Formeln rasch erfassen und sicher nutzen

für Ingenieure, Natur- und Betriebswissenschaftler

Bearbeitet von
Ronald Höfer

2., übarbeitete Auflage 2015. Buch. V, 172 S. Kartoniert
ISBN 978 3 658 10087 2
Format (B x L): 16,9 x 24,1 cm
Gewicht: 316 g

Formel und Wirklichkeit

2

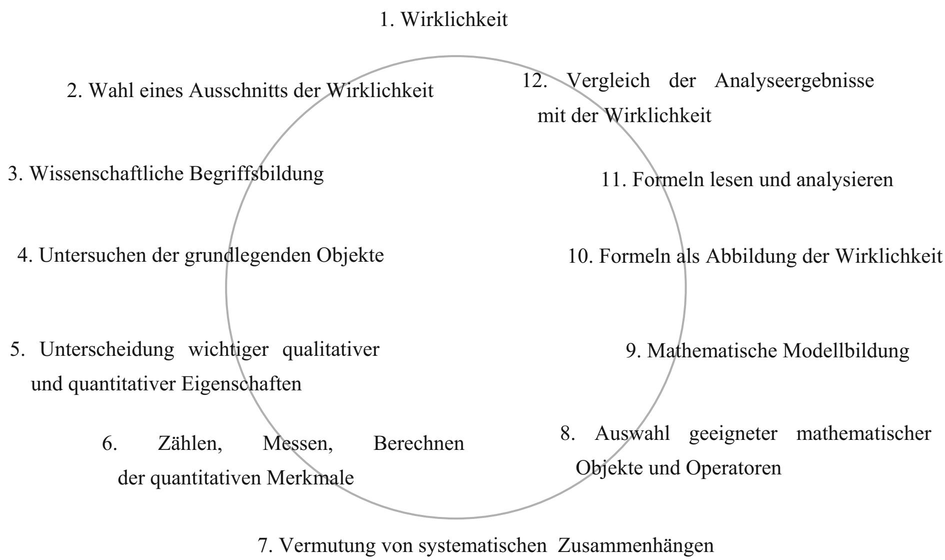
Formeln als Darstellung von Zusammenhängen in der Wirklichkeit gibt es noch gar nicht so lange, so etwa seit dem 17. Jahrhundert. Galilei, Vieta, Kepler, DesCartes, Newton sind nur einige Namen, die hier wichtig sind. Das 18. und 19. Jahrhundert sahen die Ausbreitung von Formeln in fast alle Wissensbereiche und die Theorie der mathematischen Modellbildung kam im 20. Jahrhundert so richtig in Fahrt.

Dabei finden sich Inhalte, die wir heute wie selbstverständlich als Formel formulieren würden, bereits in mittelalterlichen Texten, etwa des 13. und 14. Jahrhunderts. Von arabischen Texten aus dem 9. Jahrhundert und aus dem alten Babylon ganz zu schweigen. Auch komplizierte mathematische Zusammenhänge wurden damals fast ausschließlich in Worten dargestellt. Dieser Aspekt wird für uns noch wichtig werden.

Wir kehren ins 21. Jahrhundert zurück, kümmern uns nicht weiter um diverse Hintergründe, sondern gewinnen rasch einen Überblick über den Vorgang, wie eine Formel, die „etwas zu sagen hat“ entsteht. Denn daraus können wir schon einiges für das Verständnis von Formeln ableiten.

Formeln sind nicht nur stets Teil eines Textes, sondern sind gemeinsam mit diesem Teil einer Wissenschaft, einer Anwendungstechnik usw. Die folgende Graphik soll Sie kurz an diesen Gesamtzusammenhang erinnern, der sich auch in dem Detail „Formel“ stets als ganzer widerspiegelt.

R. Höfer, *Formeln rasch erfassen und sicher nutzen*, DOI 10.1007/978-3-658-10088-9_2,



Die Punkte 2 bis 5 stellen den Sachzusammenhang dar. Bei Punkt 6 kommen unsere Objekte erstmals so richtig mit Zahlen in Berührung, deshalb werden wir auf den Punkt „Messen“ einen etwas genaueren Blick werfen. Im Punkt 7 verbergen sich bei mathematischer Sichtweise schon die Begriffe der Korrelation (aus der Statistik) und der mathematisch wesentlich verlässlicheren Verwandten der Funktion. Damit wir aber mit unseren Messergebnissen und unseren Zusammenhangsvermutungen wirklich etwas anfangen können, müssen wir vollends den Sprung in die Mathematik wagen und die für unseren Zweck passenden mathematischen Objekte und Operatoren auswählen.

Da diese Arbeit für uns längst erledigt ist, müssen wir bei Punkt 8 nur wissen:

- Welche Objekte und Operatoren stehen eigentlich zur Verfügung?
- Was können sie?
- Wie sehen sie innerhalb einer Formel aus?

Dieses Wissen genügt uns hier vollkommen, und gleich zur Beruhigung vorweg: Wir kommen mit sieben einfachen mathematischen Objekten aus und als „Operatoren“ sind wir mit unseren Grundrechenarten aus der Grundschule bereits sehr gut ausgestattet.

Wenn die mathematische Modellbildung erledigt ist, dann liegen zum ersten Mal Formeln vor. Richtige, echte Formeln. Sie sehen an dieser Kurzdarstellung bereits, wie viele Schritte, wie viel Gedankenarbeit, wie viel Forschung in einer Formel zusammengefasst sein kann. Machen Sie sich damit zugleich auch klar, dass Formeln als Ergebnis eines solchen Prozesses gut und schlecht, zweckmäßig und nicht zweckmäßig, richtig oder falsch sein können; mit allen „Grauabstufungen“ dazwischen. Formeln sind Abbildungen der Wirklichkeit, nicht die Wirklichkeit selbst. Erst bei Punkt 11, also kurz vor 12 steigen *wir* mit dem Lesen und Analysieren von Formeln ein. Wir wollen aber gleich die ganze

Wahrheit und blicken von unserer Formel auf und schauen, was die Wirklichkeit so bereithält. Wir erwarten am besten immer, dass an der Formel zwar einiges dran ist, dass die Wirklichkeit wahrscheinlich doch noch einiges mehr oder anders ist. Dann bringt uns eine gute Formelanalyse gerade auch durch *Erkenntnis der Grenzen einer Formel* dem eigentlichen Zweck, der Erkenntnis der Wirklichkeit und dem tieferen Verständnis unseres Wissensgebietes näher.

Drei Dinge sind zum erfolgreichen Verstehen einer Formel erforderlich:

Erstens müssen wir die Formel lesen können. Genauer gesagt müssen wir sie *entziffern* können, so wie wir auch die Worte einer uns unbekannten Sprache „lesen" können, wenn sie in vertrauten lateinischen Buchstaben geschrieben sind.

Zweitens müssen wir die mathematischen Strukturen und Zusammenhänge innerhalb der Formel wenigstens erkennen können und deren ungefähre Bedeutung verstehen. Das hat nichts mit „Rechnen" zu tun.

Drittens ist eine Kenntnis des Themas erforderlich, der jeweiligen Sache, der beteiligten Gegenstände und Objekte, quasi der „Akteure" und ihres Handelns. Denn, kurz gesagt: Wer zu sehr auf die Formel fixiert ist übersieht, dass jede Formel Teil eines Textes ist und damit im Zusammenhang mit der Behandlung eines bestimmten Themas steht. Vor lauter Formelfixierung verliert man den Textzusammenhang aus dem Blick.

