4 Skalarprodukt

Die Addition und skalare Multiplikation von Vektoren haben Sie bereits kennengelernt. Nun stellt sich die Frage, ob man auch die Multiplikation zweier Vektoren sinnvoll definieren kann. Ein mögliches Produkt und seine Eigenschaften werden in diesem Kapitel vorgestellt. Für metrische Berechnungen (Längen und Winkel) mithilfe von Vektoren ist dieses Hilfsmittel unverzichtbar.

4.1 Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts

In diesem Kapitel lernen Sie ein Produkt zwischen zwei Vektoren kennen, das durch seine Eigenschaften in vielen wichtigen geometrischen Fragestellungen Anwendung findet. Der Name Skalarprodukt weist darauf hin, dass das so definierte Produkt zweier Vektoren ein Skalar, also eine reelle Zahl ist. Ein weiteres Produkt zwischen Vektoren lernen Sie in Kapitel 6 kennen.

Definition

Das **Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$** zwischen zwei reellen Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist definiert als:

$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Bei zweidimensionalen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt sich entsprechend:

$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Beispiel

Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -12 + 8 + 6 = 2$$

$$\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (5 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 0 \cdot 4) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (5 - 12 + 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -7 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ -7 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Achten Sie auf den Unterschied zwischen dem Zeichen „∘“ für Skalarprodukt und „·“ für die skalare Multiplikation. Das Ergebnis des ersteren ist eine Zahl, das Ergebnis des letzteren ein Vektor. Die skalare Multiplikation hat dabei Vorrang vor dem Skalarprodukt. In diesem Buch wird konsequent das Zeichen „∘“ für das Skalarprodukt verwendet.

Das Skalarprodukt besitzt einige wichtige Eigenschaften.

Regel

Eigenschaften des Skalarprodukts

- Das Skalarprodukt ist **kommutativ**: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- Das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{a}$ eines Vektors mit sich selbst ist nie negativ: $\vec{a} \circ \vec{a} \geq 0$
  Man schreibt: $\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2$
- Das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{a}$ eines Vektors mit sich selbst ist genau dann gleich null, wenn $\vec{a}$ der Nullvektor ist, also für $\vec{a} = \vec{o}$.
- Für das Skalarprodukt gilt das **Distributivgesetz**: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

Diese Eigenschaften lassen sich leicht nachweisen; dafür greift man immer auf die Definition des Skalarprodukts zurück.

Beispiel

Beweisen Sie das Kommutativgesetz für das Skalarprodukt.

Lösung:
Nach der Definition gelten folgende beiden Gleichungen:
$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ und $\vec{b} \circ \vec{a} = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$
Die jeweils rechten Seiten dieser Gleichungen stellen Terme in der Menge der reellen Zahlen dar. Für diese Terme gilt bekanntermaßen das Kommutativgesetz, sodass wegen $a_1b_1 = b_1a_1$ bzw. $a_2b_2 = b_2a_2$ bzw. $a_3b_3 = b_3a_3$ in der Menge der reellen Zahlen gilt:
$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$
Somit sind auch die linken Seiten der beiden Gleichungen gleich, d. h. $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$.
Das Kommutativgesetz gilt folglich auch für das Skalarprodukt.

Aufgrund der Eigenschaften des Skalarproduktes können Sie also mit dieser Multiplikation von Vektoren genauso rechnen wie mit der Multiplikation von Zahlen. Unter anderem gelten die binomischen Formeln, z. B.:
$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{b}^2$ (vgl. Aufgabe 35)

Aufgaben

29. Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$　　b) $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -s \\ r \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$　　d) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$

30. Bestimmen Sie die Zahl a so, dass das Skalarprodukt die angegebenen Werte besitzt.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 8$　　b) $\begin{pmatrix} a \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$

31. Beweisen Sie, dass für das Skalarprodukt gilt:

a) $\vec{a} \circ \vec{a} \geq 0$ für alle Vektoren $\vec{a}$

b) $\vec{a} \circ \vec{a} = 0$ nur für $\vec{a} = \vec{o}$

c) Distributivgesetz: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

d) Für $k \in \mathbb{R}$ gilt: $k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b}$