Holzmann/Meyer/Schumpich Technische Mechanik Kinematik und Kinetik

Bearbeitet von
Conrad Eller, Hans-Joachim Dreyer

12., überarbeitete und erweiterte Auflage 2016. Taschenbuch. XII, 367 S. Softcover
ISBN 978 3 658 12123 5
Format (B x L): 16,8 x 24 cm

Weitere Fachgebiete > Technik > Werkstoffkunde, Mechanische Technologie > Statik, Dynamik, Kinetik, Kinematik

Zu Inhaltsverzeichnis

schnell und portofrei erhältlich bei

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

2 Kinetik des Massenpunktes

Als Aufgabe der *Kinematik* haben wir herausgestellt, eine Bewegung möglichst einfach und vollständig zu beschreiben. In der Kinematik wird *nicht* untersucht, welche Ursachen für die Änderung des Bewegungszustandes eines Körpers verantwortlich sind und nach welchen Gesetzen eine Bewegung erfolgt.

Die Ursachen für die Bewegungsänderung eines Körpers nennen wir Kräfte.

Die Aufgabe der *Kinetik* ist nun, den Zusammenhang zwischen den auf einen Körper wirkenden Kräften und der unter dem Einfluss dieser Kräfte ablaufenden Bewegung zu ermitteln. Diese Aufgabe hat *Newton* (1643 bis 1727) durch das von ihm angegebene *Grundgesetz* gelöst, indem er den Kraftbegriff mit dem kinematischen Begriff Beschleunigung verknüpfte. Die Kinetik wird durch das *Newton*sche Grundgesetz und die anderen *Newton*schen Axiome beherrscht.

2.1 Das Newtonsche Grundgesetz

2.1.1 Das Grundgesetz und die Axiome der Kinetik

Durch das erste *Newton*sche Axiom – das *Trägheitsaxiom* (s. Band *Statik*, Abschn. 2.2.1) – wird der Begriff *Kraft* eingeführt. Das *Trägheitsaxiom* lautet:

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange er nicht durch Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

Bei geradliniger gleichförmiger Bewegung ist der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ konstant. Ändert sich der Geschwindigkeitsvektor bei einer Bewegung, d. h., wird der Körper beschleunigt ($\vec{a} \neq \vec{0}$), so wird nach dem Trägheitsaxiom die Ursache für die Beschleunigung als Kraft bezeichnet. Das Trägheitsaxiom sagt jedoch nichts darüber aus, wie man Kräfte miteinander vergleichen, d. h. messen kann. Dies geschieht in dem zweiten *Newton*schen Axiom, dem *Newton*schen Grundgesetz.

Wir erläutern das *Newton*sche Grundgesetz an Hand eines Experimentes. Auf einen leicht beweglichen Wagen (Schienenführung, Kugellager) wird ein Körper K_I gelegt (**Bild 2.1**). Der Wagen wird durch ein über eine Rolle führendes Seil mit einem zweiten Körper Q_1 verbunden.

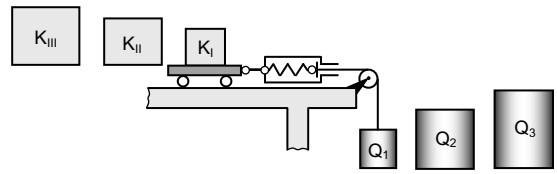


Bild 2.1:
Versuche zum *Newton*schen Grundgesetz

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2016
C. Eller, *Holzmann/Meyer/Schumpich Technische Mechanik Kinematik und Kinetik*, DOI 10.1007/978-3-658-12124-2_2

Überlässt man dieses Körpersystem sich selbst, so kommt der Wagen in Bewegung. Durch Messen stellt man fest, dass seine Beschleunigung a_{I1} konstant ist. Nach dem Trägheitsaxiom ist die Ursache für die Beschleunigung eine Kraft. Die Ursache für die Beschleunigung des Wagens ist offenbar der angehängte Körper Q_1. Also übt der Körper Q_1 auf den Wagen eine Kraft aus, die wir mit F_1 bezeichnen wollen. Wir wiederholen den Versuch, indem wir auf den Wagen verschiedene Körper legen und an das Seil verschiedene Körper hängen.

1. Versuchsreihe Wir hängen an das Seil nacheinander die Körper Q_1, Q_2, Q_3,... Dabei stellen wir fest, dass jedesmal die Beschleunigung des Wagens, also auch die auf den Wagen wirkende Kraft, eine andere ist, wie die Verlängerung der Feder zeigt. Wir setzen fest:

Festsetzung 1. Die Kraft soll der durch sie hervorgerufenen Beschleunigung des Wagens proportional sein

$$F \sim a \tag{2.1}$$

Erteilt z. B. der Körper Q_2 dem Wagen mit dem Körper K_{I} eine dreimal so große Beschleunigung wie der Körper Q_1, so soll nach dieser Festsetzung die Kraft F_2, die der Körper Q_2 auf den Wagen ausübt, das Dreifache der Kraft F_1 betragen. Die Beziehung Gl. (2.1) können wir auch in der Form einer Gleichung schreiben

$$a = c_1 F \qquad c_1 \text{ Proportionalitätskonstante} \tag{2.2}$$

Aufgrund der vorstehenden Festsetzung können wir Kräfte miteinander vergleichen, wenn sie auf denselben Körper wirken.

2. Versuchsreihe Wir legen auf den Wagen verschiedene Körper K_{I}, K_{II}, K_{III}, ... und wählen für die Beschleunigung solche Körper Q_{i}, dass die Verlängerung der Feder zwischen Wagen und Seil während des Beschleunigungsvorgangs jedesmal dieselbe ist (**Bild 2.1**). Die Beschleunigung des Wagens ist also bei jedem Versuch wiederum eine andere. Da die Verlängerung der Feder gleich bleibt, folgern wir, dass bei jedem Versuch auf den Wagen dieselbe Kraft ausgeübt wird. Dieser Versuch zeigt: Verschiedene Körper erfahren durch die Wirkung derselben Kraft verschiedene Beschleunigungen.

Die Eigenschaften der Körper, durch gleiche Kräfte verschieden beschleunigt zu werden, wird als *träge Masse m* bezeichnet.

Wir setzen fest, dass Körper, die durch die Wirkung derselben Kraft eine kleinere Beschleunigung erfahren, eine größere träge Masse besitzen oder genauer:

Festsetzung 2. Die trägen Massen der Körper sind den Beschleunigungen, die diese Körper durch dieselbe Kraft erfahren, umgekehrt proportional

$$m \sim \frac{1}{a} \tag{2.3}$$

Auch diese Festsetzung können wir in Form einer Gleichung schreiben

$$m = c_2 \frac{1}{a} \qquad \text{oder} \qquad a = \frac{c_2}{m} \qquad c_2 \text{ Proportionalitätskonstante} \tag{2.4}$$

Die Beziehungen Gl. (2.1) und (2.3) sagen aus, dass die Beschleunigung eines Körpers der auf ihn wirkenden Kraft proportional und seiner trägen Masse umgekehrt proportional ist. Sie können zu *einer* Beziehung

$$a = c\frac{F}{m} \qquad c \text{ Proportionalitätskonstante} \tag{2.5}$$

zusammengefasst werden. Setzt man in Gl. (2.5) die Konstante $c = 1$ und definiert die Kraft als vektorielle Größe, die die Richtung der Beschleunigung hat, so folgt aus Gl. (2.5) das

*Newton*sche Grundgesetz

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \tag{2.6}$$

Die an einem Körper angreifende Kraft und die durch sie hervorgerufene Beschleunigung sind gleichgerichtet und einander proportional.

Das *Newton*sche Grundgesetz wird auch als *dynamisches Grundgesetz* bezeichnet. Die in Gl. (2.6) als Proportionalitätskonstante auftretende träge Masse m ist, wie die Versuche zeigen, von der Gestalt, der Temperatur, dem Aggregatzustand usw. des Körpers unabhängig. Sie ist eine Größe, die geeignet ist, die „Stoffmenge“ zu messen.

Durch das *Newton*sche Grundgesetz werden zugleich zwei Größen – *Kraft* und *träge Masse* – eingeführt und durch die kinematische Größe *Beschleunigung* miteinander verknüpft. Die Einheiten für Kraft und träge Masse können daher nicht unabhängig voneinander festgelegt werden.

Im *Internationalen Maßsystem* wählt man als dritte Grundgröße der Mechanik neben *Länge* und *Zeit* die *träge Masse*. Ihre Einheit nennt man das *Kilogramm* (kg).

Ein Kilogramm ist die träge Masse eines in Paris aufbewahrten Normalkörpers aus Platin-Iridium, das Urkilogramm.

Die Kraft ist damit im Internationalen Maßsystem eine abgeleitete Größe. Ihre Einheit ist das *Newton* (N).

Nach dem Grundgesetz folgt mit $F = m\,a$

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot 1\ \mathrm{m/s^2} = 1\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s^2}} \tag{2.7}$$

Ein N ist die Kraft, die der Masse 1 kg die Beschleunigung 1 m/s^2 erteilt.

Vielfache dieser Einheit sind: 1000 N = 1 kN (Kilonewton), 10^6 N = 1 MN (Meganewton).

Lässt man einen Körper aus der Ruhelage frei fallen, so bewegt er sich beschleunigt in Richtung auf die Erdoberfläche. Wie Versuche zeigen, erfahren dabei alle Körper in Erdnähe am gleichen Ort (im luftleeren Raum) dieselbe Beschleunigung, die *Normalfallbeschleunigung* $g = 9{,}80665$ m/s^2 $\approx 9{,}81$ m/s^2 (am Äquator ist $g = 9{,}781$ m/s^2 und an den Polen 9,831 m/s^2).

Wir schließen daraus, dass die Erde auf die Körper eine Anziehungskraft ausübt, diese wird als *Gravitations-* oder *Gewichtskraft* bezeichnet. Da verschiedene Körper beim freien Fall die gleiche Beschleunigung erfahren, schließen wir:

Die Gewichtskraft F_G ist der trägen Masse m der Körper proportional. Der Vektor der Gewichtskraft ist mit dem Vektor der Fallbeschleunigung gleichgerichtet.

$$\boldsymbol{F_G = m\,g} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\vec{F}_G = m\,\vec{g}} \tag{2.8}$$

Mit g = 9,81 m/s² können aus Gl. (2.8) mit für technische Belange ausreichender Genauigkeit bei bekannter Gewichtskraft die Masse und bei bekannter träger Masse die Gewichtskraft der Körper berechnet werden.

Massenpunkt Führt ein Körper eine reine Parallelverschiebung aus (wie z. B. der Wagen in **Bild 2.1**), so haben alle seine Punkte die gleiche Geschwindigkeit und Beschleunigung. Zur Beschreibung der Bewegung des Körpers genügt es dann, die Bewegung eines seiner Punkte anzugeben. Die Untersuchung der Bewegung des Körpers kann in einem solchen Fall durch die Untersuchung der Bewegung eines geometrischen Punktes ersetzt werden, an dem man sich die Kraft angreifend denkt und dem die gesamte träge Masse m des Körpers zugeordnet wird.

Das idealisierte Gebilde (Modellvorstellung) aus dem geometrischen Punkt mit der zugeordneten trägen Masse bezeichnet man als Massenpunkt.

Bei allgemeiner Bewegung eines starren Körpers haben alle seine Punkte verschiedene Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Wie später gezeigt wird (Abschn. 5), kann jedoch die Bewegung eines starren Körpers durch die seines *Schwerpunktes* und eine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse beschrieben werden. Interessiert man sich nur für die Bewegung des Schwerpunktes, so kann die Untersuchung dieser Bewegung dadurch erfolgen, dass man dem Schwerpunkt die gesamte träge Masse des Körpers zuordnet und die Bewegung des so erhaltenen Massenpunktes untersucht. Ein Fahrzeug auf der Straße oder ein Flugzeug in der Luft kann man z. B. als Massenpunkt ansehen, sofern ihre Drehungen nicht interessieren. In diesem Abschnitt wollen wir uns ausschließlich mit solchen Problemen befassen, bei denen die Idealisierung des Körpers als Massenpunkt zulässig ist.

Die Axiome der Statik (s. Band *Statik*, Abschn. 2.2) behalten auch in der Kinetik ihre Gültigkeit. Neben dem schon erwähnten *Trägheitsaxiom* sind dies das *Reaktionsaxiom* (actio = reactio), das *Parallelogrammaxiom* und, sofern die Kräfte an einem *starren* Körper angreifen, das *Verschiebungsaxiom*. Das Axiomensystem der Statik wird somit in der Kinetik nur durch das *Newton*sche Grundgesetz erweitert.

Greifen an einem Massenpunkt mehrere Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ..., $\vec{F}_n$ an, so können diese nach dem Parallelogrammaxiom zu einer Resultierenden $\vec{F}_R$ zusammengefasst werden (Vektoraddition)

$$\boldsymbol{\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)} \tag{2.9}$$

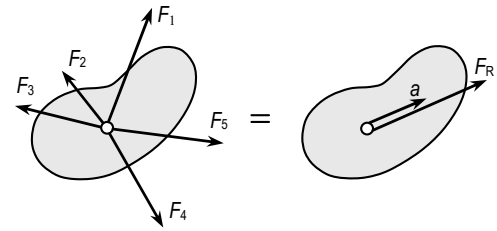


Bild 2.2: Mehrere Kräfte und ihre Resultierende am Massenpunkt

Das *Newton*sche Grundgesetz kann also auch in der Form geschrieben werden

$$\sum \vec{F}_i = m\,\vec{a} \tag{2.10}$$

Die Beschleunigung eines Massenpunktes ist der Resultierenden der an ihm angreifenden Kräfte proportional und ihr gleichgerichtet. Die Proportionalitätskonstante ist die träge Masse m.

Bei der Behandlung eines Problems ist es zweckmäßig, die Kräfte in *äußere* und *innere* zu unterteilen.

Äußere Kräfte sind solche, die von außen her auf ein mechanisches System einwirken, also alle Kräfte, die man beim Freimachen des Systems feststellt. Diese werden von Körpern ausgeübt, die nicht zu dem abgegrenzten mechanischen System gehören. Die Kräftesumme auf der linken Seite von Gl. (2.10) ist gleich der Resultierenden der *äußeren Kräfte*.

Innere Kräfte wirken innerhalb eines Systems zwischen den Teilen des Systems, sie haben keine Wirkung nach außen. Sie haben also keinen Einfluss auf den Bewegungsablauf des ganzen Systems.

Bei Zerlegung des Systems in Teilsysteme müssen sie jedoch an den Trennstellen an jedem der beiden Schnittufer in entgegengesetzter Richtung und mit gleichem Betrag angesetzt werden. Die inneren Kräfte des Gesamtsystems werden so zu äußeren Kräften der freigemachten Teilsysteme.

Die Unterteilung der Kräfte in äußere und innere ist davon abhängig, wie man ein mechanisches System abgrenzt, und daher relativ. Man denke an die Kraft in der Kupplung zwischen Motorwagen und Anhänger eines Lastzuges. Betrachtet man den ganzen Lastzug, ist die Kraft eine innere. Durch einen gedachten Schnitt kann sie zu einer äußeren gemacht werden und hat dann sehr wohl einen Einfluss auf die Bewegung des Motorwagens für sich oder seines Anhängers.

Wie wir später sehen werden (s. Abschn. 5.4), hat das Grundgesetz nicht in allen Bezugssystemen Gültigkeit.

Systeme, in denen das Grundgesetz gilt, nennt man *Inertialsysteme*[1].

[1] Inertia = Trägheit (lat.)

Für die in der Technik betrachteten Bewegungen von Fahrzeugen und Maschinen kann die Erde im Allgemeinen als Inertialsystem angesehen werden.

2.1.2 Das Grundgesetz in Komponentenform

Sind zu jedem Zeitpunkt alle auf einen Massenpunkt einwirkenden Kräfte z. B. als Funktion der Zeit oder des Ortes bekannt, so kann sein Bewegungsablauf unter Berücksichtigung gewisser Bedingungen (z. B. Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit) mit Hilfe des Grundgesetzes vorausberechnet werden. Gl. (2.10) wird daher auch als *Bewegungsgleichung* bezeichnet.

Für zahlenmäßige Berechnungen sind Koordinatensysteme erforderlich. Wir denken uns mit der Erde ein kartesisches x, y, z-Koordinatensystem verbunden und in ihm den Kraft- und Beschleunigungsvektor in Komponenten zerlegt. Unter Berücksichtigung von Gl. (1.47) gilt dann

$$\vec{F}_\mathrm{R} = \sum \vec{F}_\mathrm{i} = \begin{Bmatrix} \sum F_\mathrm{ix} \\ \sum F_\mathrm{iy} \\ \sum F_\mathrm{iz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\,\ddot{x} \\ m\,\ddot{y} \\ m\,\ddot{z} \end{Bmatrix} = m\,\vec{a} \tag{2.11}$$

Dieser einen Vektorgleichung entsprechen die drei skalaren Gleichungen

$$\boldsymbol{\sum F_\mathrm{ix} = m\,\ddot{x} \qquad \sum F_\mathrm{iy} = m\,\ddot{y} \qquad \sum F_\mathrm{iz} = m\,\ddot{z}} \tag{2.12}$$

In dieser Gleichung ist z. B. $\Sigma F_\mathrm{ix} = F_\mathrm{x}$ die Summe der x-Komponenten aller am Massenpunkt angreifenden äußeren Kräfte. Sie ist gleich dem Produkt aus der Masse m und der x-Komponente des Beschleunigungsvektors $a_\mathrm{x} = \ddot{x}$ (**Bild 2.3a**).

Dementsprechend kann man den Kraft- und den Beschleunigungsvektor auch in natürlichen Koordinaten in Komponenten zerlegen. Mit Gl. (1.71), (1.72) erhält man (**Bild 2.3b**)

$$\boldsymbol{F_\mathrm{t} = \sum F_\mathrm{it} = m\,\ddot{s} = m\,a_\mathrm{t} \qquad F_\mathrm{n} = \sum F_\mathrm{in} = m\,\frac{v^2}{\rho} = m\,a_\mathrm{n}} \tag{2.13}$$

Bei einer Zerlegung in ebenen Polarkoordinaten gewinnt man mit Gl. (1.147), (1.148) (**Bild 2.3c**)

$$\boldsymbol{F_\mathrm{r} = \sum F_\mathrm{ir} = m\,(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2) \qquad F_\varphi = \sum F_\mathrm{i\varphi} = m\,(r\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi})} \tag{2.14}$$

Für den Sonderfall der ungleichförmigen Kreisbewegung folgt aus Gl. (2.13) oder (2.14) mit $\rho = r =$ const und $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = \alpha$ (s. auch Gl. (1.82), (1.83))

$$\boldsymbol{F_\mathrm{t} = \sum F_\mathrm{it} = m\,r\,\alpha = m\,a_\mathrm{t} = F_\varphi \qquad F_\mathrm{n} = \sum F_\mathrm{in} = m\,r\,\omega^2 = m\,a_\mathrm{n} = -F_\mathrm{r}} \tag{2.15}$$

Bei einer Bewegung auf gekrümmter Bahn ist F_n immer von Null verschieden (falls $v \neq 0$), denn nach Gl. (2.13) ist $F_\mathrm{n} \sim 1/\rho$. Falls $F_\mathrm{n} = 0$ ist, bewegt sich der Massenpunkt geradlinig. Die Bewegung auf der Bahn wird durch die tangentiale Komponente der Kraft bestimmt. Dabei

kann das Kraftgesetz der tangentialen Komponente F_t auf verschiedene Weise gegeben sein, danach richtet sich der Lösungsweg. Wir wollen folgende Fälle hervorheben:

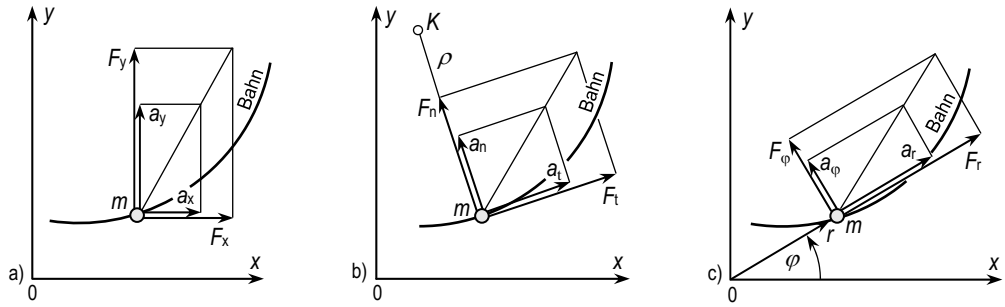


Bild 2.3: Zerlegung von Kraft- und Beschleunigungsvektor
a) in kartesischen Koordinaten b) in natürlichen Koordinaten c) in Polarkoordinaten

1. Die Bahnkomponente F_t der auf einen Massenpunkt einwirkenden Kraft ist *konstant* (freier Fall in Erdnähe bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes), s. Abschn. 2.1.4.

2. Die Kraft ist als Funktion des Ortes gegeben (Federgesetze), s. Abschn. 2.1.6.

3. Die Kraft ist als Funktion der *Geschwindigkeit* gegeben (Bewegung eines Fahrzeuges in Luft oder Wasser); s. Abschn. 2.3.

4. Die Kraft ist als Funktion der *Zeit* gegeben (der Treibsatz einer Rakete brennt nach einer bestimmten Zeitfunktion ab), s. Abschn. 2.4.

Die Lösung einer Bewegungsgleichung kann sehr aufwendig sein, wenn die Abhängigkeit der Kraft von Ort, Zeit und Geschwindigkeit gleichzeitig auftritt.

2.1.3 Bemerkungen zum Lösen von Aufgaben der Kinetik

In der Kinetik kommen meistens zwei Arten von Aufgaben vor: Entweder ist bei bekanntem Kraftgesetz nach dem Bewegungsablauf gefragt (freier Fall, Wurf) oder bei vorgeschriebenem Bewegungsablauf nach den Kräften (Zentripetalkraft bei der Kreisbewegung). Im ersten Fall empfiehlt sich folgender Lösungsweg (s. auch Band *Statik*, Abschn. 2.3.3):

1. Abgrenzen Es wird festgelegt, welcher Teil eines mechanischen Systems betrachtet werden soll.

2. Einführen eines geeigneten Koordinatensystems

3. Freimachen d. h., man befreit den betrachteten Körper oder den Teil eines mechanischen Systems durch gedachte Schnitte von seinen Bindungen zu anderen Körpern, die auf den betrachteten Kräfte ausüben. Die vorher in den Bindungen übertragenen inneren Kräfte lässt man als *äußere Kräfte* auf den betrachteten Körper einwirken. Man beachte, dass z. B. durch das Freimachen von der Erde auch die Bindung zur Erde gelöst wird. In diesem Fall treten Gewichtskräfte als äußere Kräfte auf.