Kurz: Zeichenkenntnis, mathematisches Wissen und Sachkenntnis kommen in jeder Formel zusammen. Verständnisprobleme beim Lesen von Formeln haben daher vier mögliche Ursachen:

- Schlechtes, um nicht zu sagen schlampiges Lesen
- Unzureichende Sachkenntnis
- Unzureichende mathematische Kenntnisse.

Die vierte Ursache ist die übliche Kombination aus zwei oder mehr Problemen. Da eventuell vorhandene Verständnisprobleme spätestens beim Lesen, Erklären und Anwenden einer Formel nicht mehr verdeckt werden können, projizieren viele Ihr Unverständnis allein auf die „arme" Formel, die so gar nichts dafür kann und sich nicht wehren kann ☹!

Das zweite „Opfer" ist dann die Mathematik. Falls überhaupt, kommt mangelndes Sachverständnis erst zum Schluss als Schuldiger für mein Unverständnis in Frage.

Auf den Punkt gebracht heißt das nichts anderes als: Sie können nicht nur diese Formel nicht lesen, Sie können überhaupt nicht Formeln lesen. Sie kennen ein paar bestimmte Formeln, so wie Sie ein paar Redewendungen kennen zum Bestellen eines Kaffees oder zur Frage nach dem Wetter im Urlaubsland. Die Landesprache beherrschen wir deshalb noch nicht, nur weil wir uns in ein paar konkreten Situationen „durchschlagen" können. Ich möchte nicht, dass Sie sich bei Formeln nur „durchschlagen", sondern dass Sie souverän mit jeder Formel umzugehen wissen; auch und vor allem dann, wenn Sie nicht über vollständige Information verfügen.

2.1 Die Buchstaben und die Akteure

Die allererste und wichtigste Bekanntschaft ist die mit den Akteuren einer Formel. Diese kann man ganz ohne „Formellatein“ und Mathematik machen.

Die Struktur der Formel ist uns zuerst einmal völlig egal, wir wollen uns nur einmal einen Überblick verschaffen, *worum es überhaupt geht*. Worum es wirklich geht. Jetzt werden Inhalte, Begriffe und Konzepte wichtig. Wer sind die Akteure, welche Objekte, Gegenstände spielen eine Rolle.

Wir fragen nach den wichtigsten Eigenschaften dieser Akteure. Denn bereits *ohne Berücksichtigung der Struktur* der Formel werden auch durch die ganz spezielle Zusammenstellung der Akteure bestimmte Beziehungen nahegelegt, andere ausgeschlossen. Und zwar aus rein sachlichen Gründen. Je besser Sie also die Objekte, ihre Akteure verstehen, umso erhellender wird dann für Sie die anschließende strukturelle Formelanalyse.

Noch völlig ohne mathematische Kenntnisse und ohne Wissen um formelmäßige Zusammenhänge können wir aus jeder Formel herauslesen, um wen es da geht. Wir wissen zwar nicht, was geschieht und nicht warum, aber wir können alle Beteiligten bereits kennenlernen.

► Man muss zuerst einmal wissen, mit wem man es zu tun hat

Zwei Beispiele: $n = \sqrt{1 - \dfrac{N_e e^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 \nu^2 m_e}}$ $\qquad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-my + bxy}{rx - axy}$

Diese Formeln sagen uns zuerst einmal überhaupt nichts. Erst, wenn wir die Bedeutung der Buchstaben kennen, wissen wir, worum es geht. Ohne Kenntnis der Buchstaben sehen wir nur eine Wurzel und einen Bruch und dergleichen. Das aber ist für das Verständnis einer Formel zuerst völlig ohne Bedeutung. Denn der Inhalt und das Thema erfahren wir nur über die Akteure.

n	Brechungsindex (für Lichtstrahlen in elektrisch leitenden Schichten)
N_e	Elektronendichte in m^{-3}
e	Elementarladung $1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{A \cdot sec}$ ($\simeq$ Coulomb)
π	tja, ist tatsächlich die Zahl Pi, also 3,141592654...
ε_0	absolute Dielektrizitätskonstante 8,85 × 10–12 A sec/V · m
ν	Frequenz
m_e	Elektronenmasse

x	Anzahl der vorhandenen Beutetiere
y	Anzahl der vorhandenen Raubtiere/Jäger
r	die Pro-Kopf-Wachstumsrate der Beute bei Abwesenheit von Feinden
m	sinngemäß das gleiche für die Jäger, wenn es keine Beute gibt

a gibt den Jagderfolg eines Jägers relativ zur Beutepopulation an
b gibt an, wie sehr sich die Vermehrung der Anzahl von Beutetieren auf die Zahl der Jäger auswirkt.

Allein aufgrund der genauen Kenntnis der Akteure gewinnen wir eine Vorstellung über das Geschehen, das in der Formel beschrieben wird. Das ist es, was Sie zuallererst in einer Formel suchen, denn dann wird die Formel auch ganz organischer Teil eines Textes und man überspringt die Formel dann nicht, sondern möchte genauer hinschauen und alles erfahren. Im zweiten Teil „Anwendungsbeispiele" finden Sie für verschiedene Bereiche das alles noch genauer ausgeführt.

2.2 Objekte, Eigenschaften, Definitionen

Damit eine Formel eine Bedeutung bekommt, benötigen wir drei verschiedene Definitionen:

1. Jedem Zeichen muss ein bestimmter Inhalt, eine bestimmte Bedeutung zugeordnet werden. Definition heißt hier: Ich lege fest, dass der Buchstabe „F" Kraft im physikalischen Sinne bedeuten soll. Durch diese Definition kann ich *einen Ausdruck lesen*.
2. Daraus ergibt sich gleich die Frage: Was bedeutet Kraft? Was bedeutet Kraft im physikalischen Sinne? Hier benötige ich eine fachliche Definition des Gegenstands, um den es geht. Diese Art von Definition beschreibt den Gegenstand so, dass ich zum einen eine wenigstens ungefähre Ahnung habe, um was es geht. Und – das ist sehr wichtig – auch weiß, worum es sicher nicht geht. Ein alter Lateiner sagte mal den tollen Satz: Omnis determinatio est negatio. Soll heißen: Jede Bestimmung einer Sache heißt eigentlich sagen, was sie *nicht* ist. Der Hauptzweck dieser Art von Definition ist zweierlei. Erstens, dass *wir* über *dasselbe reden*, wenn wir von „Kraft im physikalischen Sinne" reden und zweitens, dass wir den Gegenstand, die Sache, um die es geht, in der Wirklichkeit *wiedererkennen*.
   Wenn Sie eine Definition dieser Art verstanden haben, dann erkennen Sie den so definierten Gegenstand in vielerlei Formen und vielerlei Gestalten wieder, weil Sie einen *Begriff* von der Sache haben. Ein Begriff ist unabhängig von der Wahrnehmung; er hilft Ihnen nämlich, Ihre Wahrnehmung zu ordnen und zu strukturieren. Ob Sie eine solche Definition verstanden, tatsächlich begriffen haben erkennen Sie selbst leicht daran, ob Sie sich dazu auch etwas vorstellen können. Und zwar ganz handfest, bildhaft und sinnlich die Sache vor Ihrem geistigen Auge sehen können. Die gute Nachricht: Man kann viele Definitionen lernen und mit diesen Begriffen sogar sinnvoll umgehen, auch wenn man sie nicht voll verstanden hat. Das echte Verständnis kann dann später nachfolgen, oft erst viel später.

