3 Grenzwertrechnung

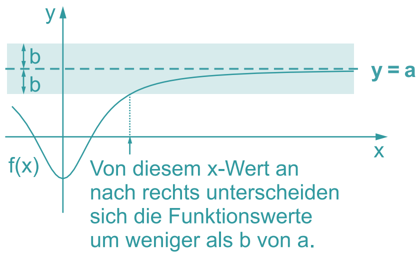
Mithilfe der Grenzwertrechnung lässt sich das Verhalten von Funktionen im „Unendlichen“ oder an einzelnen Definitionslücken beschreiben.

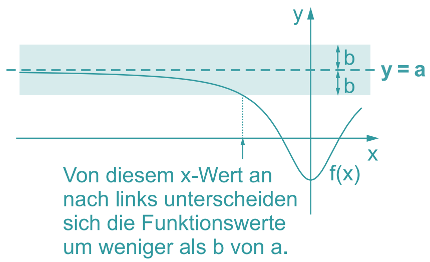
3.1 Grenzwerte vom Typ $x \to \pm\infty$

Funktionen mit rechts- bzw. linksseitig unbegrenzter Definitionsmenge sind im Unendlichen konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent.

(A) Konvergenz

Kommen die Funktionswerte, wenn x gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ strebt, einer bestimmten Zahl a beliebig nahe, so spricht man von **Konvergenz**.
Dabei bedeutet „beliebig nahe“, dass es zu jedem (noch so schmalen) Schlauch der Breite 2b um die Gerade $y = a$ einen x-Wert auf der x-Achse gibt, von dem an der Funktionsgraph „auf seinem Weg nach rechts bzw. links“ in den Schlauch eintaucht und ihn nie mehr verlässt.
Abkürzend schreibt man:
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$,
wenn f für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ gegen a konvergiert.





Konvergieren zwei Funktionen im Unendlichen, so konvergieren auch deren Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten im Unendlichen:

Regel

Grenzwertsätze

Sind f: $x \mapsto f(x)$, $x \in \mathbb{D}_f$ und g: $x \mapsto g(x)$, $x \in \mathbb{D}_g$ reelle Funktionen mit

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = p \text{ und } \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = q,$$

so gilt:

a) Grenzwert einer Summe = Summe der Grenzwerte:

$$\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = p+q \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to -\infty} (f+g)(x) = p+q$$

b) Grenzwert einer Differenz = Differenz der Grenzwerte:

$$\lim_{x \to +\infty} (f-g)(x) = p-q \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to -\infty} (f-g)(x) = p-q$$

c) Grenzwert eines Produkts = Produkt der Grenzwerte:

$$\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = p \cdot q \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to -\infty} (f \cdot g)(x) = p \cdot q$$

d) Grenzwert eines Quotienten = Quotient der Grenzwerte:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f}{g}(x) = \frac{p}{q} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f}{g}(x) = \frac{p}{q}, \quad \text{falls } q \neq 0$$

(B) Bestimmte und unbestimmte Divergenz

- Überschreiten die Funktionswerte jede (noch so große, positive) reelle Zahl, wenn x gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$ strebt, sagt man, dass **f bestimmt gegen $+\infty$ divergiert** und schreibt dafür kurz:

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

  Eine nach oben offene Parabel ist ein Beispiel für den Graphen einer Funktion, die bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, wenn x gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ strebt.
- Unterschreiten die Funktionswerte jede (noch so kleine, negative) reelle Zahl, wenn x gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$ strebt, sagt man, dass **f bestimmt gegen $-\infty$ divergiert** und schreibt dafür kurz:

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

  Eine nach unten offene Parabel ist ein Beispiel für den Graphen einer Funktion, die bestimmt gegen $-\infty$ divergiert, wenn x gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ strebt.

Da es sich bei den Grenzwerten $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ nicht um Zahlen handelt, spricht man von **uneigentlichen Grenzwerten**.