4. Aufstellen der Bewegungsgleichungen Dabei ist bei *Vorzeichenfestlegung* zu beachten: Kraft-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten sind positiv, wenn die zugehörigen Vektoren in Richtung positiver Koordinatenachsen weisen.

Ist bei vorgeschriebenem Bewegungsablauf nach den Kräften gefragt, so wird man nach Einführen des Koordinatensystems zuerst den kinematischen Teil der Aufgabe erledigen, also z. B. aus dem gegebenen Bewegungsablauf die Beschleunigung ermitteln (vgl. Beispiel 2.2). Der Richtung nach unbekannte Kräfte nimmt man zweckmäßig positiv, d. h. in Richtung positiver Koordinaten an. War die Annahme der Richtung falsch, erscheinen die Kräfte im Ergebnis mit negativem Vorzeichen.

2.1.4 Bewegung bei konstanter Bahnkomponente der Kraft

Ist die Bahnkomponente der resultierenden äußeren Kraft konstant, so ist nach Gl. (2.13) auch die Tangentialbeschleunigung $a_t = a_0 = \text{const}$, d. h., der Massenpunkt bewegt sich gleichförmig beschleunigt.

Bezeichnet man die konstante Bahnkomponente der resultierenden äußeren Kraft mit F_0, dann lautet die Bewegungsgleichung in Bewegungsrichtung

$$m\,a_0 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F_0}{m} = a_0$$

Sind zur Zeit $t_0 = 0$ die Geschwindigkeit v_0 und der Ort s_0, so erhält man nach ein- bzw. zweimaliger Integration

$$v - v_0 = \frac{F_0}{m}t = a_0\,t \qquad \text{oder} \qquad v = v_0 + \frac{F_0}{m}t$$

$$s - s_0 = v_0\,t + \frac{F_0}{m}\,\frac{t^2}{2} \qquad \text{oder} \qquad s = s_0 + v_0\,t + \frac{F_0}{m}\,\frac{t^2}{2}$$

Beispiel 2.1: *Freier Fall.* Auf den Körper (**Bild 2.4**) wirkt senkrecht nach unten die Gewichtskraft F_G. Man stelle die Bewegungsgleichung auf.
Da die Ortskoordinate nach unten positiv eingeführt wurde, ist neben Geschwindigkeit und Beschleunigung auch die Kraft in dieser Richtung positiv zu zählen. Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$m\,a_0 = F_G \qquad \text{oder} \qquad a_0 = \frac{F_G}{m} = g$$

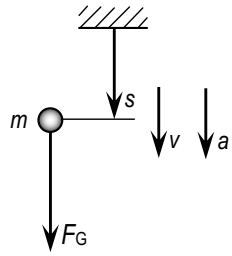


Bild 2.4: Körper im Schwerefeld

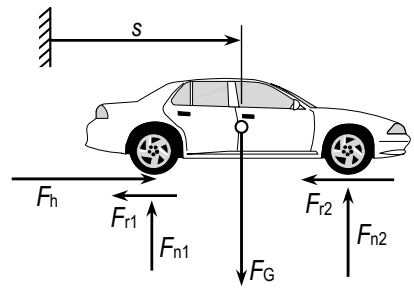


Bild 2.5: Kräfte am anfahrenden Fahrzeug

Erfolgt die Bewegung aus der Ruhelage ($v_0 = 0$, $s_0 = 0$), so erhält man durch Integration wieder die Gleichungen im Beispiel 1.3, S. 11. Man beachte, dass hier bei bekanntem Kraftgesetz nach dem Bewegungsablauf gefragt ist.

Beispiel 2.2: Ein Fahrzeug mit der Masse m = 1200 kg soll auf ebener Straße in t_1 = 6 s gleichförmig beschleunigt die Geschwindigkeit v_1 = 54 km/h erreichen. Wie groß ist seine Beschleunigung a_0, und welche Antriebskraft ist an den Hinterrädern erforderlich, wenn die Fahrwiderstandszahl μ_r = 0,015 ist und der Luftwiderstand vernachlässigt wird?

Hier ist bei vorgeschriebenem Bewegungsablauf nach den Kräften gefragt. Die Beschleunigung kann allein mit Hilfe der Kinematik ermittelt werden.

Wir wollen an diesem Beispiel den in Abschn. 2.1.3 angegebenen Lösungsweg erläutern [1].

1. *Abgrenzen:* Betrachtet wird das Fahrzeug als Ganzes.

2. Die positive *Koordinatenrichtung* wählt man zweckmäßig in Bewegungsrichtung (**Bild 2.5**). Aus Gl. (1.22) erhält man nun die Beschleunigung

$$a_0 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{(54/3{,}6)\ \text{m/s}}{6\ \text{s}} = 2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

3. In **Bild 2.5** ist das freigemachte Fahrzeug gezeichnet. Die Haftkraft ist die äußere Antriebskraft F_h, die das Fahrzeug beschleunigt. Die Rollreibungskraft F_r wirkt der Bewegungsrichtung entgegen.

4. Die Bewegungsgleichung lautet also

$$m\,a_0 = F_h - F_r \qquad \text{mit} \qquad F_r = F_{r1} + F_{r2} = \mu_r\,(F_{n1} + F_{n2}) = \mu_r \cdot F_G = \mu_r\,m\,g$$

Aus dieser Gleichung erhält man die Antriebskraft

$$F_h = m\,a_0 + \mu_r\,m\,g = m\,(a_0 + \mu_r\,g) = 1200\ \text{kg}\ (2{,}5\ \text{m/s}^2 + 0{,}015 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2) = 3177\ \text{N}$$

Beispiel 2.3: Eine Kiste gleitet aus der Ruhelage heraus eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α herab. Man bestimme den Bewegungsablauf, wenn a) die Bewegung reibungsfrei und b) mit Reibung erfolgt (Gleitreibungskoeffizient μ).

a) In **Bild 2.6a** und **b** sind die positiv angenommene *Ortskoordinate s* und die am *freigemachten Körper* angreifenden Kräfte eingetragen. Für die Bewegungsrichtung erhält man die Bewegungsgleichung

$$m\,a_0 = F_G \sin\alpha = m\,g \sin\alpha \qquad \text{oder} \qquad a_0 = g \sin\alpha \tag{2.16}$$

Nach ein- bzw. zweimaliger Integration folgt mit den Aufgangsbedingungen $v_0 = 0$ und $s_0 = 0$

$$v = g \sin\alpha \cdot t \qquad \text{und} \qquad s = g \sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2} \tag{2.17}$$

Der Bewegungsablauf ist also von der Größe der Masse m unabhängig.

---

[1] Man beachte die 4 Schritte des Lösungsweges auch bei den folgenden Beispielen. Wegen der gedrängten Darstellung ist es nicht möglich, in jedem Beispiel die 4 Schritte besonders herauszustellen. Durch Kursivdruck wird aber im Allgemeinen auf die einzelnen Schritte hingewiesen.

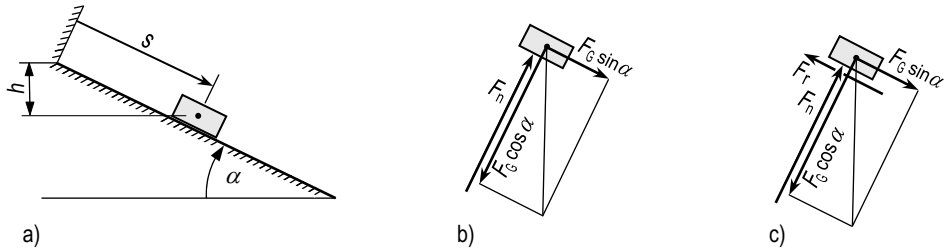


Bild 2.6: a) Kiste auf schiefer Ebene b) Kiste freigemacht, ohne Reibung c) mit Reibung

Aus den beiden letzten Gleichungen gewinnt man durch Elimination der Zeit t das Geschwindigkeit-Ort-Gesetz

$$s = \left(\frac{g \sin\alpha}{2}\right)\left(\frac{v}{g \sin\alpha}\right)^2 = \frac{v^2}{2\,g} \cdot \frac{1}{\sin\alpha}$$

Berücksichtigt man, dass $s \sin\alpha = h$ die Höhendifferenz ist, so folgt

$$s \sin\alpha = \frac{v^2}{2\,g} = h \qquad \text{oder} \qquad v = \sqrt{2\,g\,h} \tag{2.18}$$

Der Massenpunkt erreicht also unabhängig vom Neigungswinkel α nach einem Höhenverlust h die gleiche Geschwindigkeit v, die er auch erfährt, wenn er die Höhe h frei durchfällt (vgl. Beispiel 1.3, S. 11, und Abschn. 2.2.3). Allerdings ist hier die Richtung der Gleitgeschwindigkeit parallel zur schiefen Ebene, während sie beim freien Fall senkrecht nach unten weist. Die Zeit $t = v/g \sin\alpha$ zum Erreichen der Geschwindigkeit v nimmt mit wachsender Neigung ab.

b) Aus der Gleichgewichtsbedingung der Kräfte senkrecht zur Bahn folgt die Normalkraft $F_n = F_G \cos\alpha$. Mit dieser ist die Gleitreibungskraft nach dem *Coulomb*schen Gesetz

$$F_r = \mu\, F_n \tag{2.19}$$

Sie ist der Geschwindigkeitsrichtung entgegengerichtet (**Bild 2.6c**). Die Bewegungsgleichung lautet jetzt

$$m\,a_0 = F_G \sin\alpha - F_r = F_G \sin\alpha - \mu\, F_G \cos\alpha = m\,g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$a_0 = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = g\cos\alpha\,(\tan\alpha - \mu) \tag{2.20}$$

Nach dieser Gleichung ist der Bewegungsablauf auch bei Berücksichtigung der Reibung unabhängig von der Größe der Masse m. Die Kiste kann sich nur aus der Ruhelage in Bewegung setzen ($a_0 > 0$), falls

$$\tan\alpha > \mu_0 \tag{2.21}$$

Auf Landstraßen wird die Steigung $\tan\alpha$ gewöhnlich in % angegeben. Da für $\alpha < 10°$ näherungsweise $\cos\alpha = 1$ gesetzt werden kann, gilt dann mit ausreichender Genauigkeit

$$a_0 \approx g\,(\tan\alpha - \mu) \tag{2.22}$$

Beispiel 2.4: An einer Seilrolle hängen zwei Körper mit den Massen m_1 = 200 kg und m_2 = 175 kg, die sich aus der Ruhelage in Bewegung setzen (**Bild 2.7**). Die Masse der Rolle und des Seiles sei klein gegen die Massen m_1 und m_2 und werde vernachlässigt, das Seil ist biegeweich und nicht dehnbar. Unter Vernachlässigung der Reibung berechne man a) die Beschleunigung a_0 der beiden Körper, b) die Seilkraft F_s, c) die Lagerkraft F_A und d) die Zeit t_1, in der die Masse m_1 den Fallweg s_1 = 10 m zurücklegt.

a) Das Grundgesetz gilt für einen einzelnen Massenpunkt. Als solche dürfen die beiden einzeln betrachteten Körper aufgefasst werden. Durch gedachte Schnitte trennt man die Körper vom Seil und stellt alle auf sie einwirkenden Kräfte fest (**Bild 2.7**). Da $F_{G1} > F_{G2}$, wählt man zweckmäßig die *Ortskoordinate* s_1 nach unten und s_2 nach oben positiv, d. h. in Richtung der zu erwartenden Bewegung. Die *Bewegungsgleichungen* für die beiden *freigemachten Körper* lauten dann

$$m_1\, a_1 = F_{G1} - F_{s1} \qquad m_2\, a_2 = -\,F_{G2} + F_{s2}$$

Da die Reibung vernachlässigt und die Rolle als masselos angesehen wird, folgt aus dem Gleichgewicht der Momente der Kräfte an der Rolle um ihren Mittelpunkt: $F_{s1}\, r = F_{s2}\, r$, d. h., $F_{s1} = F_{s2} = F_s$. Weiterhin sind die Wege der beiden Massenpunkte gleich, $s_1 = s_2$, weil das Seil keine Verlängerung erfährt. Daraus ergibt sich $\ddot{s}_1 = a_1 = \ddot{s}_2 = a_2 = a_0$. Setzt man dies in die Bewegungsgleichungen ein, so erhält man durch Addition der beiden Gleichungen

$$(m_1 + m_2)\, a_0 = F_{G1} - F_{G2} = g\,(m_1 - m_2)$$

$$a_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g = \frac{(200 - 175)\ \text{kg}}{(200 + 175)\ \text{kg}}\, 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 0{,}654\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) Setzt man a_0 z. B. in die erste der Bewegungsgleichungen ein, so ist die Seilkraft

$$F_s = F_{G1} - m_1\, a_0 = m_1\,(g - a_0) = 200\ \text{kg}\ (9{,}81 - 0{,}654)\ \text{m/s}^2 = 1831\ \text{N}$$

c) Die Auflagerkraft F_A gewinnt man aus dem Gleichgewicht der Kräfte an der Rolle (**Bild 2.7**)

$$F_A = 2\, F_s = 3662\ \text{N}$$

d) Die Zeit t_1 folgt aus Gl. (1.23)

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\, s_1}{a_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\ \text{m}}{0{,}654\ \text{m/s}^2}} = 5{,}53\ \text{s}$$

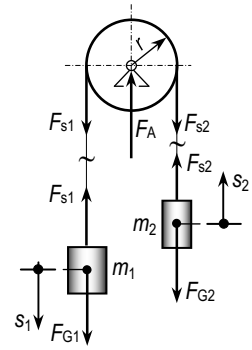


Bild 2.7:
Zwei Körper an einer Seilrolle

2.1.5 Prinzip von d'Alembert

Die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt Gl. (2.10) kann man in der Form schreiben

$$\sum \vec{F}_i + m\,(-\vec{a}) = \vec{0} \tag{2.23}$$

Diese Gleichung ist in ihrem Aufbau von der gleichen Art wie die Gleichgewichtsbedingungen der Statik; man könnte sie *kinetische Gleichgewichtsbedingung* nennen. Die Größe $m\,(-\vec{a}\,)$ hat die Einheit einer Kraft, sie wird als *Trägheits-* oder *Massenkraft* bezeichnet. Somit sagt Gl. (2.23) aus:

Die Summe der äußeren Kräfte $\Sigma \vec{F}_i$ hält der Trägheitskraft $m\,(-\vec{a}\,)$ am Massenpunkt das Gleichgewicht. Oder: Die Summe aller am Massenpunkt angreifenden Kräfte (einschließlich der Trägheitskraft) ist Null.

Diese Aussage wird als *d'Alembert*sches Prinzip[1)] bezeichnet. Mit Hilfe dieses Prinzips kann jedes kinetische Problem formal auf ein statisches zurückgeführt werden.

Man würde die Arbeit *d'Alemberts* gering achten, wollte man sie nur in einer Umstellung des *Newton*schen Grundgesetzes sehen. Die Tragweite seiner Überlegungen ist erst bei der Untersuchung der Bewegung von Massenpunkthaufen und Körpern zu erkennen, vgl. [12]. Für den einzelnen Massenpunkt erscheint das Prinzip in der Tat nur als andere Schreibweise und Deutung des Grundgesetzes.

Entsprechend Gl. (2.12), (2.13) und (2.14) kann man das *d'Alembert*sche Prinzip in Komponentenform schreiben. In kartesischen Koordinaten erhält man die drei skalaren Gleichungen

$$\sum F_{ix} + m\,(-\ddot{x}) = 0 \qquad \sum F_{iy} + m\,(-\ddot{y}) = 0 \qquad \sum F_{iz} + m\,(-\ddot{z}) = 0 \tag{2.24}$$

in natürlichen Koordinaten ist

$$\sum F_{it} + m\,(-a_t) = 0 \qquad \sum F_{in} + m\,(-a_n) = 0 \tag{2.25}$$

und in ebenen Polarkoordinaten

$$\sum F_{ir} + m\,(-\ddot{r} + r\,\dot{\varphi}^2) = 0 \qquad \sum F_{i\varphi} + m\,(-r\,\ddot{\varphi} - 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}) = 0 \tag{2.26}$$

Die Trägheitskraft $\vec{F}_F = m\,(-\vec{a}_n\,)$ in Gl. (2.25) wird auch als *Flieh-* oder *Zentrifugalkraft* bezeichnet (fugere = fliehen). Sie hat eine der Normalbeschleunigung $\vec{a}_n$ entgegengesetzte Richtung, ist also vom Krümmungsmittelpunkt weggerichtet. Die *Zentripetal-* oder *Normalkraft* $\vec{F}_n = \Sigma\,\vec{F}_{in}$ (petere = streben nach) ist mit der Fliehkraft im Gleichgewicht (**Bild 2.11**). Die Kraft $\vec{F}_n$ ist $\vec{F}_F$ entgegengesetzt gleich. Für ihren Betrag gilt

$$F_n = F_F = m\,a_n = \frac{m\,v^2}{\rho} \tag{2.27}$$

Im Fall der Kreisbewegung ist dann (s. auch Beispiel 2.8, S. 73)

$$F_n = F_F = \frac{m\,v^2}{r} = m\,r\,\omega^2 \tag{2.28}$$

Bei der praktischen Anwendung des *d'Alembert*schen Prinzips empfiehlt sich folgendes Vorgehen (s. auch Abschn. 2.1.3):

---

1) *d'Alembert* (1717 bis 1783)

1. Abgrenzen d. h. Festlegen, welcher Teil eines Systems betrachtet werden soll.

2. Geeignetes Koordinatensystem einführen.

3. Freimachen d. h. Lösen des betrachteten Teils von seinen Bindungen und Einführen aller Kräfte. Die in den Bindungen übertragenen Kräfte werden damit zu äußeren Kräften, die auf das betrachtete System einwirken. Die *Trägheitskräfte* werden den positiven Beschleunigungen, also den Koordinatenrichtungen entgegen angenommen. Dann darf an die Trägheitskräfte nur noch der *Betrag* geschrieben werden, weil durch den Pfeil schon die Richtung, also das negative Vorzeichen, berücksichtigt ist. War die Annahme falsch, erscheinen die Trägheitskräfte im Ergebnis mit negativem Vorzeichen.

4. Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen wie in der Statik Dabei sind die Trägheitskräfte wie äußere Kräfte zu behandeln. Häufig kann mit Vorteil die Momentegleichgewichtsbedingung statt der Kräftegleichgewichtsbedingung benutzt werden (vgl. Beispiel 2.6).[1)]

Beispiel 2.5: Man löse die Aufgabe in Beispiel 2.2, S. 67, mit Hilfe des *d'Alembert*schen Prinzips[1)]. In **Bild 2.5** ist bereits eine *Koordinate* eingeführt und das Fahrzeug freigemacht. Die Trägheitskraft mit dem Betrag $m\,a_0$ ist der positiven Ortskoordinate entgegen anzunehmen, da die Beschleunigung positiv in Richtung der positiven Ortskoordinate gezählt wird (**Bild 2.8**). Dann verlangt die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte in Bewegungsrichtung mit $F_r = F_{r1} + F_{r2}$

$$F_h - F_r - m\,a_0 = 0$$

Die weitere Lösung verläuft wie in Beispiel 2.2.

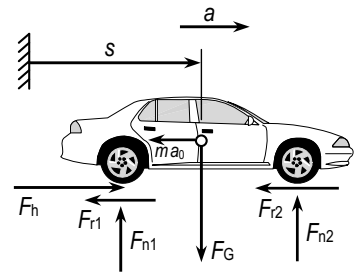


Bild 2.8:
Äußere Kräfte und
Trägheitskraft am Fahrzeug

Beispiel 2.6: Man löse die Aufgabe in Beispiel 2.4, S. 68, mit Hilfe des *d'Alembert*schen Prinzips. Betrachtet wird das ganze System. Die Koordinaten und die äußeren Kräfte übernimmt man aus **Bild 2.7**. In **Bild 2.9** sind neben den äußeren Kräften auch die *Trägheitskräfte* entgegen den Koordinatenrichtungen eingetragen. Da das ganze *System* betrachtet wird, sind die Seilkräfte innere Kräfte. Sie haben keinen Einfluss auf das Gleichgewicht des ganzen Systems. Beachtet man, dass $a_1 = a_2 = a_0$ ist, so verlangt das Gleichgewicht der Momente um den Mittelpunkt der Rolle

$$\sum M_i = 0 = (F_{G1} - m_1 a_0)\,r - (F_{G2} + m_2 a_0)\,r$$

oder

$$a_0\,(m_1 + m_2) = F_{G1} - F_{G2}$$

---

1) Vgl. Fußnote S. 67.