3. Die Wissenschaft, die die wahre Meisterin in Sachen Anwendung von Definitionen ist, ist sicher die Mathematik. Denn in der Mathematik beschreibt die Definition ein Objekt nicht nur, sodass Sie es dann wiedererkennen. In der Mathematik bringt die Definition das mathematische Objekt erst hervor. Und zwar vollständig. Die Definition im Sinne von 2. muss überhaupt nicht besonders „genau“ sein, denn es wird weniger mit der Definition selbst gearbeitet. Diese dient überwiegend nur der Identifizierung des richtigen Gegenstandes.
   In der Mathematik hingegen „ist“ die Definition das Objekt; wenn ich es ein wenig überpointiert sagen darf. Deshalb und (fast) nur deshalb sind Definitionen in der Mathematik so extrem wichtig. Das funktioniert auch nur deshalb, weil die Mathematik es mit sehr einfachen Gegenständen zu tun hat, im Vergleich zu den Gegenständen anderer Wissenschaften. Und aufgrund des Umstands, dass diese neuen Gegenstände in *einfacher* Weise aus den bereits bekannten hervorgehen.

Wir verwenden Definitionen hier also zu dreierlei Zwecken: Um Zeichen überhaupt lesen zu können, um von bestimmten Dingen der Wirklichkeit zu sprechen und zur Schaffung von mathematischen Objekten.

Zeichen-, Sach- und mathematische Definition

Wenn Sie ein Zeichen schon kennen oder eine Sache oder ein mathematisches Objekt, das heißt: Wenn Sie Zeichen, Sache oder mathematisches Objekt wiedererkennen, dann haben Sie die Definition schon gelernt.

Verwechseln Sie bitte nicht, eine Definition kennen mit der Fähigkeit, einen Satz wie: „Eine Kraft ist …“ hersagen zu können. Sie kennen sehr viel, ohne es sprachlich oder wissenschaftlich derart benennen zu können. Im Rahmen Ihres Studiums der Physik, der Medizin, der Volkswirtschaft, der Biologie, der Chemie, des Maschinenbaus etc. werden Sie lernen, die typischen physikalischen, medizinischen, wirtschaftlichen, chemischen, technischen Sachverhalte *ausdrücklich* zu definieren. Sie benutzen aber sehr viel mehr Begriffe, die Sie alle kennen. Sonst können Sie Ihre Wissenschaft gar nicht betreiben.

Reden wir eigentlich noch von Formeln? Vom Formellesen? Ja, und wie!

Denn diese drei Anwendungen von „Definition“ beschreiben zugleich die notwendigen Vorrausetzungen, um Formeln nicht nur anschauen, sondern lesen zu können. Dabei gilt – wie schon erwähnt – das Minimumprinzip.

Das bedeutet, der Bereich, wo Sie am schlechtesten sind, begrenzt Ihr Verständnis der Formel. Trivial: Wenn Sie ein Zeichen nicht kennen, wissen Sie nicht, worum es geht. Wenn Sie zwar wissen, dass Y das Volkseinkommen bezeichnet, aber keine wissenschaftlich brauchbare Vorstellung von „Volkseinkommen“, kommen Sie auch nicht weit.

Selbst wenn Sie das alles aber gut beherrschen, aber mit einer Differentialgleichung nichts anfangen können, so verstehen Sie nicht einmal den in dieser Formel angedeuteten Zusammenhang.

Umgekehrt kann der souveräne Mathematiker den Ausdruck lesen, aber *nur* mathematisch. Er kann nur von den „Größen" Y, t, C_t, C_{t-1} usw. reden; nicht von Einkommen, Konsum, div. Zeitperioden.

Alle drei gehören zusammen. Sonst wird's nichts mit souveränem Formellesen. Sie werden allerdings verblüfft sein, wie viel Sie schon längst wissen; nur hat man Ihnen bisher nicht gezeigt, wie Sie all dieses schon vorhandene Wissen zusammenbringen können, um mit Formeln *souverän* umzugehen.

Das „Ergebnis" von Definitionen sind im weitesten Sinne Objekte, die wir dank der Definitionen erkennen und über die wir ebenso dank der Definition gemeinsam reden, diskutieren, streiten können. Definitionen sind der leichte Anfang für das eigentlich Interessante:

Eigenschaften

Jedes Objekt hat Eigenschaften, und zwar potentiell unendlich viele. Im Rahmen einer Wissenschaft sind zwar nur endlich viele Eigenschaften eines Objekts interessant, aber auch das sind meist hunderte und tausende. Ein Objekt „definieren" ist der Ausgangspunkt für Erkunden, Entdecken, Erforschen und Analysieren der Eigenschaften dieses Objekts. Dieses Buch etwa untersucht einige Eigenschaften von Formeln, genauer: Eigenschaften des verständigen Lesens von Formeln.

Dieser Unterschied zwischen Objekt (gemäß Definition) und den Eigenschaften dieses Objekts ist extrem wichtig.

► Das Objekt ist *der* Bezugspunkt für alle zugehörigen Eigenschaften.

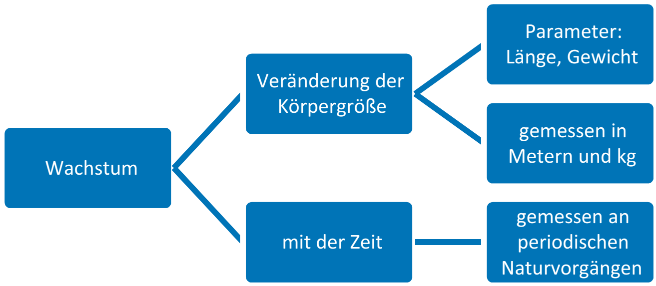
Wenn Sie das Objekt aus den Augen verlieren, verlieren Sie den Zusammenhang. Denn Eigenschaften für sich haben keinen Zusammenhang.

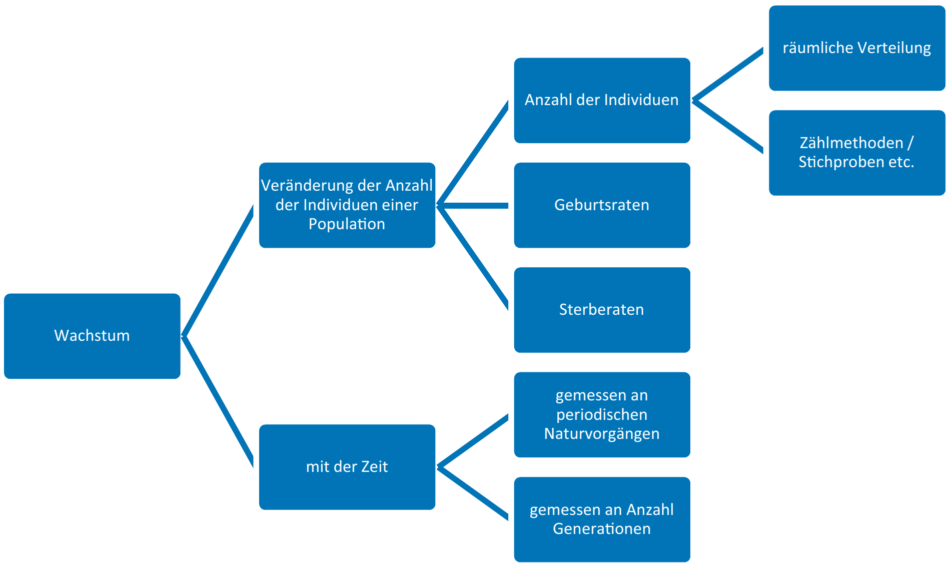
Zelldruck, Verdunstung an der Blattoberfläche, Anordnung von Tracheen, Dampfdruck des Wassers bei 70 % Luftfeuchtigkeit sind für sich völlig zusammenhanglos. Wenn Sie das aber alles immer und sehr bewusst auf den Wasserhaushalt einer Pflanze beziehen, so wissen Sie, wovon die Rede ist und wozu Sie das alles wissen. Eine einfache Definition von Pflanze, mit der man arbeiten kann, ist schnell gefunden. Weil wir alle schon einen brauchbaren Begriff von Pflanze haben. Brauchbar, um darüber zu reden; sicher noch nicht ausreichend für ein tieferes botanisches Verständnis.

