 + \frac{P_i}{P_a}}$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_a}{R_i}}$$



2.4.5 Anpassung (Band 1, S.145-148)

Wirkungsgrad-Maximum, Verbraucherleistung-Maximum

Leistungen im Grundstromkreis mit Ersatzspannungsquelle | *Leistungen im Grundstromkreis mit Ersatzstromquelle*

Erzeugerleistung: Leistung der Energiequelle

$$P_E = U_q \cdot I \qquad\qquad P_E = I_q \cdot U$$

innere Leistung: am Innenwiderstand umgesetzte Leistung

$$P_i = I^2 \cdot R_i \qquad\qquad P_i = \frac{U^2}{R_i}$$

äußere Leistung: am Außenwiderstand umgesetzte Leistung (Verbraucherleistung, Klemmenleistung)

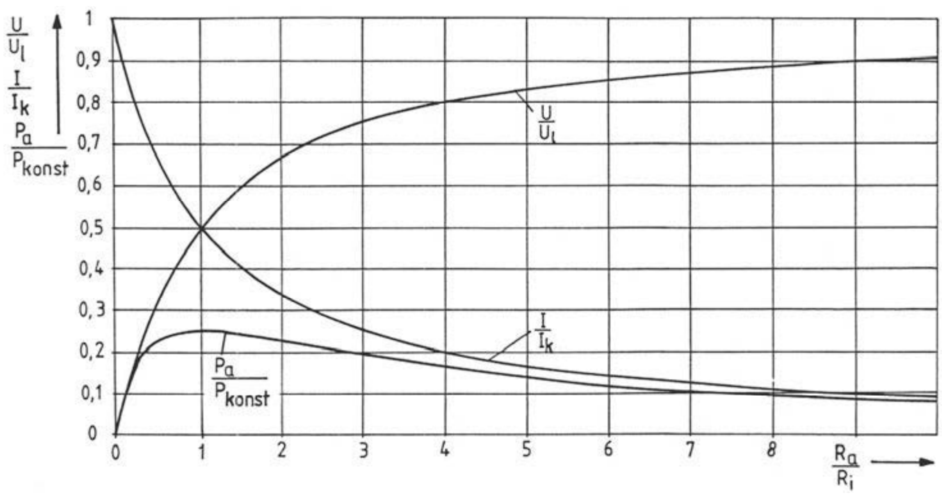
$$P_a = P_k \cdot \frac{R_i \cdot R_a}{(R_i + R_a)^2} \qquad\qquad P_a = P_l \cdot \frac{R_i \cdot R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

mit der Kurzschlussleistung | mit der Leerlaufleistung

$$P_k = I_k \cdot U_l \qquad\qquad P_l = I_k \cdot U_l$$

mit $P_k = P_l = P_{konst.}$ ist $\frac{P_a}{P_{konst.}} = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{\left(1 + \frac{R_a}{R_i}\right)^2}$ mit $\frac{P_{a\,max}}{P_{konst.}} = \frac{1}{4}$ (maximale Verbraucherleistung)

Gleichzeitig ist $\frac{U}{U_l} = \frac{1}{1 + \frac{1}{R_a / R_i}}$ und $\frac{I}{I_k} = \frac{1}{1 + \frac{R_a}{R_i}}$



Spannung, Strom und Leistung in Abhängigkeit von den Widerständen im Grundstromkreis

http://www.springer.com/978-3-658-09089-0

Elektrotechnik für Ingenieure - Formelsammlung
Elektrotechnik kompakt
Weißgerber, W.
2015, XV, 204 S. 176 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-09089-0