Die weitere Lösung verläuft wie im Beispiel 2.4. Ihr gegenüber hat man zur Bestimmung der Beschleunigung nur eine Bewegungsgleichung zu lösen. Die Seilkraft erhält man aus dem Gleichgewicht an einem der beiden freigemachten Massenpunkte zu

$$F_s = F_{G2} + m_2\, a_0 = F_{G1} - m_1\, a_0 = m_1\, (g - a_0)$$

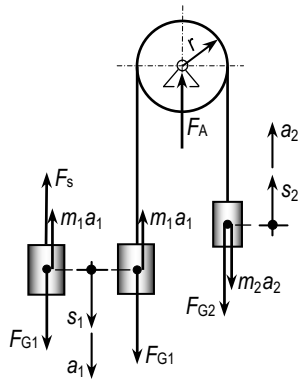


Bild 2.9: System wie in **Bild 2.7**, jedoch mit Trägheitskräften

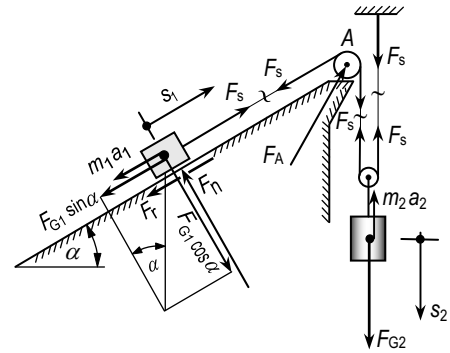


Bild 2.10 Kräfte am System

Beispiel 2.7: Für das System in **Bild 2.10** bestimme man mit Hilfe des *d'Alembert*schen Prinzips a) die Bewegungsgleichung, b) die Seilkraft F_s, c) die Lagerreaktion in A, d) die Geschwindigkeit v_1 und e) den Weg s_1 der Masse m_1 nach $t_1 = 5$ s ($m_1 = 120$ kg, $m_2 = 200$ kg, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}3$). Die Rollen werden als masselos angesehen, die Reibung in ihren Zapfen sei vernachlässigt.

a) Betrachtet werden die beiden Körper mit den Massen m_1 und m_2, die man als Massenpunkte auffassen darf. In **Bild 2.10** sind die positiven *Koordinatenrichtungen* und die an den beiden *freigemachten* Massen angreifenden äußeren Kräfte sowie die *Trägheitskräfte* eingetragen. Da die Reibung in den Zapfen der Rollen vernachlässigt wird und diese als masselos angesehen werden, ist die Seilkraft an allen Stellen des Seiles gleich groß. Bewegt sich m_1 um s_1 aufwärts, dann legt m_2 den Weg $s_2 = s_1/2$ zurück. Daraus folgt $a_2 = a_1/2$. Die Gleitreibungskraft $F_r = \mu\, F_n$ an m_1 ist der Normalkraft $F_n = F_{G1} \cos\alpha$ proportional. Aus dem Gleichgewicht der Kräfte in Bewegungsrichtung ergibt sich für die beiden Massenpunkte

$$F_s = F_{G1} \sin\alpha + F_r + m_1\, a_1 = F_{G1} \sin\alpha + \mu\, F_{G1} \cos\alpha + m_1\, a_1$$

$$2\, F_s = F_{G2} - m_2\, a_2$$

Daraus folgt

$$F_s = m_1\, g\, (\sin\alpha + \mu \cos\alpha) + m_1\, a_1 = \frac{m_2\, g - m_2\, a_1 / 2}{2}$$

$$a_1 = \frac{m_2 / 2 - m_1 (\sin\alpha + \mu \cos\alpha)}{m_1 + m_2 / 4}\, g$$

$$a_1 = \frac{100\text{ kg} - 120\text{ kg}\,(0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}866)}{(100 + 50)\text{ kg}}\, g = 0{,}052\, g = 0{,}510\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_2 = a_1 / 2 = 0{,}255\text{ m/s}^2$$

b) Die Seilkraft gewinnt man aus einer dieser Gleichungen

$$F_s = \frac{F_{G2} - m_2\, a_2}{2} = \frac{m_2}{2}(g - a_2) = 100\text{ kg }(9{,}81 - 0{,}255)\text{ m/s}^2 = 956\text{ N}$$

c) Das Gleichgewicht der Kräfte an der Festrolle erfordert für die horizontale bzw. vertikale Richtung

$$F_{Ax} = F_s \cos\alpha = 956\text{ N} \cdot 0{,}866 = 828\text{ N}$$

$$F_{Ay} = F_s \sin\alpha + F_s = F_s(1 + \sin\alpha) = 956\text{ N} \cdot 1{,}5 = 1434\text{ N}$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = 1656\text{ N}$$

d) Die Bewegung ist gleichförmig beschleunigt, und aus Gl. (1.22) folgt die Geschwindigkeit nach $t_1 = 5$ s

$$v_1 = a_1\, t_1 = (0{,}510\text{ m/s}^2) \cdot 5\text{ s} = 2{,}55\text{ m/s}$$

e) In dieser Zeit legt m_1 nach Gl. (1.23) den Weg s_1 zurück

$$s_1 = \frac{a_1}{2} t_1^2 = \frac{0{,}510\text{ m/s}^2}{2} \cdot 25\text{ s}^2 = 6{,}38\text{ m}$$

Beispiel 2.8: Welche Fliehkraft erzeugt die Schaufel am Läufer der Dampfturbine des Beispiels 1.17, S. 43, wenn sie die Masse $m = 2$ kg hat und ihr mittlerer Abstand von der Drehachse $r = 0{,}8$ m beträgt ($n = 3000\text{ min}^{-1}$)?
In **Bild 2.11** ist die freigemachte Schaufel dargestellt. Die Normalbeschleunigung $\vec{a}_n$ zeigt auf den Drehpunkt 0. Die Trägheitskraft $m(-\vec{a}_n)$ ist die Fliehkraft, sie ist $\vec{a}_n$ entgegen radial nach außen gerichtet. Dieser hält die *Zentripetalkraft* F_n (= Normalkraft) das *Gleichgewicht*, und nach Gl. (2.28) ist

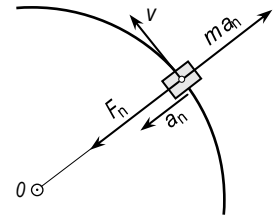
$$F_n = m\, a_n = m\, r\, \omega^2 \tag{2.29}$$

Für $n = 3000\text{ min}^{-1}$ ($\omega = 314\text{ s}^{-1}$) erhält man

$$F_n = 2\text{ kg} \cdot 0{,}8\text{ m} \cdot 314^2\text{ s}^{-2} = 158\text{ kN}$$

Da die Turbine gleichförmig umläuft, ist die Tangentialkraft $F_t = 0$.

Bild 2.11:
Flieh- und Zentripetalkraft
an einer Turbinenschaufel



Beispiel 2.9: Ein Fahrzeug durchfährt eine um 20 % überhöhte Kurve mit dem Krümmungsradius $r = 200$ m (**Bild 2.12**). Bei welcher Geschwindigkeit v wird das Fahrzeug aus der Kurve getragen, wenn die Haftzahl $\mu_0 = 0{,}7$ beträgt?
In **Bild 2.12** ist das Fahrzeug freigemacht. Die an ihm angreifenden Kräfte sind eingetragen. Am Fahrzeug halten sich die Gewichtskraft F_G, die Fliehkraft $F_F = m\, v^2/r$, die Normalkraft $F_n = F_{n1} + F_{n2}$ und die Haftkraft $F_h = F_{h1} + F_{h2}$ das Gleichgewicht. Das Fahrzeug beginnt zu rutschen, wenn die Wirkungslinie der Resultierenden $\vec{F}_R = \vec{F}_G + \vec{F}_F$ außerhalb des Reibungskegels (s. Band *Statik*, Abschn. 10.2) liegt.

Liegt F_R im Grenzfall gerade auf dem Mantel des Reibungskegels ($\tan \rho_0 = \mu_0$), so entnimmt man dem **Bild 2.12b** die Beziehung

$$\tan(\alpha + \rho_0) = \frac{F_F}{F_G} = \frac{m\,v^2/r}{m\,g} = \frac{v^2}{r\,g} \tag{2.30}$$

Mit $\rho_0 = \arctan \mu_0 = 35{,}0°$ und $\alpha = \arctan 0{,}2 = 11{,}3°$ ist $\tan(\alpha + \rho_0) = \tan 46{,}3° = 1{,}05$. Man erhält die Grenzgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\tan(\alpha + \rho_0)\, r\, g} = \sqrt{1{,}05 \cdot 200\ \text{m} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 45{,}4\ \text{m/s} = 163\ \text{km/h}$$

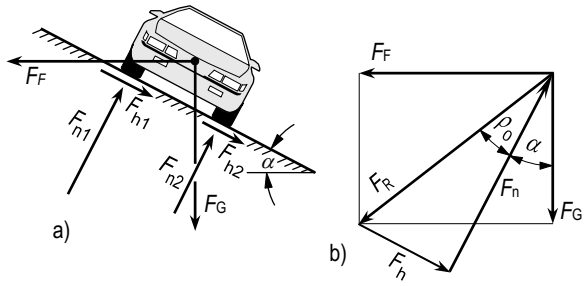


Bild 2.12:
a) Fahrzeug in überhöhter Kurve
b) Kräfteplan

2.1.6 Bahnkomponente der Kraft abhängig vom Ort, freie Schwingungen

Wir betrachten einen Wagen, der sich unter der Wirkung einer Federkraft reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene bewegt. In **Bild 2.13b** ist der Wagen in seiner Ruhelage gezeichnet, die Feder ist entspannt (**Bild 2.13a**). Von dieser Lage aus zählen wir die Koordinate x. Nimmt man eine Feder mit linearem Kraftgesetz an, dann ist die Federkraft F der Auslenkung x proportional

$$F = c\,x \tag{2.31}$$

Darin ist c die *Federkonstante*; sie kann experimentell als Quotient aus der Federkraft und dem Federweg bestimmt werden, $c = F/x$.

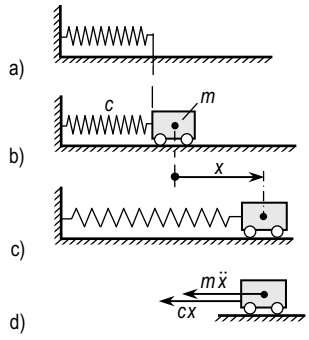


Bild 2.13: Feder-Masse-System
a) Feder entspannt
b) Ruhelage des Wagens
c) Wagen in ausgelenkter Lage
d) Kräfte am freigemachten Wagen

In **Bild 2.13c** ist der Wagen in einer ausgelenkten Lage dargestellt, und in **Bild 2.13d** sind die an ihm in Richtung der Bahn angreifenden Kräfte eingetragen. Die Federkraft F ist auf die

Ruhelage hin gerichtet. Die Trägheitskraft hat man der positiven Beschleunigung, also der positiven Koordinatenrichtung entgegen anzunehmen. Nach dem *d'Alembert*schen Prinzip verlangt das Gleichgewicht der Kräfte in x-Richtung

$$m\,\ddot{x} + c\,x = 0 \qquad \text{oder} \qquad m\,\ddot{x} = -\,c\,x \tag{2.32}$$

Aus der letzten Gleichung erkennt man, dass bei positiver Auslenkung eine negative Beschleunigung auftritt und umgekehrt. Der Massenpunkt wird also immer auf seine Ruhelage hin beschleunigt durch eine Kraft, die der Auslenkung proportional ist. Zur Vereinfachung teilen wir Gl. (2.32) auf beiden Seiten durch die Masse m und setzen

$$\boldsymbol{\frac{c}{m} = \omega_0^2} \tag{2.33}$$

$$\boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{\ddot{x} = -\,\omega_0^2 x} \tag{2.34}$$

Diese Gleichung besagt, dass die zweite Ableitung der Lösungsfunktion $x(t)$ nach der Zeit der Funktion $x(t)$ proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor ist $-\omega_0^2$. Funktionen, die diese Eigenschaften haben, sind (vgl. auch Beispiel 1.9, S. 17)

$$\cos\,\omega_0\,t \qquad \text{und} \qquad \sin\,\omega_0\,t$$

Multipliziert man diese beiden Funktionen mit den willkürlichen Konstanten A und B und addiert sie, so ist auch die Funktion

$$\boldsymbol{x = A\cos\,\omega_0\,t + B\sin\,\omega_0\,t} \tag{2.35}$$

für beliebige Werte der Konstanten A und B Lösung von Gl. (2.34). Wir prüfen dies, indem wir Gl. (2.35) zweimal differenzieren

$$\dot{x} = -\,A\,\omega_0\sin\,\omega_0\,t + B\,\omega_0\cos\,\omega_0\,t \qquad 2.36)$$

$$\ddot{x} = -\,A\,\omega_0^2\cos\,\omega_0\,t - B\,\omega_0^2\,\sin\,\omega_0\,t = -\,\omega_0^2\,(A\cos\,\omega_0\,t + B\sin\,\omega_0\,t) \tag{2.37}$$

Ersetzt man den Klammerausdruck der letzten Gleichung nach Gl. (2.37) durch x, so folgt Gl. (2.34). Diese wird als *Differenzialgleichung der freien ungedämpften Schwingungen* bezeichnet.

In der Theorie der Differenzialgleichungen zeigt man, dass es keine Lösungen von Gl. (2.34) gibt, die nicht in der Gestalt von Gl. (2.35) geschrieben werden könnten. Daher heißt Gl. (2.35) die *allgemeine* Lösung der Differenzialgleichung (2.34).

Durch entsprechende Wahl der Konstanten A und B, die man als Integrationskonstanten bezeichnet, kann die allgemeine Lösung verschiedenen Anfangsbedingungen angepasst werden. Nimmt man z. B. an, dass der Massenpunkt vor Beginn der Bewegung um x_0 ausgelenkt und dann losgelassen wird, so sind die Anfangsbedingungen:

$$\text{zur Zeit } t = 0 \quad \text{ist} \quad x = x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x} = v = 0 \tag{2.38}$$

Mit diesen Bedingungen folgt aus Gl. (2.35) $x_0 = A \cdot 1 + B \cdot 0$, d. h. $A = x_0$, und aus Gl. (2.36) $0 = -A\,\omega_0 \cdot 0 + B\,\omega_0 \cdot 1$ d. h. $B = 0$. Mit diesen Werten für die Integrationskonstanten A und B lautet die spezielle Lösung, die den Anfangsbedingungen Gl. (2.38) genügt

$$x = x_0 \cos \omega_0 t \tag{2.39}$$

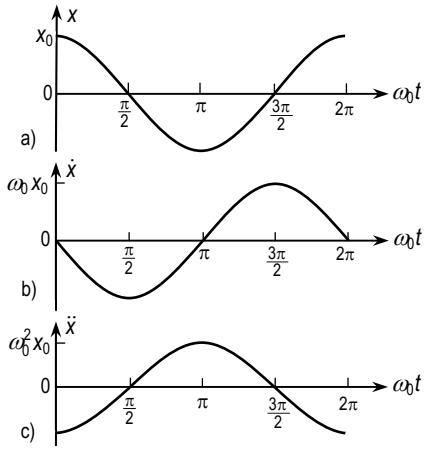


Bild 2.14:
a) Ort-,
b) Geschwindigkeit-,
c) Beschleunigung-Zeit-Diagramm einer schwingenden Bewegung (für $t = 0$ ist $x = x_0$ und $\dot{x} = 0$)

Für die Geschwindigkeit $\dot{x}$ bzw. Beschleunigung $\ddot{x}$ folgt aus Gl. (2.39) durch Differenzieren

$$\dot{x} = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t \tag{2.40}$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x_0 \cos \omega_0 t \tag{2.41}$$

Das Ort-Zeit-, Geschwindigkeit-Zeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm dieser Bewegung zeigt **Bild 2.14**. (Als Abszisse ist statt der Zeit die einheitenlose Größe $\omega_0 t$ gewählt.) Der Massenpunkt vollführt eine *harmonische* Bewegung. Seine größte Verschiebung beträgt $x_m = x_0$, sie wird als *Amplitude* der *Schwingung* bezeichnet. Die maximale Geschwindigkeit ist $v_m = \omega_0 x_0$ und die maximale Beschleunigung $a_m = \omega_0^2 x_0$. Nach einer vollen Schwingung erreicht der Massenpunkt wieder seine Ausgangslage. Die dafür erforderliche Zeit nennt man die *Schwingungsdauer T*. Das Argument der Funktion $\cos \omega_0 t$ ist in der Zeit T um 2π gewachsen, und es gilt

$$\omega_0 t = 2\pi \qquad \text{oder} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{2.42}$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (2.33) ist

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \tag{2.43}$$

Der Faktor ω_0 heißt die *Kreisfrequenz* der Schwingung. Sie wird im Allgemeinen in der Einheit 1/s angegeben. Der Reziprokwert der Schwingungsdauer T ist die *Frequenz*

$$\boldsymbol{n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}} \tag{2.44}$$

Sie gibt die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit an und wird meist in Hertz (Hz)[1] gemessen. Es ist 1 Hz = 1 Schwingung/s.

Aus Gl. (2.43) erkennt man, dass die Schwingungsdauer nur von der Masse m und der Federkonstante c abhängig ist. Sie wird klein, wenn die Masse klein und die Federkonstante groß ist, während eine große Masse und eine kleine Federkonstante (weiche Feder) eine große Schwingungsdauer ergeben.

Den allgemeinsten Fall der Bewegung erhält man, wenn man den Massenpunkt zu Beginn der Bewegung auslenkt und ihm dann durch Anstoß die Geschwindigkeit v_0 erteilt. Die Anfangsbedingungen lauten dann

$$\text{zur Zeit} \quad t = 0 \quad \text{ist} \quad x = x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x} = v_0 \tag{2.45}$$

und aus Gl. (2.35) bzw. Gl. (2.36) erhält man $A = x_0$ und $B = v_0/\omega_0$. Die Ort-Zeit-Funktion genügt dann der Gleichung

$$\boldsymbol{x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t} \tag{2.46}$$

Schreibt man dafür

$$x = C \sin (\omega_0 t + \varphi)$$

und entwickelt nach dem Additionstheorem, so folgt

$$x = (C \sin \varphi) \cos \omega_0 t + (C \cos \varphi) \sin \omega_0 t$$

Durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (2.46) gewinnt man die beiden Gleichungen

$$C \sin \varphi = x_0 \qquad C \cos \varphi = v_0/\omega_0 \tag{2.47}$$

Durch Quadrieren und Addieren der linken und rechten Seiten dieser Gleichungen erhält man wegen $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ die Amplitude der Schwingung

$$x_\mathrm{m} = C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \tag{2.48}$$

Den *Nullphasenwinkel* φ erhält man aus dem Quotienten $C \sin \varphi / C \cos \varphi$

$$\tan \varphi = \frac{x_0\, \omega_0}{v_0} \qquad \text{oder} \qquad \varphi = \arctan \frac{x_0\, \omega_0}{v_0} \tag{2.49}$$

Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (2.34) kann damit in den Formen geschrieben werden

$$\boldsymbol{x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \sin (\omega_0 t + \varphi)} \tag{2.50}$$

---

[1] *Heinrich Hertz* (1857 bis 1894)

Die Ort-Zeit-Linie ist um den Nullphasenwinkel φ gegenüber der Sinuslinie $x = B \sin \omega_0 t$ voreilend (sie ist auf der Zeitachse nach links verschoben) (**Bild 2.15**).

Bei einfachen Schwingungsproblemen interessiert oft nur die Frequenz der *freien* Schwingungen. Das sind solche, die z. B. nach einem einmaligen Anstoß auftreten, wenn der schwingende Körper sich selbst überlassen bleibt. Ihre Kreisfrequenz ω_0 kann aber bereits aus der Gl. (2.34) entnommen werden. Ein Schwingungsproblem ist daher häufig als gelöst zu betrachten, wenn es gelungen ist, die Bewegungsgleichung auf die Normalform der Gl. (2.34) zurückzuführen.

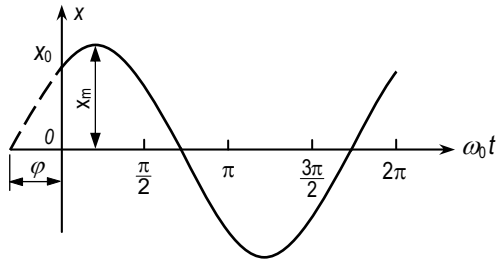


Bild 2.15:
Ort-Zeit-Diagramm für beliebige Anfangsbedingungen (für $t = 0$ ist $x = x_0$ und $\dot{x} = v_0$)

Beispiel 2.10: Ein Körper mit der Masse m am Ende einer Feder (Federkonstante c) vollführt vertikale Schwingungen im Schwerefeld der Erde (**Bild 2.16**). Gesucht ist die Kreisfrequenz der Schwingung.

Unter der Wirkung der Gewichtskraft allein verlängert sich die Feder um f_{st}. In dieser Lage ist die Federkraft $c\, f_{st}$ mit der Gewichtskraft F_G im Gleichgewicht (**Bild 2.16b**).

$$c\, f_{st} = F_G = m\, g \tag{2.51}$$

Die *Koordinate* der Verschiebung y zählt man bei Schwingungsproblemen zweckmäßig von der statischen Ruhelage des Massenpunktes aus (**Bild 2.16a**). In **Bild 2.16c** ist der Körper um y ausgelenkt und in **Bild 2.16d** freigemacht. Die Feder ist um $(y + f_{st})$ gespannt. Das Gleichgewicht der Kräfte verlangt

$$m\, \ddot{y} + c\, (y + f_{st}) - F_G = m\, \ddot{y} + c\, y + (c\, f_{st} - F_G) = 0$$

Wegen Gl. (2.51) verschwindet der letzte Klammerausdruck, also ist

$$m\, \ddot{y} + c\, y = 0 \qquad \text{oder} \qquad \ddot{y} + \left(\frac{c}{m}\right) y = 0 \tag{2.52}$$

Daraus folgt

$$\omega_0^2 = c / m$$

Der Körper schwingt also im Schwerefeld mit der gleichen Frequenz, wie in einer horizontalen Ebene. Wählt man die Anfangsbedingungen nach Gl. (2.38), so ist

$$y = y_0 \cos \omega_0 t$$

Die Schwingung erfolgt mit der Amplitude $y_m = y_0$ um die statische Ruhelage als Gleichgewichtslage (**Bild 2.16e**). Die Schwerkraft bewirkt lediglich eine Verschiebung der statischen Ruhelage um f_{st}, sie hat keinen Einfluss auf die Frequenz der Schwingungen.
Aus Gl. (2.51) folgt $c/m = g/f_{st}$. Setzt man dies in Gl. (2.43) ein, so erhält man die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{f_{st}}{g}} \tag{2.53}$$

Die statische Durchsenkung eines Feder-Masse-Systems kann vielfach experimentell bestimmt werden. Damit gewinnt man aus der letzten Gleichung in einfacher Weise die Schwingungsdauer.

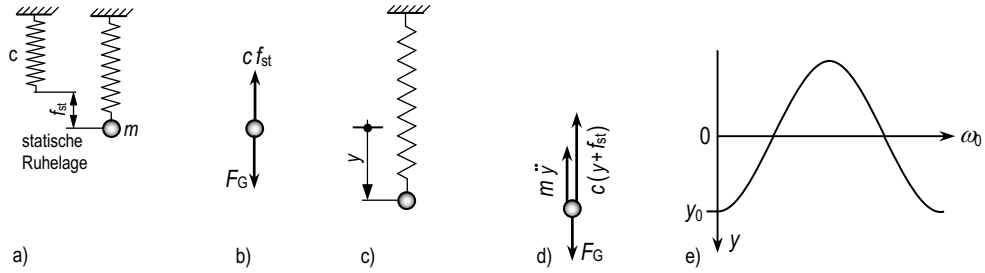


Bild 2.16: Feder-Masse-System im Schwerkraftfeld
a) Feder entspannt b) statische Ruhelage c) ausgelenkte Lage d) Massenpunkt freigemacht
e) Ort-Zeit-Kurve

Beispiel 2.11: *Mathematisches Pendel*. Ein Körper mit der Masse m hängt an einem masselosen Faden und schwingt in einer Ebene im Schwerefeld. Man bestimme die Kreisfrequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T bei Beschränkung auf kleine Schwingungen.