Aber es genügt immer, dass man mit einer Definition – ganz wörtlich – „etwas anfangen" kann.

Wenn es nach dem Kennenlernen der Definition für mich nicht weitergeht, kann ich eben nichts damit anfangen; ich habe die Definition also noch nicht wirklich verstanden.

Zwei Beispiele, was man sich beim Thema „Wachstum" je nach Zusammenhang mindestens vergegenwärtigen sollte:





Bei beiden Darstellungen sind noch überhaupt keine Wechselwirkungen mit der Umwelt oder innerhalb des jeweils dargestellten Systems berücksichtigt. Dass eine weitere Vertiefung des Begriffs von „Wachstum“ erforderlich ist, versteht sich fast von selbst. Wir bleiben am Anfang aber bescheiden und sehen klar: Ich muss überhaupt erst einen mehr als nur ungefähren *Begriff* von „Wachstum“ haben, bevor ich mit einer Wachstumsformel zu hantieren beginne. Das muss ich *vor* jedem Blick auf eine Formel und *vor* jeder mathematischen Überlegung präsent haben.

Messbare Eigenschaften

Welche Aspekte der Beteiligten sind nun überhaupt der Mathematik zugänglich und können somit überhaupt sinnvoll in einen formelmäßig darstellbaren Zusammenhang gebracht werden? Die Antwort ist ganz einfach: Alles, was ich zählen oder messen kann. Nachdem man sich mit einem Akteur, einem Begriff allgemein vertraut gemacht hat, betrachten wir nun seine Eigenschaften:

Wir blicken auf Objekte der Astrophysik = Sterne, der Volkswirtschaftslehre = Volkswirtschaften und der Botanik = Pflanzen. Sterne, Volkswirtschaften und Pflanzen haben viele Eigenschaften. Einige davon sind zähl- oder messbar, viele andere sind es nicht. Drei Beispiele:

Sterne:	Farbe	keine messbare Eigenschaft		
	Masse	messbar	$\rightarrow$	Einheit: Kilogramm (kg)
	Volumen	messbar	$\rightarrow$	Einheit Kubikmeter (m^3)

Volkswirtschaft:		
Das Handeln wirtschaftender Menschen in einem Gebiet	keine messbare Eigenschaft	
Die Exportbeziehung zw. Land A und B	keine messbare Eigenschaft	
Der Export von Gütern	zählbar	Einheit: Stückzahl. Selten sinnvoll
Der Wert aller exportierten Güter	messbar	Einheit: Geldeinheiten.

Pflanze:		
Standort	keine messbare Eigenschaft	
Wuchsform	nicht messbar	
Höhe	messbar	Einheit: Meter (m), Zentimeter, (cm)
Trockensubstanz	messbar	Einheit: Kilogramm (kg), Gramm, (gr)
Größe einer Population	messbar	Einheit: Stück

Sie sehen an dieser kleinen Auflistung bereits, dass einige Eigenschaften der Objekte sehr gut, manche gar nicht und manche mit Schwierigkeit zählbar oder messbar sind. Und ebenso, dass nicht alles, was messbar ist, auch für das jeweilige Objekt interessant ist oder sinnvolles Wissen ergibt.

Wenn wir also mit unseren Objekten in die Mathematik einsteigen, so lassen wir einiges zurück: Die Sterne haben keine Farben, die Volkswirtschaften sind keine Länder mehr, es gibt keine konkreten Güter und Menschen mehr, die Pflanzen haben keine Orte mehr und keine Formen. Das alles bleibt draußen. Das alles finden Sie in den Formeln nicht wieder. Wenn Sie die Formeln mathematisch betrachten. Wir müssen aber all das, unsere wirklichen Sterne und wirklichen Volkswirtschaften und wirklichen Pflanzen gegenwärtig haben. Dann verstehen wir, was wir durch die Formel für unser Fachgebiet gewinnen können, wenn und insofern wir unsere Akteure zu mathematischen Akteuren machen. Und wir wissen damit auch, was das besondere unserer Wissenschaften ist, was genau nicht allgemein mathematisch, was nicht durch zählen und messen allein begriffen werden kann.

Unser Objekt der Wirklichkeit hat viele Eigenschaften. Einige davon sind zähl- oder messbar. Diese allein können wir zu mathematischen Akteuren werden lassen. Allerdings tauchen in vielen Formeln keine konkreten Werte und Zahlen auf, sondern nur „Größen“.

Das Wort Größe bezeichnet eine messbare Eigenschaft, aber ohne Angabe, wie diese „Größe“ gemessen wird. In der einfachen Formel $s = v \cdot t$, kurz: Der Weg ergibt sich als Produkt von Geschwindigkeit und Zeit werden nur Größen genannt: „Weg“, „Geschwindigkeit“, „Zeit“.

Wie aber messen wir? Wir messen durch den Vergleich einer Größe mit einem Maß.

Messen erfordert also ein Maß. Und eine Methode, wie wir dieses Maß in Beziehung zu dem zu messenden Objekt bringen können. Und eine Einheit, also jene „Größe“, zu der wir dann ein Vielfaches angeben können.

Die Größe „Weg“ wird mithilfe des Längenmaßes „Meter“ gemessen. Bis vor nicht allzu langer Zeit konnte man jenen Körper noch angreifen, der die Länge „ein Meter“ darstellte. Der Vergleich der Länge dieses „Urmeters“ mit unserem „Weg“ heißt „Messen“ und ergibt als Ergebnis ein Vielfaches dieses Urmeters.

Also etwa das 12000-fache. Die Angabe ist vollständig wenn ich sage, wovon dieser Weg das 12000-fache ist: Nämlich von diesem „Meter“. Das Maß für die Zeit kann sein soundso viel Sekunden, Minuten, Stunden, das Maß für die Geschwindigkeit Meter pro Sekunde, Kilometer pro Stunde; auch den Weg können wir statt in Metern in Meilen oder Kilometern messen.

Und da stoßen wir auf die interessante und für ein vertieftes Verständnis sehr wichtige Tatsache:

► Das Maß selbst kann man nicht messen.

Wie schwer ist 1 Kilogramm, wie lang ist 1 Meter, wie lange dauert 1 Sekunde? Jedes Maß endet in einem konkreten Gegenstand, einem konkreten Objekt, einer konkreten Tatsache in der Wirklichkeit. Messen heißt, die jeweilige Größe dazu in eine zahlenmäßig ausdrückbare Beziehung zu setzen.