Da sich der Massenpunkt auf einer Kreisbahn bewegt, beschreibt man die Bewegung zweckmäßig in *Polarkoordinaten*. Die Lage des Massenpunktes ist in jedem Augenblick durch den von der statischen Ruhelage aus gezählten Winkel φ festgelegt. In **Bild 2.17b** ist der Massenpunkt *freigemacht*. Neben der Gewichtskraft F_G und der Normalkraft F_n (Fadenkraft) greifen an ihm die tangentiale Trägheitskraft $m\,l\,\alpha = m\,l\,\ddot{\varphi}$ und die Fliehkraft $m\,l\,\omega^2 = m\,l\,\dot{\varphi}^2$ an. Die Erste ist der Koordinate φ und die Zweite der Normalenrichtung entgegen (also radial nach außen) anzunehmen, d. h. entgegen der positiven Tangential- und Normalbeschleunigung. Für den Bewegungsablauf interessiert nur das *Gleichgewicht* der Kräfte in tangentialer Richtung

$$m\,l\,\ddot{\varphi} + F_G \sin\varphi = 0 \tag{2.54}$$

Teilt man die einzelnen Glieder dieser Gleichung durch $m\,l$, so folgt mit $F_G = m\,g$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{2.55}$$

Dies ist eine nichtlineare Differenzialgleichung, auf deren Lösung wir hier verzichten[1]. Beschränkt man sich auf kleine Auslenkungen φ, so kann man mit ausreichender Genauigkeit $\sin\varphi$ durch das Bogenmaß des Winkels φ ersetzen (man spricht vom *Linearisieren* der Bewegungsgleichung) und erhält

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l}\right)\varphi = 0 \tag{2.56}$$

Diese Gleichung stimmt mit der Normalform der Schwingungsdifferenzialgleichung (2.34) überein, wenn man

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \tag{2.57}$$

setzt. Mit Gl. (2.42) erhält man die Schwingungsdauer für kleine Schwingungen

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2.58}$$

---

[1] Ihre Lösung führt auf elliptische Integrale.

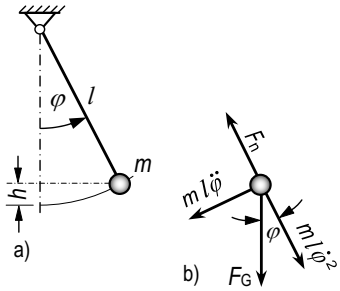


Bild 2.17:
a) Mathematisches Pendel
b) Kräfte am Massenpunkt

Die Schwingungsdauer ist also nur von der Fallbeschleunigung g und der Fadenlänge l abhängig, sie nimmt mit wachsender Fadenlänge zu.

Ist die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels durch Messen bekannt, so kann mit Hilfe von Gl. (2.58) die Fallbeschleunigung bestimmt werden.

Beispiel 2.12: Auf zwei gleiche Walzen, die sich im Abstand 2 l mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω gegenläufig drehen, wird ein dünner Balken mit der Masse m gelegt (**Bild 2.18**). Man stelle die Bewegungsgleichung des Balkens auf und diskutiere sie.

In **Bild 2.18b** ist der Balken freigemacht. Die Schwerpunktkoordinate x des Balkens ist von der Mitte zwischen den Walzen aus gezählt. Infolge der Gewichtskraft F_G üben die Walzen auf den Balken die Auflagerkräfte

$$F_{n1} = \frac{F_G}{2\,l}(l - x) \quad \text{und} \quad F_{n2} = \frac{F_G}{2\,l}(l + x)$$

aus. Die Gleitreibungskräfte sind daher

$$F_{r1} = \mu\, F_{n1} \quad \text{und} \quad F_{r2} = \mu\, F_{n2}$$

wobei μ die Gleitreibungszahl ist. Die Reibungskräfte sind der relativen Verschiebung in 1 und 2 entgegen gerichtet. In **Bild 2.18b** sind alle am Balken angreifenden äußeren Kräfte und die Trägheitskraft $m\,\ddot{x}$ (entgegen x) eingetragen. Die *Gleichgewichtsbedingung* der Kräfte in Bewegungsrichtung erfordert

$$m\,\ddot{x} = F_{r1} - F_{r2} = \mu\,(F_{n1} - F_{n2}) = -\mu\frac{F_G}{2\,l}2\,x = -\mu\frac{m\,g}{l}\,x \qquad \ddot{x} + \left(\frac{\mu\,g}{l}\right)x = 0$$

Die letzte Gleichung ist die Normalform der Schwingungsdifferenzialgleichung. Der Balken vollführt also eine harmonische Bewegung mit der Kreisfrequenz ω_0 und der Schwingungsdauer T, wobei

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu\,g}{l}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\mu\,g}} \tag{2.59}$$

ist. Bei bekannter Schwingungsdauer kann mit Hilfe der letzten Gleichung der Gleitreibungskoeffizient μ zwischen Balken und Walze bestimmt werden.

Damit in jeder Lage x Gleiten zwischen Balken und Walze stattfindet, muss die Umfangsgeschwindigkeit $r\,\omega$ der Walze größer als die maximale Geschwindigkeit $\dot{x}_m$ des Balkens sein

$$r\,\omega > \dot{x}_m \tag{2.60}$$

Bezeichnet man die Amplitude der Schwingungen mit x_m, so gewinnt man aus Gl. (2.50) durch Differenzieren und Berücksichtigung der Gl. (2.48) $\dot{x}_m = x_m\,\omega_0$. Damit folgt aus Gl. (2.60)

$$\omega > \frac{x_m}{r}\omega_0 = \frac{x_m}{r}\sqrt{\frac{\mu\, g}{l}}$$

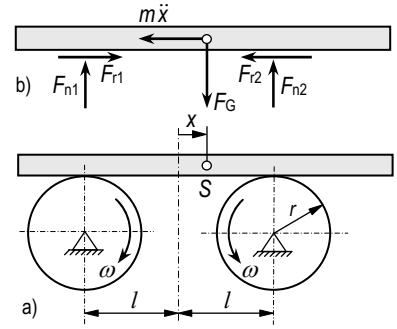


Bild 2.18:
a) Brett auf sich gegenläufig drehenden Walzen
b) Brett freigemacht

2.1.7 Aufgaben zu Abschnitt 2.1

1. Die Masse eines Zuges beträgt ohne Lokomotive $m = 4 \cdot 10^5$ kg. Beim Anfahren erreicht er gleichförmig beschleunigt auf ebener Bahn nach einer Strecke von $s_1 = 900$ m die Geschwindigkeit $v_1 = 54$ km/h, die Fahrwiderstandszahl ist $\mu_r = 0{,}005$. Wie groß ist die in der Kupplung der Lokomotive übertragene Kraft F, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird?

2. a) Wie groß ist die Zugkraft F am Umfang der Treibräder der Lokomotive in der vorstehenden Aufgabe, wenn die Masse der Lok $m_L = 1{,}2 \cdot 10^5$ kg ist und der Zug die Geschwindigkeit $v_1 = 54$ km/h unter gleichen Bedingungen bei 1 % Steigung erreicht? b) Wie groß muss die Haftzahl μ_0 mindestens sein, damit die Treibräder nicht durchrutschen? (Ann.: Treibräderbelastung $m_L\, g$).

3. Welche Zugkraft F_s wirkt in dem Seil des Förderkorbes ($m = 5 \cdot 10^3$ kg) von Beispiel 1.7, S. 15, in den drei Bewegungsabschnitten? (Reibung wird vernachlässigt.)

4. Man bestimme die Beschleunigung a_1 und die Seilkraft F_s des Systems in **Bild 2.19** für $m_1 = 220$ kg und $m_2 = 400$ kg. Die Reibung in den Rollen und die Rollenmassen seien vernachlässigt.

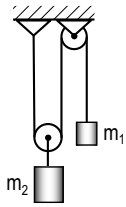


Bild 2.19: System zu Aufgabe 4

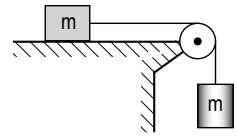


Bild 2.20: System zu Aufgabe 5

5. Welche Beschleunigung erfahren die beiden Körper in **Bild 2.20**, wenn die Masse der Rolle und die Zapfenreibung vernachlässigt werden ($\mu = 0{,}3$ zwischen Masse und Bahn)?

6. Wie groß muss die Masse m_2 in **Bild 2.21** sein, wenn der Wagen in $t_1 = 30$ s den Weg $s_1 = 9$ m aus der Ruhelage zurücklegt ($m_1 = 2 \cdot 10^3$ kg, $\mu_r = 0{,}03$)? Die Masse der Rollen und die Reibung in den Zapfen sei vernachlässigt ($\alpha = 30°$).

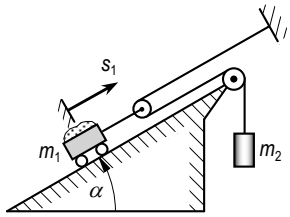


Bild 2.21: System zu Aufgabe 6

7. Welche Massenkraft F tritt am Kolbenbolzen in Aufgabe 7, S. 53, im unteren bzw. oberen Totpunkt auf, wenn der Kolben die Masse $m = 0{,}25$ kg hat?

8. Ein Fahrzeug durchfährt eine Kurve (Krümmungsradius $\rho = 200$ m) mit $v = 120$ km/h (vgl. Beispiel 2.9, S. 73). Welche Überhöhung (tan α) muss die Kurve haben, wenn die Resultierende F_R aus der Fliehkraft F_F und der Gewichtskraft F_G senkrecht zur Fahrbahn liegen soll (**Bild 2.12**)?

9. Bei welcher Drehzahl n vermögen die Fliehgewichte des Fliehkraftreglers ($m = 1$ kg) in **Bild 2.22** die Muffe ($m_0 = 10$ kg) aus der gezeichneten Lage ($\alpha = 30°$, $l = 20$ cm) anzuheben? Das Eigengewicht der Stangen und Reibung werden vernachlässigt.

10. Ein Pkw fährt mit konstanter Geschwindigkeit v_0 über eine Bergkuppe. Die Bergkuppe hat in der Vertikale den Krümmungsradius $\rho = 100$ m (**Bild 2.23**). Bei welcher Geschwindigkeit v_0 hebt das Fahrzeug im Punkt A von der Bahn ab?

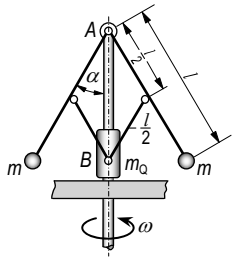


Bild 2.22: System eines Fliehkraftreglers

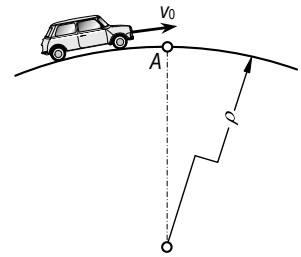


Bild 2.23: Fahrzeug fährt über eine Bergkuppe

11. Bei welcher Grenzbeschleunigung a_m beginnt die Ladung des Lkw im **Bild 2.24** zu rutschen, wenn die Haftzahl $\mu_0 = 0{,}25$ beträgt?

12. An einer vertikal gelagerten Welle ist über einen Stab der Länge $l = 30$ cm (mit vernachlässigbar kleiner Masse) eine Masse m gelenkig angeschlossen (**Bild 2.25**). a) Bei welcher Drehzahl n bildet der Stab mit der Achse der Welle den Winkel $\alpha = 30°$? b) Von welcher Winkelgeschwindigkeit ω_0 an ist überhaupt eine Auslenkung des Stabes möglich?

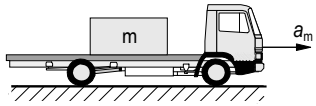


Bild 2.24: Last auf Lkw

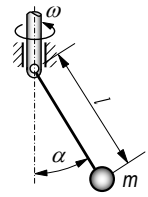


Bild 2.25: Fliehkraftpendel an sich drehender Welle

13. Man berechne die Fadenlänge für ein mathematisches Sekundenpendel. Erläuterung: Ein Sekundenpendel hat die Schwingungsdauer $T = 2$ s.

14. Ein Güterwagen $m = 12 \cdot 10^3$ kg fährt mit der Geschwindigkeit v_0 gegen einen ungefederten Prellbock. Die Federkonstante einer seiner Pufferfedern beträgt $c = 20$ kN/cm. a) Wie groß ist die Stoßdauer t_s, wenn elastische Verformung der Feder vorausgesetzt wird? Unter Stoßdauer t_s wird die Zeit verstanden, in der sich Wagen und Prellbock berühren. b) Ist die Stoßdauer bei elastischer Verformung der Feder von der Geschwindigkeit v_0 abhängig? Reibung sei vernachlässigt. c) Wie groß sind der maximale Federweg x_m, die maximale Federkraft F_m und d) die maximale Bremsverzögerung a_m, falls $v_0 = 1$ m/s ist?

Anleitung: Man beachte, dass der Wagen eine schwingende Bewegung ausführt.

15. Man stelle die Bewegungsgleichungen der Feder-Masse-Systeme in **Bild 2.26** auf und bestimme die Kreisfrequenz der kleinen Schwingungen. Die Masse der Rollen und Reibung werden vernachlässigt.

16. Welche Kraft F_B wirkt im Gleitlager B der Kreuzschubkurbel des **Bildes 1.38**, wenn diese gleichförmig mit der Drehzahl $n_A = 1440$ min^{-1} angetrieben wird? Die Masse der hin- und hergehenden Teile ist $m = 4$ kg und der Kurbelradius $r = 10$ cm. Reibung in den Lagern sei vernachlässigt (**Bild 5.68**).

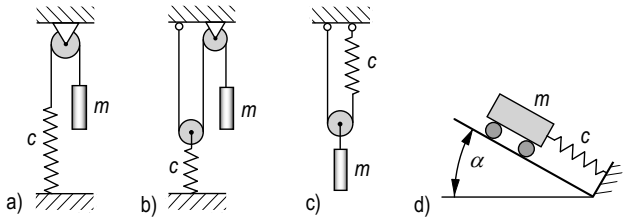


Bild 2.26: Feder-Masse-Systeme

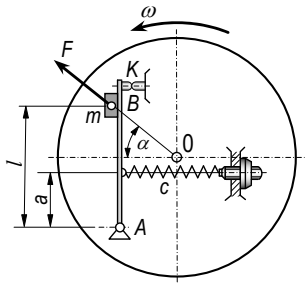


Bild 2.27: Zweipunkt-Fliehkraft-Drehzahlregler

17. **Bild 2.27** zeigt das Schema eines Fliehkraft-Drehzahlreglers, wie er zum Konstanthalten der Drehzahl an kleineren E-Motoren verwandt wird. Bei Überschreiten der Solldrehzahl n_K öffnet der Kontakt K und schaltet den Motor aus und bei Unterschreiten von n_K wieder ein. Um welchen Betrag f_K muss die Feder (Federkonstante $c = 1$ N/cm) vorgespannt sein, wenn die Solldrehzahl $n_K = 1200$ min^{-1} beträgt? ($a = 7$ mm, $l = 15$ mm, $r = \overline{OB} = 10$ mm, $\alpha = 40°$, $m = 2$ g). Die Masse des Kontaktarmes $\overline{AB}$ und die Wirkung der Schwerkraft werden vernachlässigt.

18. Bei welcher Bahngeschwindigkeit v kann sich ein Satellit in der Höhe $h = 800$ km auf einer Kreisbahn um die Erde bewegen? Erläuterung: Die Fallbeschleunigung g ändert sich mit dem Abstand r vom Erdmittelpunkt nach der Gleichung

$$g = g_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \tag{2.61}$$

Darin sind der Erdradius $R = 6371$ km und $g_0 = 9{,}81$ m/s² die Fallbeschleunigung in Erdnähe.

19. In welcher Höhe h oberhalb der Erdoberfläche kann ein Satellit relativ zur Erde in Ruhe sein? (Vgl. Erläuterung zu Aufgabe 18.)

2.2 Arbeit, Energie, Leistung

Probleme der Mechanik können allein mit Hilfe der *Newton*schen Axiome gelöst werden. Jedoch zeigt es sich, dass durch Einführung der Begriffe *Arbeit*, *Energie* und *Leistung* viele Probleme einfacher und übersichtlicher dargestellt werden können. Diese Begriffe spielen in der Anwendung eine große Rolle, z. B. auch beim Größenvergleich von Maschinen und Anlagen.

2.2.1 Arbeit einer Kraft

Arbeit einer konstanten Kraft auf gerader Bahn. Wir betrachten den Wagen in **Bild 2.28a**, der sich infolge der konstanten Kraft $\vec{F}$ geradlinig bewegt[1]. Die Kraft greift im Punkte P des Wagens an, und zwischen zwei Lagen 0 und 1 erfährt der Kraftangriffspunkt die Verschiebung $\overline{P_0P_1} = \Delta s$. Der Kraftvektor schließt mit der Verschiebungsrichtung den Winkel α ein. Dann definiert man:

Die Arbeit W der Kraft $\vec{F}$ ist das Produkt aus der Kraftkomponente $F \cos \alpha$ in Verschiebungsrichtung und dem Weg Δs, den der Kraftangriffspunkt bei der Verschiebung zurücklegt.

$$\boldsymbol{W = F\,\Delta s \cos \alpha} \tag{2.62}$$

Weist der Kraftvektor in einem Sonderfall in Richtung der Verschiebung ($\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$), so ist die Arbeit $W = F\,\Delta s$. Steht er senkrecht auf der Verschiebungsrichtung ($\alpha = \pi/2$, $\cos \alpha = 0$), so ist die Arbeit $W = 0$. Die Kraft $\vec{F}$ ist in diesem Fall nicht in der Lage, den Wagen in Richtung seiner Bahn zu bewegen.

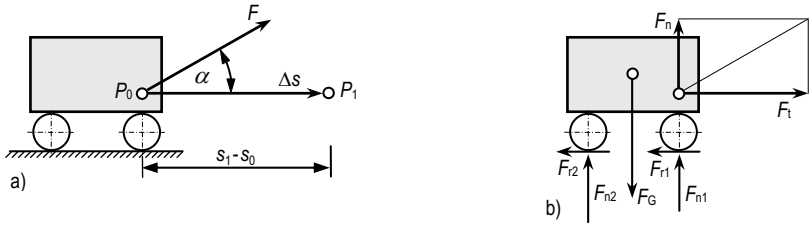


Bild 2.28: a) Kraft $\vec{F}$ an einem Wagen b) Wagen freigemacht

[1] An dem Wagen greifen während der Bewegung auch andere Kräfte an. Hier interessieren wir uns nur für die Kraft $\vec{F}$.

Die Kraft $\vec{F}$ kann in Komponenten in Richtung und senkrecht zur Richtung der Verschiebung zerlegt werden

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_t \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \cos\alpha \\ F \sin\alpha \end{Bmatrix}$$

Mit $F_t = F \cos\alpha$ erhält man dann für Gl. (2.62)

$$W = F_t \, \Delta s \tag{2.63}$$

Es verrichtet also *nur* die Kraftkomponente F_t in Richtung der Verschiebung eine Arbeit.

Die Verschiebung des Kraftangriffspunktes von P_0 nach P_1 kann durch den *Verschiebungsvektor* $\Delta\vec{s}$ angegeben werden (**Bild 2.28a**). Man bezeichnet die Operation in Gl. (2.62), nach der dem Kraftvektor $\vec{F}$ und dem Verschiebungsvektor $\Delta\vec{s}$ die skalare Größe W (die Arbeit) zugeordnet wird, als *skalares oder inneres Produkt* (s. Band *Statik*, Abschn. 1.4.3 und *Brauch, W.*; *Dreyer, H.-J.*; *Haacke, W.*: Mathematik für Ingenieure, 11. Aufl., Wiesbaden 2006) und schreibt

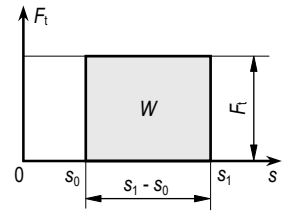
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = F \, \Delta s \cos\alpha = F_t \, \Delta s \tag{2.64}$$

Die Arbeit kann in verschiedenen Einheiten angegeben werden. In der Mechanik wird das Newtonmeter (Nm) verwandt. Das Newtonmeter gestattet eine leichte Umrechnung auf andere Maßeinheiten; denn ein Newtonmeter ist gleich einem Joule (J) und dies gleich einer Wattsekunde (Ws)

$$1 \text{ Nm} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} \tag{2.65}$$

Trägt man die Bahnkomponente F_t über der Ortskoordinate s auf, so ist die Arbeit $W = F_t \, \Delta s = F_t(s_1 - s_0)$, die die Kraft bei der Verschiebung des Angriffspunktes von der Stelle s_0 zu der Stelle s_1 verrichtet, der Rechteckfläche unter der *Kraft-Ort-Kurve* proportional (**Bild 2.29**). Die Arbeit ist positiv, wenn die Bahnkomponente der Kraft mit der Verschiebung gleichgerichtet ist. Wirkt F_t der Verschiebungsrichtung entgegen, so ist die Arbeit negativ (für $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ ist $\cos\alpha < 0$).

Bild 2.29:
Kraft-Ort-Diagramm bei konstanter Bahnkomponente der Kraft



Beispiel 2.13: An dem Wagen (**Bild 2.28**) mit der Masse m = 50 kg greift unter dem Winkel α = 30° die Kraft $\vec{F}$ an. a) Wie groß ist F, wenn sich der Wagen gleichförmig bewegt und der Koeffizient der rollenden Reibung μ_r = 0,03 beträgt? b) Welche Arbeit verrichtet die Kraft $\vec{F}$ auf dem Weg Δs = 10 m?

a) Wegen der gleichförmigen Bewegung treten keine Trägheitskräfte auf, und das Gleichgewicht der Kräfte in Bewegungsrichtung (**Bild 2.28b**) bzw. senkrecht dazu verlangt mit

$$(F_{r1} + F_{r2}) = F_r \qquad \text{und} \qquad (F_{n1} + F_{n2}) = F_n$$

$$F_t = F \cos\alpha = F_r = \mu_r F_n \qquad \text{und} \qquad F_n = F_G - F \sin\alpha$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$F \cos \alpha = \mu_r (F_G - F \sin \alpha)$$

$$F = \frac{\mu_r \, m \, g}{\cos \alpha + \mu_r \sin \alpha} = \frac{0{,}03 \cdot 50 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{0{,}866 + 0{,}03 \cdot 0{,}5} = 16{,}7 \text{ N}$$

b) Nach Gl. (2.62) ist die Arbeit der konstanten Kraft F

$$W = F \cos \alpha \, \Delta s = 16{,}7 \text{ N} \cdot 0{,}866 \cdot 10 \text{ m} = 144{,}6 \text{ Nm}$$

Allgemeine Definition der Arbeit. Im Allgemeinen ist die Kraft veränderlich, während sich ihr Angriffspunkt längs einer Raumkurve verschiebt. Ersetzt man die Bahnkurve, die durch den Ortsvektor $\vec{r}\,(s)$ beschrieben wird, stückweise durch ihre Sehnen, d. h. durch Geradenabschnitte (**Bild 2.30**), so ist die Arbeit der Kraft längs eines Teilabschnittes der Bahn nach Gl. (2.64) näherungsweise gleich

$$\Delta W_i = \vec{F}\,(s_i) \cdot \Delta \vec{r}_i = F\,(s_i) \cdot \Delta s_i \cos\,[\alpha\,(s_i)] = F_t\,(s_i)\,\Delta s_i \tag{2.66}$$

mit $|\Delta \vec{r}_i| = \Delta s_i$ (s. Abschn. 1.2.2). Die Arbeit der Kraft $\vec{F}$ längs des Bahnabschnittes vom Punkt P_0 mit der Ortskoordinate s_0 bis zum Punkt P_1 mit der Ortskoordinate s_1 wird nun durch den Grenzwert der Summe $\Sigma\, \Delta W_i$ für $|\Delta \vec{r}_i| = \Delta s_i \to 0$ definiert, d. h. durch ein Integral, für das man unter Berücksichtigung der Gl. (2.62) schreibt

$$\boldsymbol{W = \int_{P_0}^{P_1} \vec{F}(s) \cdot \mathrm{d}\,\vec{r}} \tag{2.67}$$

oder

$$\boldsymbol{W = \int_{s_0}^{s_1} F_t(s)\,\mathrm{d}s} \tag{2.68}$$

Diese Gleichung besagt:

Die Arbeit ist das Wegintegral über die Bahnkomponente der Kraft.

Das bestimmte Integral in Gl. (2.68) ist der Fläche unter der Kraft-Verschiebungskurve zwischen s_0 und s_1 proportional (**Bild 2.31**) und kann aus dieser z. B. durch numerische Integration gewonnen werden (s. Beispiel 2.14).

Das Integral in Gl. (2.67) wird als Linienintegral bezeichnet. Bei der Darstellung im kartesischen x, y, z-Koordinatensystem ist

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \qquad \mathrm{d}\,\vec{r} = \begin{Bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{Bmatrix}$$

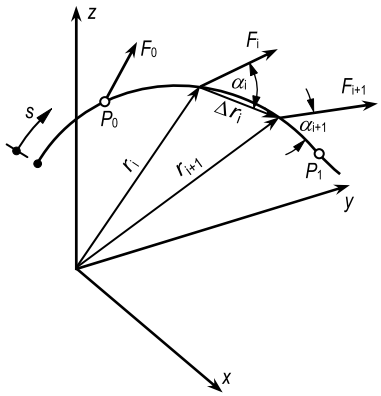


Bild 2.30: Kraft auf beliebiger Bahn

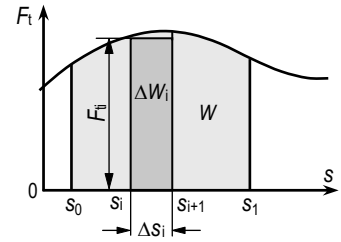


Bild 2.31: Kraft-Ort-Kurve bei allgemeiner Bewegung

Mit Hilfe der Regel für das Bilden des skalaren Produktes (s. Band *Statik*, Abschn. 1.4.3 und *Brauch, W.; Dreyer, H.-J.; Haacke, W.*: Mathematik für Ingenieure. 11. Aufl., Wiesbaden 2006) erhält man für das Linienintegral in Gl. (2.67)

$$W = \int_{P_0}^{P_1} F_x \, dx + \int_{P_0}^{P_1} F_y \, dy + \int_{P_0}^{P_1} F_z \, dz \tag{2.69}$$

Beispiel 2.14: In **Bild 2.32** ist das Indikatordiagramm eines Viertakt-Otto-Motors dargestellt (vgl. Aufgabe 7, S. 53). Die Takte Ansaugen und Ausschieben sind unterdrückt. Aufgetragen ist der indizierte Druck p_i in Abhängigkeit vom Kolbenweg s. Der untere Teil der geschlossenen Kurve gilt für den Kompressions-, der obere für den Arbeitstakt. Man bestimme die Arbeit W der Gaskräfte bei einem Hin- und Hergang des Kolbens, wenn der Kolbendurchmesser d = 80 mm beträgt. Multipliziert man den indizierten Druck p_i mit der Kolbenfläche A_K, so erhält man die auf den Kolben wirkende Gaskraft F. Damit wird aus dem Indikatordiagramm das Kraft-Ort-Diagramm (bei entsprechender Maßstabswahl sind die Diagramme identisch), und aus der Fläche zwischen der Kurve und der Abszissenachse erhält man die verrichtete Arbeit. Während der Kompressionsphase ist die Arbeit negativ, die Gaskraft wirkt der Verschiebung entgegen. Die Fläche unter der Kurve 1 (**Bild 2.32**) ist daher von der Fläche unter der Kurve 2 (Expansion) abzuziehen, so dass nur die Fläche A in der geschlossenen Kurve der während eines Hin- und Hergangs nach außen abgeführten Arbeit entspricht. Diese ermittelt man auf numerischem Wege zu $A = 2{,}4\ \text{cm}_z^2$. Der Druck ist mit dem Maßstabsfaktor m_p = 10 bar/cm$_z$, der Kolbenweg mit m_s = 2 cm/cm$_z$ dargestellt. Der Maßstabsfaktor der Kraft m_F ergibt sich aus m_p durch Multiplizieren mit der Kolbenfläche

$$A_K = (\pi\, d^2)/4 = 50{,}27\ \text{cm}^2$$

$$m_F = A_K\, m_p = 50{,}27\ \text{cm}^2 \cdot 10\ \frac{\text{bar}}{\text{cm}_z} = 5027\ \frac{\text{N}}{\text{cm}_z}$$

Damit erhält man die auf einem Hin- und Herweg verrichtete Arbeit

$$W = m_F\, m_s\, A = 5027\ \frac{\text{N}}{\text{cm}_z} \cdot 2\,\frac{\text{cm}}{\text{cm}_z} \cdot 2{,}4\ \text{cm}^2 = 24\,130\ \text{Ncm} = 241{,}3\ \text{Nm}$$

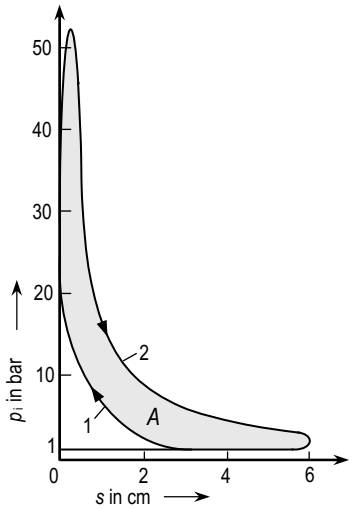


Bild 2.32: Indikatordiagramm eines Otto-Motors

$$m_p = 10 \frac{\text{bar}}{\text{cm}_z} \qquad m_s = 2 \frac{\text{cm}}{\text{cm}_z}$$

Reibungsarbeit ist die Arbeit zur Überwindung der Reibungskraft. Um einen Körper in horizontaler Ebene gleichförmig zu bewegen, ist eine Kraft F erforderlich, die der Reibungskraft F_r während der Verschiebung das Gleichgewicht hält. Aus der Gleichgewichtsbedingung in Bewegungsrichtung folgt $F = F_r = \mu F_n$ (**Bild 2.33**). Die Arbeit der Kraft F längs des Wegabschnittes $(s_1 - s_0)$ wird Reibungsarbeit genannt. Sie beträgt nach Gl. (2.62) mit $\alpha = 0$

$$\boldsymbol{W_F = F\,(s_1 - s_0) = F_r\,(s_1 - s_0) = \mu\, F_n\,(s_1 - s_0)} \tag{2.70}$$

Man beachte: Die Reibungsarbeit ist die Arbeit der Kraft F und nicht die der Reibungskraft F_r. Die Arbeit W_r der Reibungskraft F_r ist bei der Verschiebung negativ, da Kraft- und Verschiebungsrichtung einander entgegengerichtet sind ($\alpha = \pi$). Sie ist nur betragsmäßig gleich W_F

$$W_r = -\,\mu\, F_n\,(s_1 - s_0) = -\,W_F$$

Tritt bei einer Bewegung ein Roll- bzw. Fahrwiderstand auf, so ist in Gl. (2.70) μ durch μ_r zu ersetzen.

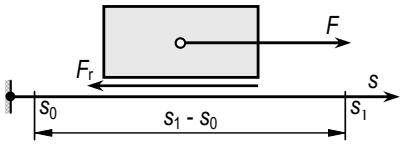


Bild 2.33: Reibungsarbeit an einem Körper

Hubarbeit ist die Arbeit zur Überwindung der Gewichtskraft. Wird ein Körper mit der Masse m senkrecht mit konstanter Geschwindigkeit gehoben (**Bild 2.34a**), so wirkt auf ihn während dieser Bewegung eine Kraft F senkrecht nach oben, die der Gewichtskraft das Gleichgewicht hält: $F = F_G$. Die Arbeit der Kraft F ist die *Hubarbeit*

$$W_F = F\,(z_1 - z_0) = F_G\,(z_1 - z_0) = m\,g\,h \tag{2.71}$$

Die Gewichtskraft F_G verrichtet bei der gleichen Verschiebung die negative Arbeit $W_G = -F_G\,h = -W_F$

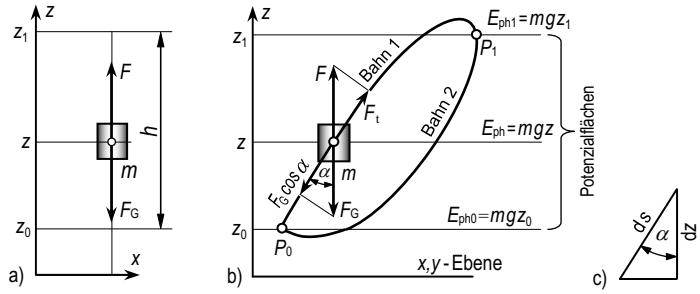


Bild 2.34: Anheben eines Körpers
a) auf senkrechter, b) auf beliebiger Bahn, c) Höhenzuwachs dz

Beispiel 2.15: Ein Kran hebt einen Körper der Masse m = 1500 kg mit konstanter Geschwindigkeit von der Höhe z_0 = 3 m auf die Höhe z_1 = 12 m. Welche Arbeit verrichtet die Seilkraft F_s (**Bild 2.35**)?
Wegen der gleichförmigen Bewegung ist die Seilkraft F_s gleich der Gewichtskraft $F_G = m\,g$, sie verrichtet nach Gl. (2.71) die Arbeit

$$W = F_s\,(z_1 - z_0) = m\,g\,(z_1 - z_0) = 1\,500\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}(12\ \text{m} - 3\ \text{m}) = 132{,}4\ \text{kNm}$$

Wird der Körper auf beliebiger Bahn mit der konstanten Bahngeschwindigkeit v gehoben, so ist während der Bewegung die Bahnkomponente der Kraft $\vec{F}$ mit der Bahnkomponente der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ im Gleichgewicht, $F_t = F_G \cos\alpha$ (**Bild 2.34b**).

Nach Gl. (2.68) beträgt die von der Kraft $\vec{F}$ verrichtete Arbeit

$$W_F = \int_{s_0}^{s_1} F_t\,\mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_1} F_G\,\cos\alpha\,\mathrm{d}s$$

Mit dem Höhenzuwachs ds cos α = dz (**Bild 2.34c**) erhält man

$$\boldsymbol{W_F = \int_{z_0}^{z_1} F_G\,\mathrm{d}z = F_G\,(z_1 - z_0) = m\,g\,h} \qquad (2.72)$$

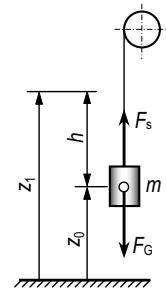


Bild 2.35: Last am Kran

Daraus folgt:

Die Hubarbeit ist unabhängig von der Bahnform und gleich dem Produkt aus der Gewichtskraft $F_G = m\,g$ und dem Höhenunterschied h.

Beispiel 2.16: Ein Lkw mit der Masse m = 3000 kg fährt mit konstanter Geschwindigkeit einen Berg hinauf. Unter Vernachlässigung der rollenden Reibung und des Luftwiderstandes bestimme man die Arbeit der Zugkraft F_t, wenn das Fahrzeug den Höhenunterschied h = 100 m überwindet. Nach **Bild 2.36** ist die Zugkraft $F_t = F_G \cos\alpha = F_G \sin\beta$ (β = Steigungswinkel der Bahn). Diese verrichtet nach Gl. (2.72) die Arbeit

$$W = F_G\, h = 3000\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 100\ \text{m} = 2{,}94 \cdot 10^6\ \text{Nm}$$

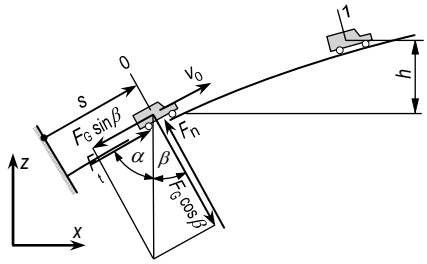


Bild 2.36: Fahrzeug bei Bergfahrt

Federspannarbeit ist die Arbeit zur Überwindung der Federkraft F_f. Wird eine Feder gespannt, so ist von außen eine Kraft F aufzubringen, die in jedem Augenblick mit der Federkraft F_f im Gleichgewicht ist: $F = F_f$ (**Bild 2.37a**). Bei linearem Kraftgesetz ist nach Gl. (2.31)

$$F_f = c\, s$$

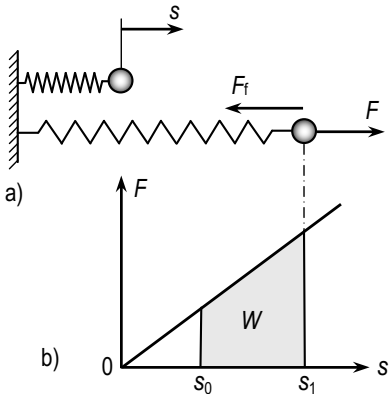


Bild 2.37:
a) Spannen einer Feder
b) Kraft-Verschiebungs-Kurve der Feder

Verschiebt man nun das Ende der Feder aus einer Lage s_0 in die Lage s_1, so verrichtet die Kraft F nach Gl. (2.68) die Federspannarbeit

$$W_F = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,\mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_1} c\,s\,\mathrm{d}s = c\,\frac{s^2}{2}\bigg|_{s_0}^{s_1} = \frac{c}{2}(s_1^2 - s_0^2) \tag{2.73}$$

Die Federspannarbeit ist der Trapezfläche unter der Kraft-Verschiebungskurve (**Bild 2.37b**) proportional. Speziell folgt für $s_0 = 0$ und $s_1 = s$ aus Gl. (2.73) die Federspannarbeit

$$\boldsymbol{W_F = c\,\frac{s^2}{2}} \tag{2.74}$$

Die Federkraft F_f verrichtet bei der gleichen Verschiebung eine negative Arbeit, denn beim Spannen der Feder ist die Federkraft der Verschiebung entgegengerichtet:

$$W_f = -\,c\,s^2/2 = -\,W_F$$

Beispiel 2.17: Auf einen Stahlträger (Elastizitätsmodul $E = 210 \cdot 10^3$ N/mm^2) der Länge $l = 2$ m mit Rechteckquerschnitt (Höhe $h = 5$ cm, Breite $b = 3$ cm) wird in der Mitte eine Kraft F aufgebracht (**Bild 2.38**). a) Wie ändert sich die Kraft mit der Verschiebung? b) Welche Arbeit verrichtet die Kraft F, wenn sie maximal den Wert $F_m = 3000$ N erreicht?

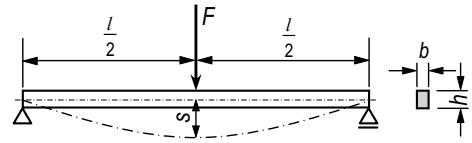


Bild 2.38: Balken als Biegefeder

a) In der Festigkeitslehre berechnet man die Verschiebung s an der Lastangriffsstelle eines in der Mitte belasteten Trägers nach der Formel

$$s = \left(\frac{l^3}{48\,EI}\right) F \tag{2.75}$$

Dabei ist $I = b\,h^3/12$ das axiale Flächenmoment 2. Grades. Der Klammerausdruck in Gl. (2.75) ist nur von den Abmessungen des Trägers und dem E-Modul abhängig, also für einen gegebenen Träger konstant. Damit ist die Kraft der Verschiebung proportional, und es gilt das lineare Kraft-Verschiebungs-Gesetz

$$F = c\,s = \left(\frac{48\,EI}{l^3}\right) s \tag{2.76}$$

In dieser Gleichung ist die Federkonstante

$$c = \frac{48\,EI}{l^3} \tag{2.77}$$

b) Mit den gegebenen Werten ist

$$I = bh^3/12 = (3\text{ cm} \cdot 5^3\text{ cm}^3)/12 = 31{,}25\text{ cm}^4$$

$$c = 48\,EI/l^3 = (48 \cdot 21 \cdot 10^6\text{ N/cm}^2 \cdot 31{,}25\text{ cm}^4)/(200\text{ cm})^3 = 3938\text{ N/cm}$$

Setzt man in Gl. (2.74) $s = F/c$, so ist die von der Kraft F verrichtete Arbeit

$$W = c\frac{s^2}{2} = \frac{F_m^2}{2\,c} = \frac{3000^2\text{ N}^2}{2 \cdot 3938\text{ N/cm}} = 1143\text{ Ncm}$$

Beschleunigungsarbeit So wie wir die Reibungsarbeit als Arbeit zur Überwindung der Reibungskraft, die Hubarbeit als Arbeit zur Überwindung der Gewichtskraft und die Federspannarbeit als Arbeit zur Überwindung der Federkraft aufgefasst haben, kann man nach dem *d'Alembert*schen Prinzip die Beschleunigungsarbeit als Arbeit zur Überwindung der Trägheitskraft auffassen. Führt ein Massenpunkt mit der Masse m eine beschleunigte Bewegung unter der Wirkung der Kraft F aus (**Bild 2.39**), so gilt in jedem Punkt seiner Bahn das *Newton*sche Grundgesetz in Bahnrichtung

$$F_t = m\,a_t \tag{2.78}$$

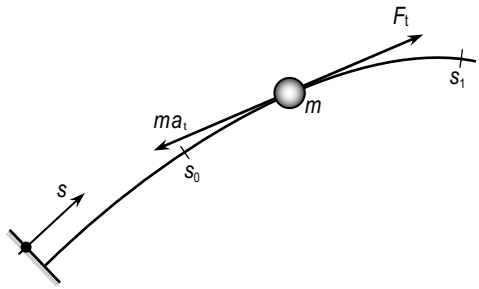


Bild 2.39: Bahnkräfte an einem beschleunigt bewegten Massenpunkt

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung folgt für die Arbeit der beschleunigenden Kraft $\vec{F}$ zwischen zwei Bahnpunkten nach Gl. (2.68)

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F_t\,(s)\,\mathrm{d}s = m\int_{s_0}^{s_1} a_t(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.79}$$

Das Integral auf der rechten Seite der letzten Gleichung lässt sich durch Substitutionen geschlossen auswerten, ohne das Kraftgesetz $F_t = F_t(s)$ bzw. das Beschleunigungsgesetz $a_t = a_t(s)$ näher zu kennen.

Durch die Substitution (die Zeit wird als neue Veränderliche eingeführt)

$$s = s(t) \qquad \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = v\,\mathrm{d}t \qquad s_0 = s(t_0) \qquad s_1 = s(t_1)$$

geht das Integral in Gl. (2.79) über in

$$W = m\int_{s_0}^{s_1} a_t\,\mathrm{d}s = m\int_{t_0}^{t_1} a_t\,v\,\mathrm{d}t \tag{2.80}$$

und durch die zweite Substitution (die Geschwindigkeit wird als neue Veränderliche eingeführt)

$$v = v(t) \qquad \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = a_t\,\mathrm{d}t \qquad v_0 = v(t_0) \qquad v_1 = v(t_1)$$

folgt $$W = m\int_{v_0}^{v_1} v\,\mathrm{d}v = m\frac{v_1^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} \tag{2.81}$$

Die Arbeit der beschleunigenden Kraft $\vec{F}$ – die *Beschleunigungsarbeit* – kann damit aus der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der Endgeschwindigkeit v_1 berechnet werden:

$$\boldsymbol{W = \int_{s_0}^{s_1} F_t\,\mathrm{d}s = m\frac{v_1^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2}} \tag{2.82}$$

Diese Beziehung wird als *Arbeitssatz* bezeichnet (s. Abschn. 2.2.3).

Wie man aus Gl. (2.79) erkennt, wurde der Arbeitssatz durch Integration des Grundgesetzes über die Ortskoordinate s gewonnen.

2.2.2 Energie

Potenzielle Energie der Lage Würde der Körper in **Bild 2.34b** aus der Lage P_1 in die Lage P_0 zurückgebracht, so würde die *Gewichtskraft* $\vec{F}_G$ die *positive* Arbeit $F_G\, h$ verrichten. Diese *mögliche* Arbeit der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ ist unabhängig vom Weg, auf dem man den Körper von P_1 nach P_0 bringt.

Für die Tatsache, dass die Gewichtskraft aufgrund der Lage des Körpers Arbeit verrichten kann, sagt man: Der Körper besitzt eine *potenzielle Energie der Lage* (ein Arbeitsvermögen) $E_{ph} = F_G\, h = m\, g\, h$. Der Wert dieser Energie hängt davon ab, wie man die *Bezugslage* P_0 festlegt.

Wählt man für die Bezugslage den Punkt P_0 (**Bild 2.34**), so ist die potenzielle Energie im Punkt P_1 gleich $F_G(z_1 - z_0)$. Wählt man aber als Bezugspunkt den Koordinatenursprung, so ist sie gleich $F_G\, z_1$. Die Energie der Lage ist negativ, wenn sich der Körper unterhalb des Bezugspunktes befindet.