Das alles ist nur wichtig, wenn Sie eine Formel auch in ihrer Entstehung und Anwendung vollständig begreifen wollen; einige Hinweise dazu finden Sie bei den Anwendungsbeispielen (Ermittlung von g, Lungenvolumen, VGR)

Die Elemente „Größe“, „Maß“, „Messmethode“, „Messwert“ und „Einheit“ stehen in vielfältigen Beziehungen zueinander. Eine Formel enthält entweder „Größen“ oder an deren Stelle das Produkt aus „Messwert $\times$ Einheit“.

► Durch das Zählen und Messen werden bestimmte Aspekte der Wirklichkeit auf Zahlen abgebildet.

Aus diesen so ermittelten elementaren Größen können viele weitere abgeleitet werden. Geschwindigkeit etwa ist schon so eine abgeleitete Größe aus Weg und Zeit. Wenn man davon spricht, dass man eine Geschwindigkeit „misst“, so spricht man genau genommen von der simultanen Messung von Weg und Zeit. Für das Verständnis der Geschwindigkeit als „Größe“ ist das ohne Bedeutung. Für die Frage der konkreten Messbarkeit aber nicht. Der Formelzusammenhang allein gibt an, ob das für uns wichtig ist oder nicht.

Was aber in jedem Falle hilfreich ist: Veranschaulichen Sie sich jede Formel, die Sie näher interessiert, durch konkrete Werte. Dadurch wird der Inhalt besser vorstellbar und Sie gewinnen zugleich größere Vertrautheit mit dem in der Formel dargestellten Phänomen. Sie gewinnen ein Gefühl für die Größen und Dimensionen und verbessern damit auch Ihre Urteilsfähigkeit.

Messen ist jener Vorgang, der unsere Größen in eine ganz konkrete Beziehung zu unserer Wahrnehmung und zur Wirklichkeit setzt, und deshalb ist eine ungefähre Vorstellung, wie die „Größen" in der Formel mit konkreten Werten und Einheiten versehen werden können, so wertvoll.

2.3 Formeln sind Sprache

Wir sprechen immer schon in Formeln. Wann immer wir Zusammenhänge zwischen verschiedenen Dingen herstellen, insbesondere quantitative Beziehungen, so sprechen wir Sachverhalte aus, die sich genauso gut auch als Formeln darstellen lassen.

Jeder versteht einen Satz wie „es wird kälter". Oder „meistens sind so vier fünf Gäste im Wirtshaus „Zu den drei Linden". Beides lässt sich als Formel schreiben. Es sind sprachliche Ausdrücke, die über eine bestimmte Sache etwas Quantitatives aussagen: Im ersten Fall, wie sich die Temperatur der Luft im Lauf der Zeit ändert, im zweiten Fall wird von der Schwankung der Gästezahl in einem Wirtshaus geredet.

Jetzt schreiben wir die Sache so:

1: $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t < 0$
2: mod(Gästezahl „Zu den drei Linden") $= 4{,}5$.

Schwierigkeiten? Oder können Sie sich einfach nur nicht mehr an die Zeichen und ihre Bedeutung erinnern?

Das kleine „d" steht für Differenz. Das große T für Temperatur und das kleine t für die Zeit (in lateinischen Zeiten „tempus", aber zum Glück auf auch Englisch „time"). Den Bruch-„/" kennen Sie sicher noch. Also steht da: Das Verhältnis der Differenz der Temperatur zur Differenz der Zeit ist kleiner als Null. Häh? Wenn Sie das *so* lesen, versteh' ich es auch kaum. Aber $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ heißt nichts anderes als die Temperaturänderung. Da man sich fast immer auf die Zeit bezieht, spricht man die Zeit oft gar nicht mit aus. Wenn man sich nicht auf die Zeit bezieht, muss man es ausdrücklich erwähnen. In der Formel wird $/\mathrm{d}t$ aber immer geschrieben. Diese Änderung einer Größe nach der Zeit ist so häufig, dass man als Zeichen dafür oft gar nur mehr einen Punkt „ $\dot{}$ " über der jeweiligen Größe macht, also in unserem Beispiel $\dot{T}$.

Wir sprachen also von der Änderung der ... Temperatur im Laufe der Zeit. Ist diese Änderung positiv, wird es klarerweise wärmer, ist sie negativ, so wird es kälter. Und wie schreiben wir nun „kälter"? „Die Änderung ist negativ" drückt man in Formeln gerne als „kleiner als Null" aus; denn da sind nun mal die Werte „negativ". Schon steht da „< 0".

Es steht hier also ganz einfach: „Es wird kälter."

Die Temperatur	ändert sich	im Laufe der Zeit	und zwar negativ.
$\mathrm{d}T$	$/$	$\mathrm{d}t$	< 0

Ich bringe dieses Beispiel aus mehreren Gründen so ausführlich.

Erstens sehen Sie, dass hier tatsächlich zuerst einmal „nur" eine sprachliche Umformung, eine Übersetzung vorliegt. Deshalb können Sie ja jede Formel, die etwas aussagt, auch „mit ganz normalen" Worten erklären.

Sie können das sogar als erste Grundregel nehmen: **Wenn Sie eine Formel nicht „sprechen" können**, oder Ihre eigene Rückübersetzung nicht verstehen, **dann haben Sie die Formel nicht verstanden**. Rein sprachlich nicht. Nach Durchlaufen dieses Kurses werden Sie es können. Eine Ausnahme stellen gelegentlich Berechnungsformeln dar; Formeln also, die nicht zur Darstellung eines Sachverhalts entwickelt wurden, sondern der Herstellung eines Rechenergebnisses dienen.

Zweitens sehen Sie, dass in Formeln ein völlig verändertes Zeichen*bild* vorliegt. Kaum ausgeschriebene Wörter, meist nur einzelne Buchstaben, Striche und andere Zeichen. Dieses veränderte Zeichenbild verstört unsere gewohnte Art und Weise des Lesens. Fast alle Ängste bezüglich Formeln setzen hier an: Es ist eine Verstörung der Sprache. Die Hilflosigkeit entsteht aus dem Nichtverstehen dessen, was da geschrieben, geheimnisvoll *gezeichnet* ist und dem, was darüber gesprochen wird.

Genau dieses *veränderte Zeichenbild* enthält aber die ungeheuren Möglichkeiten von Formeln. Zum Ausdrücken eines einzelnen Sachverhaltes braucht kein Mensch wirklich eine Formel. Ihre große Stärke entfalten Formeln aber dann für das weitere Vorgehen, vor allem im Zusammenspiel mit anderen Formeln.

Davon wollen wir noch nicht reden. Denn der größte Schritt ist erst einmal, *eine* Formel zu verstehen; und ich meine, wirklich zu verstehen.

In der gesprochenen Sprache ist Ihnen völlig klar, dass Sie einen Satz nicht verstehen, wenn Sie ein wichtiges Wort darin nicht verstehen. Dennoch zweifeln Sie nicht an Ihrer Sprachfähigkeit.