Da die potenzielle Energie der Lage nur von der Masse und dem Höhenunterschied zwischen den betrachteten Lagen abhängt, haben Körper dieselbe potenzielle Energie, wenn sie gleiche Masse haben und sich in gleicher Höhe befinden. Ebenso sind alle auf gleicher Höhe liegenden Bezugspunkte gleichwertig. Deswegen legt man ein *Bezugsniveau*, eine *Bezugsebene* (falls man von der Krümmung der Erde absieht) fest, die zur Erdoberfläche parallel ist. Das Bezugsniveau wird auch *Nullniveau* genannt. Wir machen die Bezugsebene zur x, y-Ebene eines Koordinatensystems mit lotrechter z-Achse (**Bild 2.34b**). Auf den zur Bezugsebene parallelen Ebenen hat ein Körper die gleiche potenzielle Energie der Lage. Diese Ebenen werden als *Potenzialebenen* bezeichnet (Potenzialflächen, wenn die Krümmung der Erde berücksichtigt wird). Auf diese Weise wird jedem Punkt des Raumes eindeutig ein bestimmter Wert der potenziellen Energie – das *Potenzial* – zugeordnet. Die Funktion

$$E_{ph}(z) = F_G\, z = m\, g\, z \tag{2.83}$$

durch die diese Zuordnung erfolgt, heißt *Potenzialfunktion*.

Die Hubarbeit W, die die Kraft $\vec{F} = -\vec{F}_G$ verrichtet, um den Körper auf beliebigem Wege aus der Bezugsebene mit dem Potenzial $E_{ph} = 0$ in einen Punkt P zu bringen, ist gleich der Arbeit, die die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ bei einer Bewegung in umgekehrter Richtung verrichten würde (**Bild 2.34**)

$$W = \int_0^P \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = -\int_z^0 F_G\, \mathrm{d}z = F_G z = m\, g\, z = E_{ph} \tag{2.84}$$

Daraus folgt:

> Die potenzielle Energie der Lage eines Körpers ist gleich der Hubarbeit, die erforderlich ist, um den Körper aus der Bezugsebene in die betrachtete Lage zu bringen.

Wählt man ein anderes Nullniveau, so unterscheiden sich die neue und die alte Potenzialfunktion nur um eine additive Konstante. Diese Konstante ist $F_G\, h_1$, wenn h_1 der Höhenunterschied zwischen den beiden Bezugsebenen ist.

Die erforderliche Hubarbeit, um einen Körper auf beliebigem Wege aus einem Punkt P_0 (Potenzial E_{ph0}) in einen Punkt P_1 (Potenzial E_{ph1}) zu bringen, ist gleich der Potenzialdifferenz $E_{ph1} - E_{ph0}$ (s. Gl. (2.72))

$$W = \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \int_{s_0}^{s_1} F_t \,\mathrm{d}s = E_{ph1} - E_{ph0} \tag{2.85}$$

Diese Arbeit ist unabhängig von der Wahl des Nullniveaus, da sich zwei verschiedene Potenzialfunktionen nur um eine additive Konstante unterscheiden. Diese fällt bei der Bildung der Potenzialdifferenz heraus.

Potenzielle Energie der Feder Würde die gespannte Feder in **Bild 2.37** wieder entspannt, so würde die Federkraft F_f eine positive Arbeit verrichten (Federkraft und Verschiebung sind jetzt gleichgerichtet). Für die Tatsache, dass die Feder beim Entspannen Arbeit verrichten kann, also die gespannte Feder ein Arbeitsvermögen hat, sagt man: Die gespannte Feder besitzt eine *potenzielle Energie*. Die Größe der potenziellen Energie hängt von der Wahl des Vergleichszustandes ab. Im Allgemeinen wählt man hierfür den Zustand der entspannten Feder. Dann ist entsprechend Gl. (2.74) die potenzielle Energie einer um s gespannten Feder mit der Federkonstante c

$$E_{pf} = c\frac{s^2}{2} \tag{2.86}$$

Man beachte, dass bei dem so festgelegten Nullniveau die potenzielle Energie für positives und negatives s immer positiv ist. Es wird also sowohl bei der Verlängerung (Zugfeder) als auch bei der Verkürzung (Druckfeder) einer Feder, gemessen von der entspannten Lage aus, Arbeitsvermögen gespeichert.

Nach Gl. (2.86) ist jedem Spannungszustand der Feder eindeutig ein bestimmter Wert der potenziellen Energie – das *Potenzial* – zugeordnet. Die Funktion $E_{pf}(s)$, nach der diese Zuordnung erfolgt, heißt *Potenzialfunktion*. Das Potenzial ist nur von der Verlängerung s der Feder, d. h. nur vom Ort des ausgelenkten Federendes abhängig. Es ist eine skalare Ortsfunktion. Die zur Verlängerung der Feder um $\Delta s = s_1 - s_0$ erforderliche Spannarbeit der äußeren Kraft F kann aus der Potenzialdifferenz berechnet werden (s. Gl. (2.73))

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F_t\,(s)\,\mathrm{d}s = E_{pf1} - E_{pf0} \tag{2.87}$$

In Gl. (2.85) und (2.87) haben wir die Arbeit der Kraft F, die der Potenzialkraft (Gewichtskraft, Federkraft) *entgegen* wirkt, durch eine Potenzialdifferenz bestimmt. Für diese Arbeit gilt allgemein

$$W = \int_{s_0}^{s} F_t \,\mathrm{d}\sigma = E_p - E_{p0} \tag{2.88}$$

Kräfte, die ein Potenzial besitzen, wollen wir allgemein mit F_p (Gewichtskraft F_G, Federkraft F_f) bezeichnen.

Da die Potenzialkraft $\vec{F}_p$ der Kraft $\vec{F}$ entgegengesetzt gleich ist ($\vec{F}_p = -\vec{F}$, $\vec{F}_{pt} = -\vec{F}_t$), erhält man die Arbeit dieser Kraft zu

$$W_p = \int_{s_0}^{s} F_{pt}\, d\sigma = -\int_{s_0}^{s} F_t\, d\sigma = -(E_p - E_{p0}) \tag{2.89}$$

Die Arbeit der Potenzialkräfte ist nur vom Anfangs- und Endpunkt der Verschiebung und nicht von dem Weg zwischen diesen Punkten abhängig.

Tritt bei der Bewegung eines Körpers aus einer Lage 0 nach 1 Reibung auf, so kann die Arbeit der Reibungskraft zwischen diesen Orten beliebig groß gemacht werden, indem man den Körper z. B. mehrfach hin- und herbewegt. Die Arbeit der Reibungskraft ist also nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt der Verschiebung, sondern auch vom Weg zwischen diesen Punkten abhängig. Sie kann daher nicht durch eine Potenzialdifferenz dargestellt werden. Man sagt: *Reibungskräfte haben kein Potenzial*.

Kinetische Energie Würde ein Massenpunkt, der am Orte s_0 die Bahngeschwindigkeit v_0 hat, durch eine äußere Kraft F_t am Orte s_1 bis zum Stillstand ($v = 0$) gebremst (**Bild 2.40**), so würde dabei die Trägheitskraft $m(-a_t)$ die Arbeit

$$E_{k0} = \int_{s_0}^{s_1} m\,(-a_t)\, ds$$

verrichten. Da die *d'Alembert*sche Trägheitskraft bei negativer Beschleunigung in Richtung der Wegkoordinate wirkt, ist die Arbeit E_{k0} positiv. (In **Bild 2.40** sind positive Annahmen gemacht, s. Abschn. 2.1.3.) Mit den Substitutionen von S. 92 erhält man

$$E_{k0} = \int_{s_0}^{s_1} m\,(-a_t)\, ds = -m\int_{t_0}^{t_1} a_t\, v\, dt = -m\int_{v_0}^{0} v\, dv = -m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{0}$$

oder

$$\boldsymbol{E_{k0} = m\frac{v_0^2}{2}} \tag{2.90}$$

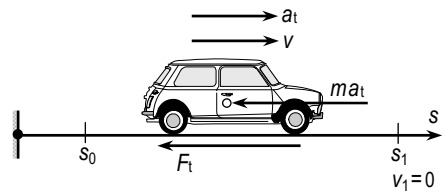


Bild 2.40:
Bahnkräfte an bremsendem Fahrzeug

Diese mögliche Arbeit E_k der Trägheitskraft beim Abbremsen bis zum Ruhezustand bezeichnet man als *kinetische Energie*. Durch Gl. (2.90) wird einem sich mit der Geschwindigkeit v_0 bewegenden Massenpunkt ein bestimmter Wert E_k der kinetischen Energie zugeordnet. Man

sagt: Ein sich mit der Geschwindigkeit v bewegender Körper besitzt die kinetische Energie $E_k = m\,v^2/2$.

Man beachte, dass die kinetische Energie eines Massenpunktes von der Wahl des Bezugssystemes abhängig ist. So hat ein Körper der Masse m, der im Wagen eines mit der Geschwindigkeit v fahrenden Zuges ruht, bezüglich des Wagens die kinetische Energie $E_k = 0$ und bezüglich der Erdoberfläche die kinetische Energie $E_k = m\,v^2/2$. Das festgelegte Nullniveau (der Vergleichszustand) der kinetischen Energie ist der Ruhezustand ($v = 0$). Wegen der quadratischen Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ist daher für $v \neq 0$ die kinetische Energie im Gegensatz zur potenziellen Energie der Lage stets eine positive Größe.

Aufgrund vorstehender Betrachtungen folgt:

Energie ist gespeichertes Arbeitsvermögen.

Das Arbeitsvermögen der Gewichtskraft aufgrund der Lage des Körpers wird als *potenzielle Energie der Lage*, das Arbeitsvermögen der Federkraft aufgrund des Spannungszustandes der Feder als *potenzielle Energie der Feder*, das Arbeitsvermögen der Trägheitskraft aufgrund des Geschwindigkeitszustandes des Massenpunktes als *kinetische Energie* bezeichnet.

Während sich der Begriff *Arbeit* auf einen Vorgang bezieht (Heben eines Körpers, Spannen einer Feder, Beschleunigen eines Massenpunktes), bezieht sich der Begriff *Energie* auf einen bestimmten Zustand (Lage, Spannungszustand, Geschwindigkeitszustand). Kurz:

Arbeit ist Vorgang, Energie ist Zustand.

Die Einheit der Energie ist die der Arbeit. Mit Hilfe von Gl. (2.65) können die verschiedenen Maßeinheiten ineinander umgerechnet werden.

Ihre eigentliche Bedeutung erhalten die Begriffe Arbeit und Energie erst durch den Arbeitssatz und den Energieerhaltungssatz.

2.2.3 Arbeitssatz und Energieerhaltungssatz

Arbeitssatz Die Ausdrücke auf der rechten Seite von Gl. (2.82) sind die kinetische Energie des Massenpunktes in den Lagen 0 und 1. Man bezeichnet diese Gleichung als Arbeitssatz. Dieser besagt:

Die Differenz der kinetischen Energien ist gleich der von den äußeren, am Massenpunkt angreifenden Kräften auf dem Wege von s_0 nach s_1 verrichteten Arbeit.

$$\frac{m}{2}v_1^2 - \frac{m}{2}v_0^2 = \int_{s_0}^{s_1} F_t \, \mathrm{d}s = W_{01} \tag{2.91}$$

oder

$$E_{k1} - E_{k0} = W_{01} \tag{2.92}$$

Den Arbeitssatz wendet man zweckmäßig dort an, wo die Bahnkomponente der resultierenden äußeren Kraft als Funktion des Weges bekannt ist oder dort, wo die Geschwindigkeit v eines Massenpunktes in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg gesucht ist. Wird der Arbeitssatz für ein System von Massenpunkten angewandt, so ist E_k die kinetische Energie des ganzen Systems und W_{01} die Arbeit aller am freigemachten System angreifenden Kräfte (vgl. Beispiel 2.21, S. 98).

Beispiel 2.18: Eine Kiste gleitet aus der Ruhelage eine raue schiefe Ebene herab (**Bild 2.6c**). Welche Geschwindigkeit v hat sie nach dem Höhenverlust h (s. auch Beispiel 2.3, S. 67)?

Nach **Bild 2.6c** ist die Bahnkomponente der äußeren Kraft

$$F_t = F_G \sin\alpha - F_r = F_G \sin\alpha - \mu F_G \cos\alpha = m\,g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Mit ihr erhält man aus Gl. (2.91), wenn man den Index 1 fortlässt und beachtet, dass $v_0 = 0$ ist,

$$\frac{m}{2}v^2 = m\,g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,s = m\,g\,s\sin\alpha\,(1 - \mu\cot\alpha)$$

Da $s\sin\alpha = h$ ist, folgt

$$v = \sqrt{2\,g\,h\,(1 - \mu\cot\alpha)} \tag{2.93}$$

Man erhält eine reelle Lösung, falls $(1 - \mu\cot\alpha) > 0$ ist, d. h., die Kiste rutscht, wenn $\tan\alpha > \mu$ ist. Sie setzt sich aus der Ruhelage ($v_0 = 0$) in Bewegung, wenn $\tan\alpha > \mu_0$ (Haftreibung) ist.

Beispiel 2.19: Mit welcher Geschwindigkeit trifft der in Aufgabe 3, S. 37, schräg geworfene Ball ($v_0 = 25$ m/s) den Punkt B mit den Koordinaten $x_B = 15$ m, $y_B = 10$ m (**Bild 1.28**)?
Auf den Ball wirkt nur die Gewichtskraft F_G. Die von ihr verrichtete Arbeit ist nur von der Größe der Gewichtskraft und der jeweiligen Höhendifferenz abhängig. Da die y-Koordinate in **Bild 1.28** nach oben positiv gezählt wurde, ist die Arbeit von F_G auf dem Wege von $y = 0$ bis $y = y_B$ negativ. Damit erhält man aus Gl. (2.91)

$$\frac{m}{2}(v_B^2 - v_0^2) = -F_G y_B = -m\,g\,y_B$$

oder

$$v_B = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,y_B} = \sqrt{\left(25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 2\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 10\text{ m}} = 20{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Man beachte, dass der Abwurfwinkel und die Entfernung x_B nicht in die Rechnung eingehen. Es ist aus der Rechnung nicht zu erkennen, ob der Ball den Punkt B überhaupt trifft. Die Lösung sagt lediglich aus, dass der Ball, wenn er die Höhe y_B erreicht, unabhängig vom Abwurfwinkel die Geschwindigkeit v_B hat und den Punkt B nur mit dieser Geschwindigkeit treffen kann.

Die Energie ist wie die Arbeit eine *skalare* Größe. Der Arbeitssatz (der durch einmalige Integration über die Bahnkomponente der Kraft aus dem *Newton*schen Grundgesetz gewonnen wurde) kann daher das vektorielle Grundgesetz nicht ersetzen, er kann es nur ergänzen. Man erkennt dies besonders gut an dem letzten Beispiel. Gleiches gilt für den Energieerhaltungssatz auf S. 99.

Beispiel 2.20: Welche Brennschlussgeschwindigkeit $v_B = v_0$ (Anfangsgeschwindigkeit für die ballistische Bahn) muss eine Rakete haben, wenn sie bei senkrechtem Start von der Erdoberfläche aus die Erde verlassen soll, d. h. nicht auf die Erde zurückfällt? Der Luftwiderstand wird vernachlässigt, weil er in der Brennschlusshöhe nur noch sehr gering ist.
In einer Entfernung r vom Erdmittelpunkt wirkt auf die ausgebrannte Rakete nur noch die Anziehungskraft der Erde, sie ist nach dem Gravitationsgesetz dem Quadrat des Abstandes r umgekehrt proportional und der Koordinate r entgegengerichtet (**Bild 2.41**). Mit Gl. (2.61) ist

$$F_r = -m\, g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

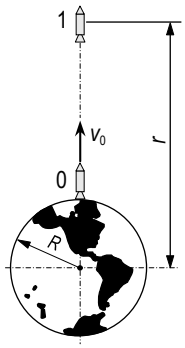


Bild 2.41: Rakete bei senkrechtem Start

Für $r = R$ ($R = 6{,}371 \cdot 10^3$ km = Erdradius) ist $F_r = -\, m\, g_0$ die Gewichtskraft an der Erdoberfläche. Steigt die Rakete auf die Höhe r_1, so ist die Arbeit der Kraft F_r

$$W_{01} = \int_R^{r_1} F_r \,\mathrm{d}r = -m\, g_0\, R^2 \int_R^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = m\, g_0\, R^2 \left[\frac{1}{r}\right]_R^{r_1} = m\, g_0\, R^2 \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R}\right]$$

Diese ist nach dem Arbeitssatz gleich der Differenz der kinetischen Energien zwischen den Orten 0 und 1

$$E_{k1} - E_{k0} = \frac{m\, v_1^2}{2} - \frac{m\, v_0^2}{2} = m\, g_0\, R^2 \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R}\right] \tag{2.94}$$

Strebt $r_1 \to \infty$, so darf $v_1 = 0$ werden, ohne dass die Rakete auf die Erde zurückfällt. Mit der Bedingung $r_1 \to \infty$, $v_1 \to 0$ folgt aus der vorstehenden Gleichung für die Mindestbrennschlussgeschwindigkeit $m v_0^2/2 = m\, g_0\, R$ oder

$$v_B = v_0 = \sqrt{2\, g_0\, R} = \sqrt{2 \cdot \left(9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot 6{,}371 \cdot 10^6 \mathrm{m}} = 11{,}18 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 11{,}18 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Beispiel 2.21: Welche Geschwindigkeit v_1 hat die Masse m_1 in Beispiel 2.7, S. 72, wenn sie aus der Ruhelage den Weg $s_1 = 10$ m zurückgelegt hat (**Bild 2.10**)?
Wir betrachten das ganze System. An der Masse m_1 greift entgegen der Bewegungsrichtung die äußere Kraft[1)]

$$F_t = -\,(F_{G1} \sin\alpha + F_r) = -\,F_{G1}\,(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)$$

an, an m_2 in Bewegungsrichtung die Gewichtskraft F_{G2}. Nur diese verrichten am System die Arbeit

$$W_{01} = -\,F_{G1}\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\, s_1 + F_{G2}\, s_2$$

(Die Seilkräfte an den beiden Massen sind gleich groß, sie wirken in entgegengesetzter Richtung, und die Summe ihrer Arbeiten ist Null ($F_s\, s_1 - 2\, F_s\, s_2 = 0$)). Da die Bewegung aus der Ruhelage beginnt, ist

---

1) Man beachte, dass bei der Anwendung des Arbeitssatzes die Trägheitskräfte nicht zu den „äußeren Kräften“ gezählt werden. Die Arbeit der Trägheitskräfte ist die Differenz der kinetischen Energien.

$E_{k0} = 0$, und E_{k1} ist die Summe der kinetischen Energien der beiden Massen in der Lage 1. Aus dem Arbeitssatz Gl. (2.91) erhält man

$$E_{k1} = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = W_{01} = -m_1\, g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\, s_1 + m_2\, g\, s_2$$

Mit $s_1 = 2\, s_2$ und $v_1 = 2\, v_2$ folgt

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{4}\right)\frac{v_1^2}{2} = \left[m_2/2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\right] g\, s_1$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{m_2/2 - m_1\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2/4}\, 2\, g\, s_1}$$

$$= \sqrt{\frac{1000\,\text{kg} - 1000\,\text{kg}\cdot(0{,}5 + 0{,}3\cdot 0{,}866)}{1000\,\text{kg} + 500\,\text{kg}}\, 2\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 10\,\text{m}} = 5{,}61\,\text{m/s}$$

Energieerhaltungssatz der Mechanik In der Mechanik kennt man die Energieformen: Potenzielle Energie der Lage E_{ph}, potenzielle Energie der Feder E_{pf} und kinetische Energie E_k. Den Energieerhaltungssatz wollen wir uns an einem Beispiel verständlich machen, in dem diese drei Energieformen auftreten. Dazu betrachten wir das Feder-Masse-System in **Bild 2.42** Das x, y, z-Koordinatensystem ist so eingeführt, dass die z-Achse vertikal nach oben zeigt und die Feder für $z = 0$ entspannt ist (**Bild 2.42a**). Wird nun der Körper in lotrechter Richtung ausgelenkt und sich selbst überlassen, so führt er unter der Wirkung der Feder- und Gewichtskraft eine schwingende Bewegung aus. Zu einer Zeit t_0 möge er sich am Orte z_0 und zu der späteren Zeit t_1 am Orte z_1 befinden (**Bild 2.42c** und **d**). Für die Bewegung zwischen diesen beiden Lagen stellen wir den Arbeitssatz auf.

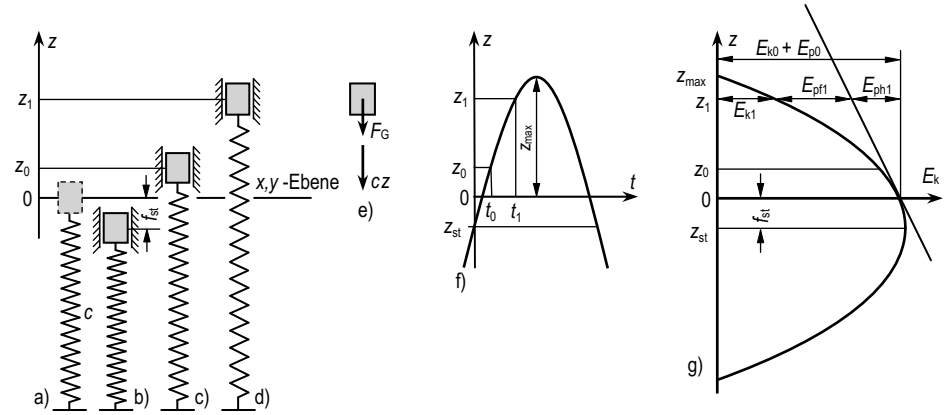


Bild 2.42: Feder-Masse-System zur Herleitung des Energiesatzes
a) Feder entspannt b) statische Ruhelage
c) und d) Massenpunkt zu den Zeiten t_0 bzw. t_1 in den Lagen z_0 bzw. z_1
e) äußere Kräfte an der freigemachten Masse
f) Ort-Zeit-Diagramm g) Energie-Ort-Diagramm

Die auf den Massenpunkt wirkende resultierende äußere Kraft F_z setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft $F_G = m\,g$ und der Federkraft $F_f = c\,z$ (**Bild 2.42e**)

$$F_z = -\,(m\,g + c\,z) \tag{2.95}$$

Sie ist der z-Koordinate entgegengerichtet und daher negativ. Setzt man die Kraft $F_z = F_t$ in den Arbeitssatz Gl. (2.91) ein, so folgt

$$m\frac{v_1^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{z_0}^{z_1} (-\,m\,g - c\,z)\,\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z_1} (-m\,g)\,\mathrm{d}z + \int_{z_0}^{z_1} (-\,c\,z)\,\mathrm{d}z \tag{2.96}$$

Die Wegintegrale der Gewichtskraft und der Federkraft in dieser Beziehung lassen sich nach Gl. (2.89) durch die Differenzen der zugehörigen Potenzialfunktionen ausdrücken (s. auch Gl. (2.84) und Gl. (2.86))

$$\int_{z_0}^{z_1} (-\,m\,g)\,\mathrm{d}z = m\,g\,z_0 - m\,g\,z_1 = E_{\mathrm{ph0}} - E_{\mathrm{ph1}} \tag{2.97}$$

$$\int_{z_0}^{z_1} (-\,c\,z)\,\mathrm{d}z = c\frac{z_0^2}{2} - c\frac{z_1^2}{2} = E_{\mathrm{pf0}} - E_{\mathrm{pf1}} \tag{2.98}$$

Ersetzt man die Integrale in Gl. (2.96) durch die Potenzialdifferenzen und bringt alle auf die Stelle 1 bezogenen Größen auf die eine und alle auf die Stelle 0 bezogenen Größen auf die andere Seite der Gleichung, so erhält man

$$m\frac{v_1^2}{2} + m\,g\,z_1 + c\frac{z_1^2}{2} = m\frac{v_0^2}{2} + m\,g\,z_0 + c\frac{z_0^2}{2} \tag{2.99}$$

$$E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{ph1}} + E_{\mathrm{pf1}} = E_{\mathrm{k0}} + E_{\mathrm{ph0}} + E_{\mathrm{pf0}}$$

Die Summe aus der kinetischen Energie, der potenziellen Energie der Lage und der potenziellen Energie der Feder an der Stelle 1 ist also gleich der Summe dieser drei Energien an der Stelle 0. Da die Stellen 1 und 0 willkürlich gewählt wurden, bleibt auch an jeder anderen Stelle die Summe der Energien konstant. Das ist die Aussage des Energieerhaltungssatzes (kurz: Energiesatzes) der Mechanik. Fasst man die beiden potenziellen Energien zu $E_p = E_{ph} + E_{pf}$ zusammen, so lautet er

$$\boldsymbol{E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} = \mathrm{const}} \tag{2.100}$$

Die Summe aus der kinetischen und der potenziellen Energie ist zu jedem Zeitpunkt konstant.

Der Energiesatz gilt nur, wenn alle am freigemachten Massenpunkt angreifenden Kräfte ein Potenzial haben, d. h., wenn ihre Arbeitsintegrale unabhängig vom Weg sind und sich durch die Differenzen der zugehörigen Potenzialfunktionen ausdrücken lassen. Reibungskräfte dürfen z. B. nicht auftreten.

In **Bild 2.42g** ist die kinetische Energie E_k in Abhängigkeit von der Ortskoordinate z aufgetragen. Aus Gl. (2.99) erhält man in Verbindung mit Gl. (2.100) für eine beliebige Lage z des Massenpunktes

$$E_k = E_k(z) = (E_{k0} + E_{p0}) - m\,g\,z - c\,\frac{z^2}{2} = (E_{k0} + E_{p0}) - E_{ph} - E_{pf} \tag{2.101}$$

Die Kurve $E_k(z)$ ist eine Parabel.

In der oberen und unteren Umkehrlage des Massenpunktes ist $E_k = m\,v^2/2 = 0$. Die Energieparabel hat ihren Scheitel in der statischen Ruhelage (**Bild 2.42b**).

Allgemein lassen sich die an einem Massenpunkt angreifenden Kräfte in zwei Gruppen unterteilen, nämlich Kräfte mit Potenzial ($\vec{F}_p$) und ohne Potenzial ($\vec{F}_N$)[1]. Mit diesen kann man das Arbeitsintegral in Gl. (2.91) in zwei Integrale aufspalten

$$E_{k1} - E_{k0} = \int_{s_0}^{s_1} F_t\,\mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_1} F_{pt}\,\mathrm{d}s + \int_{s_0}^{s_1} F_{Nt}\,\mathrm{d}s \tag{2.102}$$

Das Arbeitsintegral der Kräfte mit Potenzial (Gewichtskräfte, Federkräfte) ist unabhängig vom Wege und kann entsprechend Gl. (2.89) durch die Potenzialdifferenz $E_{p0} - E_{p1}$ ersetzt werden

$$W_p = \int_{s_0}^{s_1} F_{pt}\,\mathrm{d}s = E_{p0} - E_{p1} \tag{2.103}$$

In dieser Gleichung ist unter E_p die gesamte potenzielle Energie, also Lage- und Federenergien zu verstehen.

Das Arbeitsintegral der Kräfte ohne Potenzial wollen wir mit W_{N01} bezeichnen

$$W_{N01} = \int_{s_0}^{s_1} F_{Nt}\,\mathrm{d}s \tag{2.104}$$

Dieses Integral ist abhängig vom Weg zwischen den Orten 0 und 1. Ersetzt man die Integrale in Gl. (2.102) durch die Ausdrücke in Gl. (2.103) und (2.104) und bringt alle auf die Stelle 1 bezogenen Größen auf die eine und die auf die Stelle 0 bezogenen auf die andere Seite, so folgt

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k0} + E_{p0} + W_{N01} \tag{2.105}$$

Die Summe der kinetischen und potenziellen Energie am Ort 1 ist gleich der Summe dieser Energien am Ort 0 vermehrt um die Arbeit W_{N01} der Kräfte ohne Potenzial.

Die Arbeit W_{N01} ist positiv, wenn das Integral Gl. (2.104) positiv ist, wenn also dem bewegten Körper auf dem Wege von 0 nach 1 Energie zugeführt wird (vgl. Beispiel 2.24, S. 103, und

[1] Index N = „Nichtpotenzialkräfte“.

Aufgabe 4, S. 113). Wirken die Kräfte $\vec{F}_N$ einer Verschiebung des Körpers entgegen, z. B. Reibungskräfte, so ist die Arbeit W_{N01} negativ.

In der Anwendung wird die Energiesumme gewöhnlich nur für zwei Lagen eines Körpers (oder eines Systems von Körpern) betrachtet. Umfangreiche Aufgaben lassen sich dann entsprechend Gl. (2.105) mit Hilfe des folgenden Schemas lösen (vgl. Beispiel 2.25, S. 103):

Ort	E_k	E_{ph}	E_{pf}	W_N	Σ
0	E_{k0}	E_{ph0}	E_{pf0}	W_{N01}	$E_{k0} + E_{ph0} + E_{pf0} + W_{N01}$
1	E_{k1}	E_{ph1}	E_{pf1}	–	$E_{k1} + E_{ph1} + E_{pf1}$

Der Energieerhaltungssatz ist in Gl. (2.100) nur für mechanische Energien formuliert. Neben den mechanischen gibt es weitere Energieformen. So war es das Verdienst des Arztes *Robert Mayer* (1814 bis 1878), nachgewiesen zu haben, dass auch die Wärmemenge eine Energieform ist. Wärmemengen werden in Joule (J) gemessen. Es gilt die Umrechnung Gl. (2.65)

$$1\ \text{J} = 1\ \text{Ws} = 1\ \text{Nm} \tag{2.106}$$

Weitere Energieformen sind elektrische Energie, chemische Energie, Strahlungsenergie u. a. m. Der Energieerhaltungssatz gilt, wie die Erfahrung zeigt, für alle Energieformen. Es ist also die Summe aller Energien in einem abgeschlossenen System konstant. Eine Energie kann wohl in eine andere verwandelt werden, aber nicht verloren gehen. Der Energieerhaltungssatz stellt in seiner allgemeinsten Form eines der umfassendsten Naturgesetze dar und ist dann ein selbstständiges Axiom.

Bei Energieumwandlungen spricht man von „Energieverlusten". Gemeint ist damit, dass in einem Prozess die vorhandene Energie nur teilweise dem beabsichtigten Zweck zugeführt werden kann. Soll z. B. die in einem Brennstoff vorhandene chemische Energie mit Hilfe einer Brennkraftmaschine in mechanische Arbeit verwandelt werden, so wird die chemische Energie in Wärme umgesetzt, von der nur ein Teil umgewandelt werden kann.

Beispiel 2.22: Gesucht ist die Geschwindigkeit v_1, mit der ein frei herabfallender Gegenstand aus $h = 100$ m Höhe die Erde trifft (vgl. Beispiel 1.3, S. 11). Legt man das Nullniveau der potenziellen Energie auf die Erdoberfläche, so ist bei Bewegungsbeginn (Ort 0) $E_{k0} = 0$ und $E_{p0} = m\,g\,h$. An der Erdoberfläche (Ort 1) ist $E_{k1} = mv_1^2/2$ und $E_{p1} = 0$. Aus dem Energiesatz Gl. (2.99) folgt mit $E_{k1} = E_{p0}$

$$\frac{m\,v_1^2}{2} = m\,g\,h \quad \text{oder} \quad v_1 = \sqrt{2\,g\,h} = 44{,}3\ \text{m/s}$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \neq 0$ (dabei ist es gleichgültig, ob der Gegenstand aufwärts, abwärts oder schräg geworfen wird), so ergibt sich mit $E_{k0} = mv_0^2/2$ aus dem Energiesatz $E_{k1} - E_{k0} = E_{ph0}$ und

$$\frac{m}{2}(v_1^2 - v_0^2) = m\,g\,h \quad \text{oder} \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,h}$$

Beispiel 2.23: Eine Kugel hängt am Ende eines Fadens ($l = 1$ m) mit vernachlässigbar kleiner Masse und wird aus der gezeichneten Lage ($\alpha = 30°$) losgelassen (**Bild 2.43**). In der Vertikale schlägt der Faden im Punkte B an eine feste Wand ($b = 0{,}6$ m) und wird dadurch abgewinkelt. Bei welchem Winkel β erreicht die Kugel ihre Umkehrlage?

In den Umkehrlagen hat die Kugel nur potenzielle Energie. Da keine Energie verloren geht, liegen diese auf der gleichen Höhe. Daraus folgt

$$(l - b)\cos\beta = l\cos\alpha - b$$

$$\cos\beta = \frac{l\cos\alpha - b}{l - b} = \frac{(1 \cdot 0{,}866 - 0{,}6)\ \text{m}}{(1 - 0{,}6)\ \text{m}} = 0{,}665 \qquad \beta = 48{,}3^\circ$$

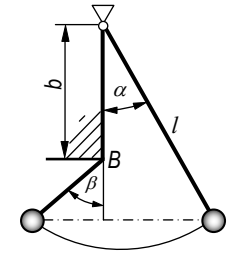


Bild 2.43: Kugel am Ende eines Fadens

Beispiel 2.24: Man löse die Aufgabe in Beispiel 2.16, S. 90, mit Hilfe des Energiesatzes Gl. (2.105). Legt man das Nullniveau der potenziellen Energie in die Lage 0 (**Bild 2.36**), so ist $E_{ph0} = 0$. Da sich der Lkw mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist $E_{k0} = E_{k1} = mv_0^2/2$. Das Schema für die Energiebilanz lautet

Ort	E_k	E_{ph}	W_N	Σ
0	$mv_0^2/2$	0	W_{N01}	$mv_0^2/2 + W_{N01}$
1	$mv_0^2/2$	$m\,g\,h$	0	$mv_0^2/2 + m\,g\,h$

Nach dem Energiesatz sind die beiden Summen in der letzten Spalte einander gleich. Damit erhält man die auf dem Wege von 0 nach 1 dem Lkw zugeführte Energie $W_{N01} = m\,g\,h = 2{,}94 \cdot 10^6$ Nm. Diese ist gleich der früher berechneten Arbeit der Zugkraft F_t.

Beispiel 2.25: Der Fall eines Körpers (m = 40 kg) aus h = 1 m Höhe wird durch eine Feder (Federkonstante c = 800 N/cm) abgefangen (**Bild 2.44**). In den Führungen tritt die Reibungskraft F_r = 40 N auf. Man bestimme a) die Geschwindigkeit v_1, mit der der Körper die Feder trifft, b) den maximalen Federweg f_f, c) die maximale Federkraft F_m. d) Wie groß sind v_1, f_f und F_m, wenn die Reibungskraft $F_r = 0$ ist?

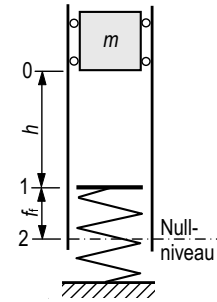


Bild 2.44: Fall eines Körpers wird durch Feder gebremst

a) Das Nullniveau der potenziellen Energie der Lage wählen wir in der Umkehrlage 2. Dann besitzt der Körper am Ort 0 die potenzielle Energie $E_{ph0} = m\,g\,(h + f_f)$, am Ort 1 ist $E_{ph} = m\,g\,f_f$. Die entsprechenden kinetischen Energien betragen $E_{k0} = 0$ und $E_{k1} = mv_1^2/2$. Die Reibungskraft ist der Verschiebung entgegengerichtet und verrichtet zwischen den Orten 0 und 1 die negative Arbeit $W_{N01} = -F_r\,h$. Mit Hilfe des Schemas unter Beispiel 2.24 und Gl. (2.105) erhält man

Ort	E_k	E_{ph}	W_N	Σ
0	0	$m\,g\,(h+f_f)$	$-F_r\,h$	$m\,g\,(h+f_f)-F_r\,h$
1	$mv_1^2/2$	$m\,g\,f_f$		$mv_1^2/2+m\,g\,f_f$

$$m\frac{v_1^2}{2}+m\,g\,f_f=m\,g\,(h+f_f)-F_r\,h$$

$$v_1=\sqrt{2\,g\,h\left[1-\frac{F_r}{m\,g}\right]}=\sqrt{2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1\,\mathrm{m}\left[1-\frac{40}{40\cdot 9{,}81}\right]}=4{,}20\ \mathrm{m/s}$$

b) Am Ort 2 ist die Feder um f_f zusammengedrückt. Die potenzielle Energie der Feder beträgt $E_{pf2}=c\,f_f^2/2$, die kinetische Energie E_{k2} verschwindet, da $v_2=0$ ist. Stellt man die Energiebilanz für die Lagen 0 und 2 auf, so folgt

Ort	E_k	E_{ph}	E_{pf}	W_N	Σ
0	0	$m\,g\,(h+f_f)$	0	$-F_r\,(h+f_f)$	$m\,g\,(h+f_f)-F_r\,(h+f_f)$
2	0	0	$c\,f_f^2/2$		$c\,f_f^2/2$

$$\frac{c\,f_f^2}{2}=m\,g\,(h+f_f)-F_r(h+f_f)$$

$$f_f^2-2\,\frac{m\,g-F_r}{c}\,f_f=2\,\frac{m\,g-F_r}{c}\,h$$

Der Ausdruck $(m\,g-F_r)/c=(40\cdot 9{,}81-40)$ N/ (800 N/cm) = 0,44 cm $=f_{st}$ ist die statische Verformung der Feder, wenn die Feder- und Reibungskraft der Gewichtskraft das Gleichgewicht halten. Mit f_{st} hat die quadratische Gleichung die physikalisch sinnvolle Lösung

$$f_f=f_{st}+\sqrt{f_{st}^2+2f_{st}\,h}=0{,}44\ \mathrm{cm}+\sqrt{(0{,}44^2+2\cdot 0{,}44\cdot 100)\ \mathrm{cm}^2}=9{,}83\ \mathrm{cm}$$

c) Die maximale Federkraft beträgt

$$F_m=c\,f_f=(800\ \mathrm{N/cm})\cdot 9{,}83\ \mathrm{cm}=7864\ \mathrm{N}$$

d) Mit $F_r=0$ erhält man aus vorstehenden Gleichungen

$$v_1=\sqrt{2\,g\,h}=4{,}43\ \mathrm{m/s}\qquad f_{st}=m\,g/c=0{,}49\ \mathrm{cm}$$

$$f_f=f_{st}\pm\sqrt{f_{st}^2+2\,f_{st}\,h}=f_{st}\pm f_m=(0{,}49\pm 9{,}91)\ \mathrm{cm}$$

Die positive Lösung $f_f=10{,}40$ cm gibt die größte Zusammendrückung der Feder an. In vorstehender Gleichung ist der Wurzelausdruck die Amplitude f_m der Schwingung, die sich einstellen würde, wenn der Körper an der Feder haften bliebe. Die Mittellage dieser Schwingung ist die statische Ruhelage. Die negative Lösung für f_f gibt die obere Umkehrlage an. Die maximale Federkraft beträgt

$$F_m=c\,f_f=800\ \mathrm{N/cm}\cdot 10{,}40\ \mathrm{cm}=8320\ \mathrm{N}$$

Beispiel 2.26: Ein Wagen gleitet aus der Ruhelage A reibungsfrei eine schiefe Ebene herab ($\alpha = 30°$), die im Punkt B in eine Kreisbahn übergeht (**Bild 2.45**; $\overline{AB} = 20$ m, $\rho = 40$ m). An welcher Stelle C löst sich der Wagen von der Kreisbahn?

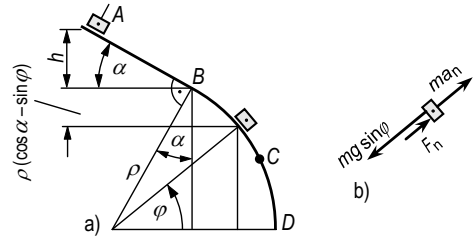


Bild 2.45:
Wagen löst sich von Kreisbahn

Der Wagen löst sich von der Bahn, wenn die Normalkraft Null wird. In **Bild 2.45b** ist der Körper freigemacht, es sind die Kräfte in Normalenrichtung angetragen. Neben der Gewichtskraftkomponente $m\,g \sin \varphi$ und der Normalkraft F_n greift in Normalenrichtung die Trägheitskraft $m\,a_n = m\,v^2/\rho$ an, und es gilt

$$F_n = m\,g \sin \varphi - \frac{m\,v^2}{\rho} \tag{2.107}$$

Nimmt man das Nullniveau der potenziellen Energie in der Höhe des Punktes D an, so gilt für irgendeinen Ort zwischen B und C

$$E_k + E_p = E_{kA} + E_{pA}$$

$$\frac{m\,v^2}{2} + m\,g\,\rho \sin \varphi = 0 + m\,g\,(h + \rho \cos \alpha) \tag{2.108}$$

Setzt man den Ausdruck für $m\,v^2$ aus Gl. (2.108) in Gl. (2.107) ein, so folgt mit $F_n = 0$

$$m\,g\,\rho \sin \varphi = 2\,m\,g\,(h + \rho(\cos \alpha - \sin \varphi)) \quad \sin \varphi = \frac{2}{3}\left(\frac{h}{\rho} + \cos \alpha\right)$$

Mit $h = \overline{AB} \sin \alpha = 10$ m erhält man für den Ablösungswinkel

$$\sin \varphi = \frac{2}{3}\left(\frac{10\text{ m}}{40\text{ m}} + 0{,}866\right) = 0{,}744 \qquad \varphi = 48{,}1°$$

Beispiel 2.27: Für das mathematische Pendel in Beispiel 2.11, S. 79, bestimme man die Fadenkraft in Abhängigkeit vom Ausschlagwinkel φ.
In **Bild 2.17a** ist das Pendel in einer ausgelenkten Lage gezeichnet. Legt man das Nullniveau der potenziellen Energie in die statische Ruhelage, so ist die gesamte Energie in der Lage φ

$$E_k + E_p = \frac{m\,v^2}{2} + m\,g\,h = \frac{m\,v^2}{2} + m\,g\,l\,(1 - \cos \varphi) = \text{const} \tag{2.109}$$

Die Fadenkraft F_n gewinnt man aus dem Gleichgewicht der Kräfte in radialer Richtung (**Bild 2.17b**)

$$F_n = m\,l\,\dot{\varphi}^2 + m\,g \cos \varphi \tag{2.110}$$

Darin kann die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ mit Hilfe des Energiesatzes durch den Winkel φ wie folgt ausgedrückt werden. Nimmt man an, dass das Pendel zu Beginn der Bewegung um φ_0 ausgelenkt und dann losgelassen wird, so ist die Anfangsenergie $E_{k0} = 0$ und $E_{p0} = m\,g\,l\,(1 - \cos \varphi_0)$. Durch Gleichsetzen von $E_{k0} + E_{p0}$ mit Gl. (2.109) folgt

$$\frac{m\,v^2}{2} + m\,g\,l\,(1 - \cos\varphi) = m\,g\,l\,(1 - \cos\varphi_0)$$

$$\frac{m\,v^2}{2} = m\,g\,l\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

Mit $l\,\dot{\varphi} = v$ erhält man

$$\frac{m\,v^2}{2} = \frac{m\,l^2\dot{\varphi}^2}{2} = m\,g\,l\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

und $\quad m\,l\,\dot{\varphi}^2 = 2\,m\,g\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$

Setzt man dies in Gl. (2.109) ein, so wird

$$F_\mathrm{n} = 2\,m\,g\,(\cos\varphi - \cos\varphi_0) + m\,g\cos\varphi = m\,g\,(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$$

Die größte Fadenkraft tritt für $\varphi = 0$ auf. Wählt man z. B. für die Ausgangslage $\varphi_0 = \pi/2$, so ist $F_\mathrm{n\,max} = 3\,m\,g$. Es ist bemerkenswert, dass die Fadenkraft unabhängig von der Länge l ist.

2.2.4 Leistung einer Kraft, Wirkungsgrad

Zur Kennzeichnung einer Maschine oder eines Vorganges ist es häufig von Bedeutung zu wissen, in welcher Zeit eine Arbeit verrichtet wird. Um dies kurz zu charakterisieren, wird der Begriff Leistung eingeführt.

Man definiert die *mittlere Leistung* einer Kraft zwischen den Zeitpunkten t_0 und t_1 durch den Quotienten

$$\boldsymbol{\overline{P} = \frac{W_1 - W_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta W}{\Delta t}} \tag{2.111}$$

Die mittlere Leistung ist der Quotient aus der Arbeit und der Zeit, in der diese Arbeit verrichtet wird.

Die *augenblickliche Leistung*, *kurz Leistung*, ist durch den Grenzwert des Differenzenquotienten in Gl. (2.111) für $t_1 \to t_0$ definiert, d. h. durch den Differenzialquotienten

$$\boldsymbol{P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}} \tag{2.112}$$

Die Leistung ist die Ableitung der Arbeit nach der Zeit.

Setzt man in die Definitionsgleichung (2.112) für die Arbeit W nach Gl. (2.68) den Ausdruck

$$W = \int F_\mathrm{t}\,\mathrm{d}s$$

ein und substituiert die Zeit t als neue Integrationsvariable, so folgt

$$P = \frac{d}{\mathrm{d}t}\int F_\mathrm{t}\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int F_\mathrm{t}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = F_\mathrm{t}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{2.113}$$

da sich die Integration und Differenziation als Umkehroperationen aufheben. Mit ds/dt = v als Bahngeschwindigkeit des Angriffspunktes der Kraft erhält man

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}_\mathrm{t}\, \boldsymbol{v} \tag{2.114}$$

Die Leistung einer Kraft $\vec{F}$ ist das Produkt aus der Bahnkomponente F_t der Kraft und der Bahngeschwindigkeit v ihres Angriffspunktes.