Wenn Sie daher einen *Satz* wie den folgenden lesen, verstehen Sie ihn zwar nicht vollständig. Dennoch haben Sie eine ungefähre Ahnung, worum es gehen könnte.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Irgendein Objekt, nämlich p, verändert sich in Hinblick auf z. Und die Größe dieser Änderung scheint einen konkreten Wert, nämlich ρg zu haben und der ist negativ. Also vermuten wir, dass diese Eigenschaft von p abnimmt, wenn z größer wird. Das ist so ähnlich wie die Bahnhofdurchsage „Der Zug nach qwafzilo fährt von Bahnsteig sdsxr mit sagfrtinuten Verspätung ab." Sie wissen zwar noch nicht genau, was Sie wissen sollten; aber Sie wissen schon wesentlich mehr als einer, der überhaupt nichts versteht. Und zum Glück hängt da auch noch der Zugfahrplan und wir finden rasch heraus:

qwafzilo ist der Luftdruck in der ruhenden Atmosphäre, sdsxr ist die Höhe über dem Erdboden. Die Verspätung habe ich auch nicht genau verstanden; Sie wissen aber, dass sie negativ ist und einen bestimmten Wert hat; wie alle Verspätungen. Das „p" erinnert an „pressure", und das „z" ist aus dem dreidimensionalen Koordinatensystem genommen: x und y bezeichnen die beiden Richtungen in der Ebene, mit z geht es nach oben. Falls Sie sich noch erinnern, dass der Punkt am Himmel direkt über Ihnen der Zenit ist ....

Also lautet die Bahnsteigdurchsage ungefähr so: Der Luftdruck nimmt mit der Höhe um einen bestimmten Wert ab. Was dieses $-\rho g$ genau bedeutet, wissen wir noch nicht. Und das ist sehr wichtig. Sie werden sehr sehr oft mit einer Formel so beginnen müssen, dass Sie zuerst einmal das an Information herausholen, was Sie wissen, ohne gleich alles erklären zu können. Aber auch über das, was Sie nicht genau erklären können, wissen Sie meist mehr, als Sie glauben. Wenn Sie nicht die Augen und Ohren einfach zu machen und sagen: Das versteh' ich nicht, das weiß ich nicht.

Ohne Kenntnis was p, z und ρg heißen, wissen Sie dennoch sehr viel: Sie wissen genau das, was da steht: p nimmt in Hinblick auf z um genau den Wert ρg ab.

Hier stehen wir aber an jenem Punkt, wo innerhalb derselben Sprache sehr leicht „das Thema" gewechselt wird, ohne dass wir es so recht mitbekommen. Solange wir davon sprechen, dass der Luftdruck mit der Höhe um einen bestimmten Wert abnimmt, sprechen wir von den Beziehungen von *realen Gegenständen der Wirklichkeit*. Dabei nehmen wir zwar von diesen Gegenständen bestimmte Eigenschaften, die wir messen können; aber wir reden von etwas, das wir mehr oder weniger sehen oder uns sinnlich vorstellen können.

Das Niederschreiben dieser Sachverhalte der geographischen, biologischen, physikalischen, medizinischen, chemischen, ökonomischen Wirklichkeit führt auf Formeln, die immer zugleich auch ganz anders betrachtet werden können; nämlich mathematisch.

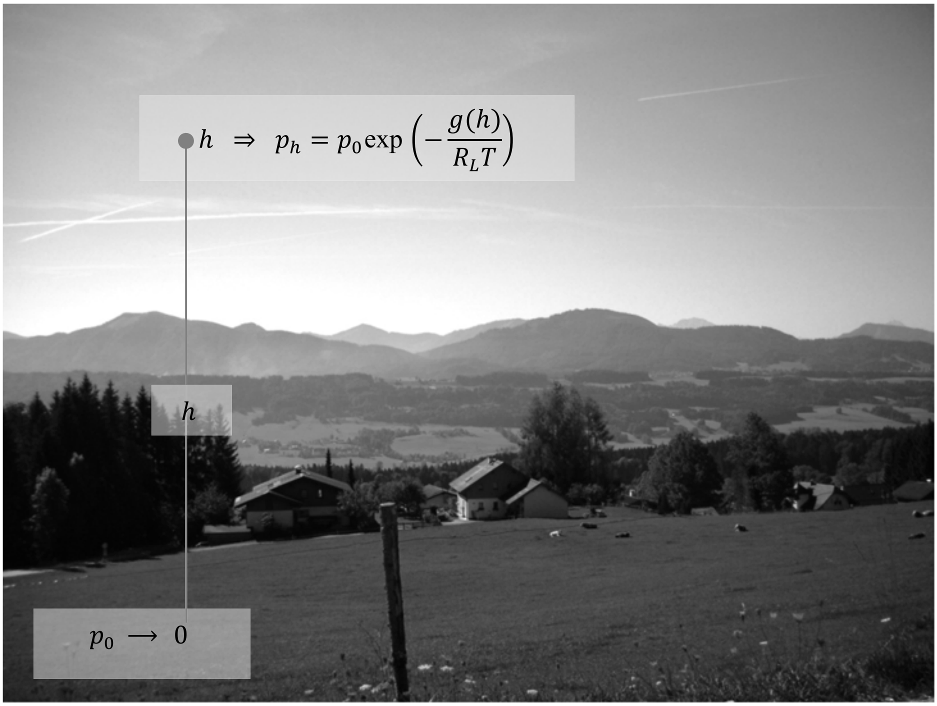
Der Mathematiker arbeitet mit derselben Formel, aber er nimmt T und t und p und z und ρ und g nurmehr als rein mathematische *Größen*, genauer: Mathematische *Objekte* mit *bestimmten Werten*.

Das heißt: *Dieselbe Formel* kann auf zwei unterschiedliche Arten gelesen werden: Im jeweiligen Sachzusammenhang oder „rein" mathematisch.

Wer in der Mathematik nur beschränktes Wissen hat, kann viele Formeln mathematisch nur unzureichend oder gar nicht analysieren. Dennoch kann man für das eigene Sachgebiet ziemlich viel auch aus solchen Formeln „herausholen", die man mathematisch nicht mehr vollständig versteht.

Deshalb blicken wir jetzt auf den Gesamtzusammenhang von Wirklichkeit, Mathematik und Formel, auf das „Formeldreieck". Mit dem Formeldreieck gewinnen wir die Gesamtübersicht über das System „Formel" und können uns jederzeit leicht orientieren und erkennen, wenn wir Schwierigkeiten haben, worin diese genau bestehen.

Ach ja, bevor bei „Zu den drei Linden" Sperrstunde ist: „Mod" ist die Abkürzung für modus, und das ist ein Begriff aus der Statistik und heißt nichts anderes als „der häufigste Wert". Wovon dieser Wert der häufigste ist, wird in einer Klammer () hinter „mod" geschrieben. Daher mod(Gäste „Zu den drei Linden"). Und da „so vier oder fünf" keine einzelne Zahl ist, bildet der Statistiker gerne daraus den Mittelwert. Bei vier und fünf also vierkommafünf. Falls wir nur von unserem Stammwirtshaus sprechen, eine Verwechslungsgefahr mit einem anderen Wirtshaus ausgeschlossen ist und wir statt „Gäste von" kurz „g" schreiben, so lautet der Satz: Bei meinem Wirt um die Ecke sind meistens vier bis fünf Gäste kurz: „$\mathrm{mod}(g) = 4{,}5$." Prost.



... und immer sprechen wir eigentlich davon, wenn wir Formeln analysieren: Von dem, was sie uns über die Wirklichkeit erzählen, was wir ohne sie vielleicht gar nicht erkennen könnten. Hier etwa wird beschrieben, nach welchem Gesetz der Luftdruck mit der Höhe abnimmt. Hier steht, dass der Luftdruck mit der Höhe exponentiell abnimmt, und dass der Grad dieser Abnahme von der Schwerkraft g und den Eigenschaften der Luft als Gas sowie ihrer Temperatur abhängt.

2.4 Aller guten Dinge sind drei: Das Formeldreieck

Jede Formel hat ein Thema. Dieses Thema wird dargestellt durch die Vereinigung von Sachobjekten mit mathematischen Objekten und ausgewählten mathematischen Beziehungen. Diese Beziehungen zwischen mathematischen Objekten sind die Abbildungen bestimmter Beziehungen zwischen den Sachobjekten.

Es ergeben sich daher für jede Formel folgende elementaren Beziehungen:

- Die Sachobjekte werden auf mathematische Objekte abgebildet.
- Es werden ganz bestimmte Beziehungen zwischen den Sachobjekten untersucht.
- Diese Beziehungen zwischen den Sachobjekten werden auf Beziehungen zwischen den mathematischen Objekten abgebildet.

In der Formel finden wir in einer ganz elementaren Zeichensprache *zugleich* diese ausgewählten sachlichen Beziehungen wie die mathematischen Beziehungen abgebildet.

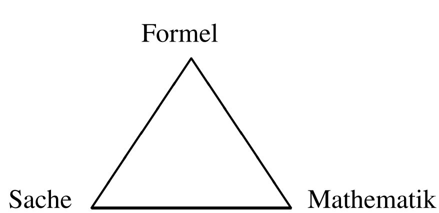
Welche Beziehungen zwischen verschiedenen Sachobjekten können in Formeln abgebildet werden?

- Ganz allgemein jede Art von „Zusammenhang".
- Das gleichzeitige Auftreten mehrerer Objekte der gleichen Art
- Das Zusammenwirken mehrerer Objekte und Beziehungen,
- insbesondere die gegenseitige Verstärkung oder
- die gegenseitige Abschwächung.
- Begrenzungen von Wirkungen
- Mindestanforderungen an bestimmte Eigenschaften
- Wechselwirkungen und gegenläufige Entwicklungen
- Es können aber auch Gegenstände und Sachobjekte zu sich selbst in Beziehung gesetzt werden, nämlich zu unterschiedlichen Zeitpunkten oder im Zeitverlauf.

Beachten Sie, dass all diese Beziehungen von den Möglichkeiten der Objekte der Wirklichkeit abhängen. Diese Beziehungen kann man qualitativ durchdenken, lange bevor man überhaupt an „Formeln" und Mathematik nur denkt. Dass in all diesen Begriffen „Mathematik" gegenwärtig ist, fällt einem im Alltag oft gar nicht auf. Wenn Sie Ihre Aufmerksamkeit in Ihrem Fachgebiet einmal darauf gelenkt haben, so merken Sie, wie allgegenwärtig solche Zusammenhänge sind, und dass die Verwendung von Formeln an bestimmten Stellen nahezu eine Selbstverständlichkeit für Sie wird.

Da es in Formeln immer um einen oder mehrere dieser Zusammenhänge geht, muss ich Folgendes im Blick haben: Den Zusammenhang der Zeichen, den Sachzusammenhang, den mathematischen Zusammenhang. Oder falls Sie diese Worte cooler finden:

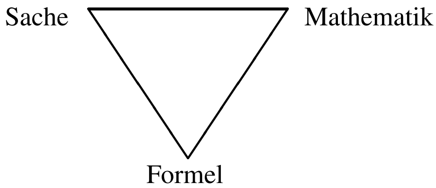
Die Sachlogik, die Zeichenlogik, die mathematische Logik.



Das lässt sich gut als Dreieck darstellen als „Formeldreieck".

Es gilt, klar und deutlich zwischen diesen dreien zu unterscheiden. Natürlich, ganz ohne minimale Mathematik und minimale Sachkenntnis geht es nicht. Sie können ja auch keinen verständlichen Satz ohne Inhalt bilden. Deshalb werden in den nächsten Abschnitten die elementare Mathematik und einfache Sachverhalte aus verschiedenen Gebieten benutzt, um das Lesen von Formeln zu erlernen.

Wenn Sie aber bei der Beschäftigung mit Ihrem Fachgebiet auf eine Formel stoßen und nicht weiterwissen, achten Sie genau darauf, *was* Ihr Problem ist.



In der Darstellung oben habe ich die Formel ganz prominent platziert: Oben, da sie in diesem Buch das Hauptthema ist. Aber eigentlich passt die folgende Anordnung besser; denn die Formel hat eine Vermittlungsfunktion.

Genau diese Struktur ist aber „schuld" daran, dass Formeln selbst noch kaum ein Buch gewidmet wurde und sich jeder Fachbuchautor aufs Neue ein paar Absätze oder ganze Kapitel abringen muss, um das mathematische und formelmäßige Werkzeug bereitzustellen.

Woran jemand Schwierigkeiten hat, kann man anhand des Formeldreiecks nun viel genauer feststellen. Dazu genügt die Beantwortung von drei Fragen.

Erste Frage: Kann ich **Formeln** lesen, obwohl ich weder mathematisch noch sachlich alles verstehe? Geht das überhaupt? Ja! Sie werden nach Durchlaufen des Grundkurses erstaunt sein, wieviel Sie aus einer Formel herauslesen können ohne irgendetwas Genaueres zur speziellen Mathematik oder dem Fachgebiet zu wissen. In Zukunft sollte die Antwort auf diese Frage immer „Ja" sein.

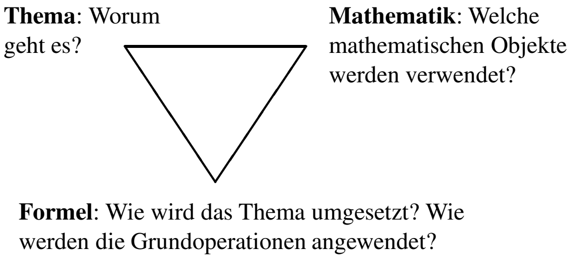
Zweite Frage: Verstehe ich den **mathematischen** Zusammenhang und kann ihn ohne eine Formel zu benutzen erklären? Wenn nein, so lesen Sie unbedingt das Kapitel „die glorreichen Sieben" sowie „eine kleine Algebra". Denn vielleicht verstehen Sie einen mathematischen Ausdruck zwar nicht mathematisch in aller Tiefe, verstehen aber schon seinen mathematische Sinn und Zweck.

Dritte Frage: Kann ich ohne eine Formel zu benutzen oder in die Mathematik zu flüchten einen **Sachverhalt** meines Fachgebietes beschreiben und in seinen Grundlagen erklären? Das ist eigentlich die Schlüsselfrage, ob Sie Ihr Fachgebiet „im Griff" haben. Wenn Sie die Sache nicht *qualitativ* und rein *strukturell* erklären können, haben Sie das Thema noch nicht vollständig verstanden. Selbst wenn Sie eine schöne Formel hinschreiben (bei der Prüfung dafür sogar gelobt werden) und mathematisch toll erklären (macht Eindruck). Ich werde daher in den Beispielen darauf drängen, dass Sie das, was Sie in der Formel „lesen" auch in der Wirklichkeit wiederfinden. Konkret, mit allen fünf Sinnen und mit möglichst genauen Vorstellungen.

Beim Anblick jeder Formel sollten Sie immer diese drei „Eckpunkte" des Formeldreiecks vor Augen haben.

Es gibt das so genannte „Minimumprinzip", das aus dem Bereich der Landwirtschaft stammt. Wenn für das Wachstum einer Pflanze Wasser, Nährstoffe und Licht erforderlich sind, so ist das Wachstum durch den knappsten Faktor begrenzt. Wenn ausreichend

Wasser und Nährstoffe zur Verfügung stehen, aber nur sehr wenig Licht, so wächst die Pflanze schlecht. Wenn ausreichend Licht und Nährstoffe vorhanden sind, aber nur begrenzt Wasser, so bringt eine Steigerung der Lichtintensität und Nährstoffmenge auch nichts.



Genauso bitte ich Sie, das Verständnisdreieck zu lesen.

Das, wovon jemand am wenigsten Ahnung hat, bestimmt, wie viel er in der jeweiligen Formel überhaupt verstehen *kann*. Und da hat die Erfahrung gezeigt, dass es sehr oft nicht die „höhere“ Mathematik ist, die uns behindert, sondern die Auseinandersetzung mit dem eigenen Fach und die Bedeutung der ganz elementaren mathematischen Grundoperationen.

Kleine Vertiefung zum Formeldreieck

Das Formeldreieck fungiert in diesem Buch als Orientierungshilfe. Sollten Sie allerdings tiefer in die Materie „Formel“ einsteigen wollen, so bietet diese Darstellung noch eine Menge weiterer Möglichkeiten, die ich hier für Interessierte skizziere.

Die Orientierung an den Eckpunkten „Sachobjekt“, „mathematische Objekte“, „Formel“ bildet nur den Rahmen. Interessant sind vor allem die Beziehungen zwischen den Eckpunkten, die Seiten und die Beziehungen dieser Seiten zueinander, sowie der Ecken zu den gegenüberliegenden Seiten.

Die Beziehung Sachobjekt zu mathematischem Objekt haben wir schon angedeutet. Hier geht es um die mögliche Repräsentation des Gegenstands in der Mathematik. Je nach Fragestellung aber auch um die Messbarkeit.

Die Seite Sachobjekt–Formel enthält die hier nicht untersuchte Frage, wie allgemeine Beziehungen zwischen den Sachobjekten überhaupt dargestellt werden können.

Die analoge Frage ist auf der anderen Seite des Dreiecks, auf der Seite mathematische Objekte–Formel natürlich schon bestens untersucht und bekannt. Damit deutet sich an, dass diese linke Seite des Dreiecks auf die rechte, die mathematische Seite abgebildet wird.

Dadurch wird die Formel in Folge zu einer algebraischen Formel, die die Beziehungen der Sachobjekte ausschließlich als eine *mathematische Analogie* untersucht. Denn das Ziel „vom Sachobjekt“ zur Formel kann nicht über eine direkte Abbildung dieser Beziehungen zur Formel erreicht werden, sondern führt „übers Eck“, nämlich über die mathematische Ecke.

Diese Abbildung ist daher gleichsam zweifach gebrochen: Einmal durch die Art der Abbildung der Objekte auf die mathematischen Objekte, zum anderen durch die Beschränkung und Auswahl der Objektbeziehungen auf die möglichen mathematischen Beziehungen.

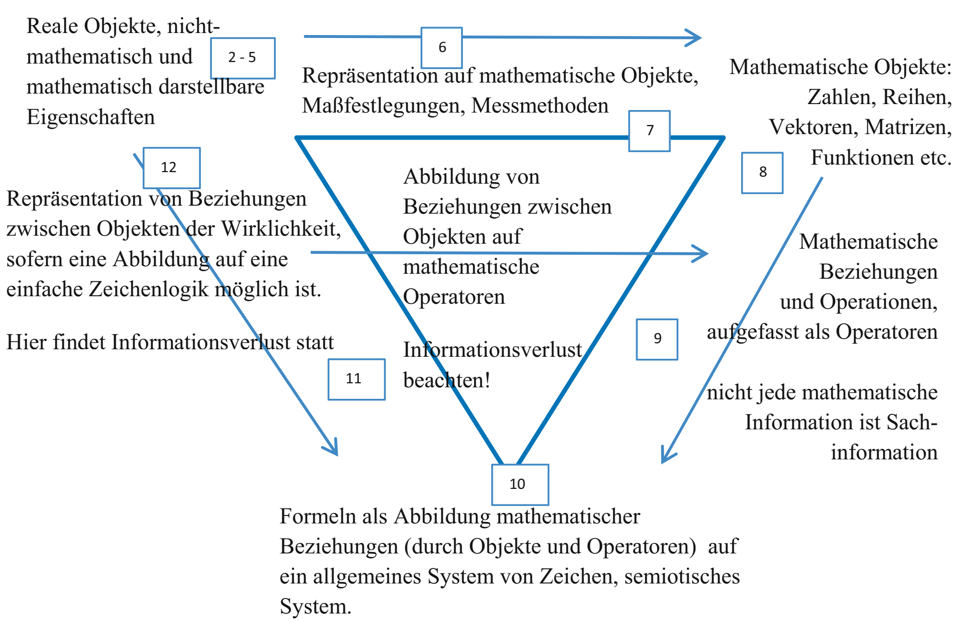
In der Formel nun kann allein aufgrund der Zeichenlogik diese mathematische Beziehung vollständig und eindeutig abgebildet werden; was – und das ist für das Verständnis einer Formel als Abbild „wirklicher" Beziehungen wesentlich ist – nicht in dieser eindeutigen Weise gilt.

Die eindeutige Abbildung besteht auf der rechten Seite, nicht auf der linken.

Betrachtet man nun die Ecken und die jeweils gegenüberliegenden Seiten, so findet man gleichsam die jeweiligen Bedingungen für die Auswahl der Objekte bzw. deren Eigenschaften.

Aber auch die Abbildung der Beziehungen steht unter Bedingungen, nämlich unter mathematischen. Nicht jede mathematische Beziehung kann die gewünschte Sachbeziehung direkt abbilden. Sie steht selbst unter mathematischen Nebenbedingungen, unter Abbildungsfehlern, die man manchmal mit mathematischen Mitteln ausgleichen kann, manchmal nicht. Oft ist dafür auch entscheidend, ob man eine Formel noch handhaben kann oder nicht. Formeln für theoretische Zwecke müssen andere Eigenschaften haben als Formeln, die als Werkzeug zur Berechnung von konkreten Werten dienen sollen usw.

Mathematische Objekte und Operationen haben mathematische Eigenschaften, diese sind nicht immer optimal für die Abbildung bestimmter Sachbeziehungen geeignet. Daraus entstehen mathematische Nebenbedingungen, die nichts mit den sachlichen Beziehungen zu tun haben, deren Kenntnis für ein vertieftes Verständnis der Formel aber sehr hilfreich ist.



Die Zahlen beziehen sich auf die Graphik zur Entstehungsgeschichte einer Formel. Beachten Sie, wie sich auch darin wieder der „Umweg“ über die mathematische Ecke zeigt.

Die vertiefte Informationsauswertung und die Feststellung des maximalen Informationsgehalts einer Formel sind nicht mehr Thema dieser Darstellung.

http://www.springer.com/978-3-658-10087-2

Formeln rasch erfassen und sicher nutzen
für Ingenieure, Natur- und Betriebswissenschaftler
Höfer, R.
2015, V, 172 S. 29 Abb., 10 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-10087-2