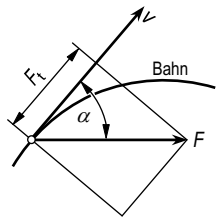


Bild 2.46: Kraft- und Geschwindigkeitsvektor in einem Bahnpunkt

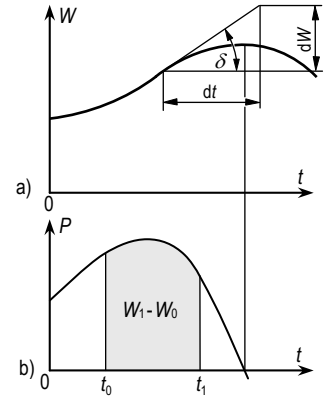


Bild 2.47: a) Arbeit-Zeit- und b) Leistung-Zeit-Diagramm

Wie das **Bild 2.46** veranschaulicht, lässt sich die Leistung als skalares Produkt darstellen

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cos\alpha \cdot v = F_\mathrm{t}\, v \tag{2.115}$$

Die Leistung kann z. B. in der Einheit Nm/s angegeben werden. Mit Gl. (2.106) gilt

$$1\ \mathrm{Nm/s} = 1\ \mathrm{J/s} = 1\ \mathrm{W} \tag{2.116}$$

In der Technik sind außerdem die Leistungseinheiten Kilowatt (kW) und Megawatt (MW) gebräuchlich. Es ist

$$1\ \mathrm{kW} = 1000\mathrm{W} = 1000\ \mathrm{Nm/s} = 1000\ \mathrm{J/s} \qquad 1\ \mathrm{MW} = 10^3\ \mathrm{kW} = 10^6\ \mathrm{W} \tag{2.117}$$

Trägt man die Arbeit W als Ordinate über der Zeit t als Abszisse auf (**Bild 2.47a**), so ist nach Gl. (2.112) die Steigung dieser Kurve ein Maß für die Leistung. Aus Gl. (2.112) folgt

$$W = \int P\, \mathrm{d}t \tag{2.118}$$

Legt man die Integrationskonstante dieses Integrals durch $W(t_0) = W_0$ fest und integriert über die Leistung zwischen den Grenzen t_0 und t_1 so erhält man mit $W(t_1) = W_1$

$$W_1 - W_0 = \int_{t_0}^{t_1} P\, \mathrm{d}t \tag{2.119}$$

Das Zeitintegral der Leistung zwischen den Zeiten t_0 und t_1 ist gleich der in diesem Zeitintervall verrichteten Arbeit.

Wird die Leistung als Funktion der Zeit grafisch dargestellt (**Bild 2.47b**), so kann das bestimmte Integral in Gl. (2.119) als Fläche unter der Leistung-Zeit-Kurve gedeutet werden.

Die verbrauchte Arbeit wird häufig mit einem Leistungsschreiber gemessen. Der „Arbeitsverbrauch" wird dann im Allgemeinen in der Einheit Kilowattstunde (kWh) angegeben. Es gilt die Umrechnung :

$$1\ \text{kWh} = (1000\ \text{Nm/s}) \cdot 3600\ \text{s} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{Nm} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{J}$$

Wirkungsgrad Bei allen Maschinen treten in Lagern und Führungen durch Reibung Energieverluste auf. Es ist daher unmöglich, die an einer Maschine aufgewandte Arbeit voll dem gedachten Zweck zuzuführen. Wird z. B. eine Last mit einem Flaschenzug gehoben, so muss zur Überwindung der Lagerreibung zusätzliche Arbeit aufgewendet werden. Alle Arbeiten, die nicht unmittelbar dem gedachten Zweck zugute kommen, sind *Verlustarbeiten* W_v, sie werden meist in Wärme überführt. Die *Nutzarbeit* W_n ist dann die Differenz aus der *aufgewandten* (zugeführten) *Arbeit* W_z und der Verlustarbeit W_v

$$W_\text{n} = W_\text{z} - W_\text{v}$$

Eine Maschine ist mechanisch um so besser, je größer die Nutzarbeit W_n im Verhältnis zur aufgewandten Arbeit W_z ist. Dieses Verhältnis wird als *Wirkungsgrad* η bezeichnet

$$\boldsymbol{\eta = \frac{W_\text{n}}{W_\text{z}} = \frac{W_\text{z} - W_\text{v}}{W_\text{z}} = 1 - \frac{W_\text{v}}{W_\text{z}}} \tag{2.120}$$

Da $W_\text{v} \geq 0$ und $W_\text{z} > 0$, ist η in der Regel kleiner als Eins. Der Wirkungsgrad spielt bei der Beurteilung von Maschinen und Prozessen eine große Rolle. Allgemein versteht man unter Wirkungsgrad das Verhältnis

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}}$$

Der Wirkungsgrad einer Maschine ist im Allgemeinen nicht konstant und z. B. von der Belastung abhängig. Den *augenblicklichen Wirkungsgrad* kann man durch die Leistung ausdrücken. Beziehen sich die Arbeiten ΔW_z, ΔW_n und ΔW_v auf den Zeitabschnitt Δt, so lässt sich für den Wirkungsgrad in diesem Zeitabschnitt entsprechend Gl. (2.120) nach Erweiterung mit Δt schreiben

$$\eta = \frac{\Delta W_\text{n} / \Delta t}{\Delta W_\text{z} / \Delta t} = \frac{\Delta W_\text{z} / \Delta t - \Delta W_\text{v} / \Delta t}{\Delta W_\text{z} / \Delta t} = 1 - \frac{\Delta W_\text{v} / \Delta t}{\Delta W_\text{z} / \Delta t} \tag{2.121}$$

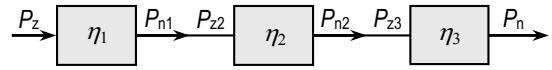
Den *augenblicklichen Wirkungsgrad* erhält man durch die Grenzwertbildung $\Delta t \to 0$. Die Grenzwerte der Differenzenquotienten in Gl. (2.121) sind die Leistungen: $\mathrm{d}W_\text{z}/\mathrm{d}t = P_\text{z}$ = zugeführte Leistung, $\mathrm{d}W_\text{n}/\mathrm{d}t = P_\text{n}$ = Nutzleistung und $\mathrm{d}W_\text{v}/\mathrm{d}t = P_\text{v}$ = Verlustleistung. Damit folgt für den augenblicklichen Wirkungsgrad

$$\boldsymbol{\eta = \frac{P_n}{P_z} = \frac{P_z - P_v}{P_z} = 1 - \frac{P_v}{P_z}} \tag{2.122}$$

Eine Maschinenanlage besteht häufig aus mehreren hintereinandergeschalteten Aggregaten. Das Blockschaltbild **Bild 2.48** gibt symbolisch den Leistungsfluss an. Die zugeführte Leistung ist P_z und P_n die Nutzleistung (abgeführte Leistung) der ganzen Anlage. Im ersten Block wird P_z aufgewandt und die Leistung P_{n1} abgegeben, diese wird als P_{z2} dem zweiten Block zugeführt usw. Nach Gl. (2.122) gilt für die einzelnen Blöcke

$$P_{n1} = \eta_1 P_z \qquad P_{n2} = \eta_2 P_{z2} = \eta_2 P_{n1} \qquad P_n = \eta_3 P_{z3} = \eta_3 P_{n2}$$

Bild 2.48: Blockschaltbild und Leistungsfluss einer Maschinenanlage



Dabei sind η_1, η_2 und η_3 die Teilwirkungsgrade der drei Aggregate. Verknüpft man die Gleichungen miteinander, dann gilt

$$P_n = \eta_3 P_{n2} = \eta_3 (\eta_2 P_{n1}) = \eta_3 \eta_2 (\eta_1 P_z)$$

$$P_n = \eta_1 \eta_2 \eta_3 P_z = \eta_{ges} P_z \tag{2.123}$$

Der *Gesamtwirkungsgrad* mehrerer hintereinandergeschalteter Aggregate ist das Produkt der Teilwirkungsgrade.

$$\boldsymbol{\eta_{ges} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 = \frac{P_n}{P_z}} \tag{2.124}$$

Beispiel 2.28: Wie groß ist die mittlere Antriebsleistung $\overline{P}$ des Lkw (m = 3000 kg) in Beispiel 2.24, S. 103, wenn er den Höhenunterschied h = 100 m in t_1 = 65 s überwindet (s. auch Beispiel 2.16, S. 90)?
In Beispiel 2.24 wurde die dem bewegten Fahrzeug zugeführte Arbeit mit $W_z = 2{,}94 \cdot 10^6$ Nm berechnet. Dann ist nach Gl. (2.111) die mittlere Antriebsleistung

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W_z}{t_1} = \frac{2{,}94 \cdot 10^6 \text{ Nm}}{65 \text{ s}} = 45{,}2 \cdot 10^3 \text{ Nm/s} = 45{,}2 \text{ kW}$$

Beispiel 2.29: Ein Kraftwagen, Gesamtmasse m = 1300 kg, überwindet eine Steigung von 8 % mit der Geschwindigkeit v = 60 km/h. Wie groß ist seine Motorleistung P_M, wenn die Fahrwiderstandszahl μ_r = 0,02 und der Wirkungsgrad zwischen Motor und Antriebsrädern η = 0,85 betragen? Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

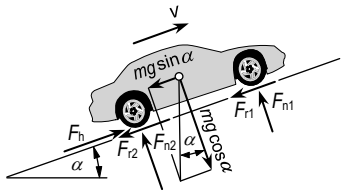


Bild 2.49: Fahrzeug am Hang

Nach **Bild 2.49** verlangt das Gleichgewicht der Kräfte in Fahrtrichtung mit

$$F_r = F_{r1} + F_{r2} = \mu_r (F_{n1} + F_{n2}) = \mu_r\, m\, g \cos\alpha$$

$$F_h = m\, g \sin\alpha + F_r = m\, g \sin\alpha + m\, g\, \mu_r \cos\alpha = m\, g \cos\alpha\, (\tan\alpha + \mu_r)$$

Bei der geringen Steigung ist $\cos\alpha \approx 1$, und mit den vorstehenden Zahlenwerten erhält man

$$F_h = 1300\ \text{kg} \cdot (9{,}81\ \text{m/s}^2) \cdot (0{,}08 + 0{,}02) = 1275\ \text{N}$$

Die Leistung der Antriebskraft F_h ist

$$P = F_h\, v = 1275\ \text{N} \cdot (60/3{,}6)\ \text{m/s}$$

$$= 21{,}25 \cdot 10^3\ \text{Nm/s} = 21{,}25\ \text{kW}$$

Mit dem Wirkungsgrad $\eta = 0{,}85$ ist die Motorleistung

$$P_M = \frac{P}{\eta} = \frac{21{,}25\ \text{kW}}{0{,}85} = 25{,}0\ \text{kW}$$

Beispiel 2.30: Wie stark kann ein Pkw mit der Masse $m = 1400$ kg bei der Geschwindigkeit $v = 54$ km/h auf ebener Straße beschleunigen, wenn die maximale Motorleistung bei dieser Geschwindigkeit mit $P = 40$ kW angegeben ist? Die Fahrwiderstandszahl betrage $\mu_r = 0{,}025$ und der Wirkungsgrad zwischen Motor und Straße $\eta = 0{,}83$. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

Unter Berücksichtigung des Wirkungsgrades ist die maximale Antriebskraft

$$F_h = \frac{P\eta}{v} = \frac{(40\,000\ \text{Nm/s}) \cdot 0{,}83}{(54/3{,}6)\ \text{m/s}} = 2213\ \text{N}$$

Nach dem *d'Alembert*schen Prinzip halten die Trägheitskraft $m(-\vec{a}\,)$ und der Fahrwiderstand $\vec{F}_r$ der Antriebskraft $\vec{F}_h$ das Gleichgewicht (**Bild 2.8**)

$$m\, a = F_h - F_r = F_h - \mu\, m\, g = (2213 - 0{,}025 \cdot 1400 \cdot 9{,}81)\ \text{N} = 1870\ \text{N}$$

Das Beschleunigungsvermögen beträgt also

$$a = \frac{F_h - F_r}{m} = \frac{1870\ \text{N}}{1400\ \text{kg}} = 1{,}34\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Beispiel 2.31: Ein Fahrstuhl, Fahrkorbmasse $m_1 = 636$ kg, Nutzlast $m_Q = 600$ kg, Gegengewicht $m_2 = 500$ kg (**Bild 2.50a**), fährt mit der konstanten Beschleunigung $a_1 = 0{,}8$ m/s² aufwärts in t_1 Sekunden an, bis er die Geschwindigkeit $v_2 = 2$ m/s erreicht. Mit dieser fährt er weiter und wird nach 12 Sekunden auf dem letzten Teil seines Weges von 60,5 m mit der konstanten Bremsverzögerung $a_3 = -1$ m/s² abgebremst. Die Summe aus Reibungskraft in den Führungsschienen und den sonstigen Fahrwiderständen beträgt 250 N.

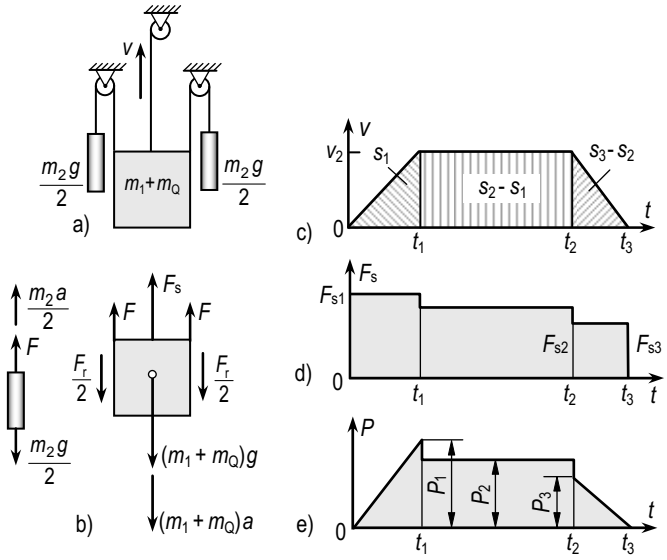


Bild 2.50: a) Fahrstuhl b) Fahrkorb und Gegengewicht freigemacht
c) Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm d) Seilkraft-Zeit-Diagramm e) Leistung-Zeit-Diagramm

a) Man skizziere das v, t -Diagramm und berechne die Fahrzeiten und die Teilwege, b) man bestimme den Kraft-Zeit- und den Leistung-Zeit-Verlauf der Seilkraft F_s. c) Wie groß ist die maximale Motorleistung in kW, wenn der Wirkungsgrad des Getriebes $\eta_1 = 0{,}96$ und der der Seiltrommel $\eta_2 = 0{,}95$ beträgt?

a) Das v, t -Diagramm entspricht dem im Beispiel 1.7, S. 15 (**Bild 2.50c**). Aus diesem entnimmt man mit den gegebenen Werten die Anfahrzeit t_1 und den Anfahrweg s_1

$$t_1 = \frac{v_2}{a_1} = \frac{2\ \text{m/s}}{0{,}8\ \text{m/s}^2} = 2{,}5\ \text{s} \qquad s_1 = \frac{v_2\ t_1}{2} = \frac{(2\ \text{m/s}) \cdot 2{,}5\ \text{s}}{2} = 2{,}5\ \text{m}$$

die Bremszeit $(t_3 - t_2)$ und den Bremsweg $(s_3 - s_2)$

$$t_3 - t_2 = \frac{v_2}{-a_3} = \frac{2\ \text{m/s}}{1\ \text{m/s}^2} = 2\ \text{s} \qquad s_3 - s_2 = \frac{v_2\ (t_3 - t_2)}{2} = \frac{(2\ \text{m/s}) \cdot 2\ \text{s}}{2} = 2\ \text{m}$$

den Weg und die Zeit der gleichförmigen Bewegung

$$s_2 - s_1 = (60{,}5 - 2{,}5 - 2{,}0)\ \text{m} = 56{,}0\ \text{m} \qquad t_2 - t_1 = \frac{s_2 - s_1}{v_2} = \frac{56{,}0\ \text{m}}{2\ \text{m/s}} = 28\ \text{s}$$

b) In **Bild 2.50b** sind Fahrkorb und Gegengewicht freigemacht und die an ihnen angreifenden Kräfte für den Anfahrzustand eingetragen, die Trägheitskräfte sind der Beschleunigung entgegengerichtet. Aus dem Gleichgewicht der Kräfte erhält man die Seilkraft

$$F_s = (m_1 + m_Q)\,(g + a) + F_r - 2\,F$$

mit $\quad F = \dfrac{m_2}{2}(g - a)$

wird $\quad F_s = (m_1 + m_Q - m_2)\,g + F_r + (m_1 + m_Q + m_2)\,a$

Im ersten Bewegungsabschnitt ist $a = a_1 = 0{,}8$ m/s², im zweiten $a = a_2 = 0$ und im dritten $a = a_3 = -1$ m/s². Damit gewinnt man die Seilkräfte in den drei Bewegungsabschnitten

$$F_{s1} = (636 + 600 - 500)\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 + 250\ \text{N} + (636 + 600 + 500)\ \text{kg} \cdot 0{,}8\ \text{m/s}^2$$
$$F_{s1} = 7470\ \text{N} + 1389\ \text{N} = 8859\ \text{N}$$
$$F_{s2} = 7470\ \text{N} + 0 = 7470\ \text{N}$$
$$F_{s3} = 7470\ \text{N} - 1736\ \text{N} = 5734\ \text{N}$$

Der zeitliche Verlauf der Seilkraft ist in **Bild 2.50d** dargestellt. Da sich die Geschwindigkeit beim Anfahren linear ändert, steigt auch die Leistung der konstanten Seilkraft linear an (**Bild 2.50e**) und erreicht zur Zeit t_1 ihren Größtwert

$$P_1 = F_{s1}\, v_2 = 8859\ \text{N} \cdot 2\ \text{m/s} = 17{,}7\ \text{kW}$$

Im zweiten Bewegungsabschnitt bleibt die Leistung konstant

$$P_2 = F_{s2}\, v_2 = 7470\ \text{N} \cdot 2\ \text{m/s} = 14{,}9\ \text{kW}$$

schließlich fällt sie im dritten Bewegungsabschnitt linear von dem Anfangswert

$$P_3 = F_{s3}\, v_2 = 5734\text{N} \cdot 2\text{m/s} = 11{,}5\ \text{kW}$$

auf Null ab (**Bild 2.50e**).

c) Die größte Antriebsleistung beträgt mit dem Gesamtwirkungsgrad

$$\eta_{ges} = \eta_1\, \eta_2 = 0{,}96 \cdot 0{,}95 = 0{,}912 \qquad P_{max} = \frac{P_1}{\eta_{ges}} = \frac{17{,}7\ \text{kW}}{0{,}912} = 19{,}4\ \text{kW}$$

Beispiel 2.32: a) Wie groß ist die indizierte Leistung P_1 des Otto-Motors in Beispiel 2.14, S. 87? b) Welche Leistung P_e wird an seiner Kurbelwelle abgegeben, wenn das Indikatordiagramm bei der Drehzahl $n = 5000\ \text{min}^{-1}$ aufgenommen wurde und der mechanische Wirkungsgrad $\eta_m = 0{,}85$ beträgt? Der Motor hat 4 Zylinder und arbeitet nach dem 4-Takt-Verfahren. c) Wie groß sind die in einer Stunde indizierte Arbeit W_i und d) der stündliche Kraftstoffverbrauch B, wenn der thermische Wirkungsgrad $\eta_{th} = 0{,}34$ ist und Benzin mit dem Heizwert $H = 33 \cdot 10^6$ J/l verwendet wird?

a) Unter der indizierten Leistung versteht man die von dem Motor erzeugte Leistung. Die abgegebene Leistung ist um die mechanischen Verluste (Reibung) geringer.

In Beispiel 2.14, S. 87, wurde die von einem Zylinder während eines Arbeitstaktes (2 Umdrehungen) verrichtete Arbeit zu $W = 241{,}3$ Nm bestimmt. Bei $z = 4$ Zylindern ist

$$W_4 = z\, W = 4 \cdot 241{,}3\ \text{Nm} = 965{,}2\ \text{Nm}$$

Die Zeit T für eine Umdrehung beträgt nach Gl. (1.109)

$$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{5000\ \text{min}^{-1}} = \frac{60\ \text{s}}{5000} = 0{,}012\ \text{s}$$

Bei der 4-Takt-Maschine wird die Arbeit W_4 während zweier Umdrehungen verrichtet, damit ist die (mittlere) indizierte Leistung

$$P_i = \frac{W_4}{2\,T} = \frac{965{,}2\ \text{Nm}}{2 \cdot 0{,}012\ \text{s}} = 40{,}2 \cdot 10^3\ \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 40{,}2\ \text{kW}$$

b) An der Kurbelwelle wird die effektive Leistung

$$P_e = \eta_m\, P_i = 0{,}85 \cdot 40{,}2\ \text{kW} = 34{,}2\ \text{kW}$$

abgegeben.

c) In einer Stunde wird die indizierte Arbeit W_i

$$W_i = 40{,}2 \cdot 10^3 \ \frac{\text{Nm}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = 144{,}7 \cdot 10^6 \text{ Nm} = 144{,}7 \cdot 10^6 \text{ J}$$

verrichtet.

d) Mit dem thermischen Wirkungsgrad $\eta_{th} = 0{,}34$ ist der stündliche Kraftstoffverbrauch

$$B = \frac{W_i}{\eta_{th} H} = \frac{144{,}7 \cdot 10^6 \text{ J}}{0{,}34 \cdot 33 \cdot 10^6 \text{ J/l}} = 12{,}9 \text{ l}$$

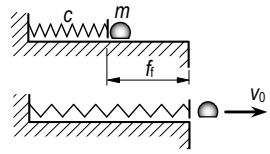
2.2.5 Aufgaben zu Abschnitt 2.2

1. Der Schlitten der Kreuzschubkurbel in **Bild 1.38** wird sinusförmig hin- und herbewegt (r = 10 cm). Welche Arbeit ist für eine Umdrehung der Kurbel aufzuwenden, wenn in den Führungen D die konstante Reibkraft F_r = 3 N auftritt?

2. Ein Güterwagen $m = 2 \cdot 10^4$ kg wird von einem 50 m langen Ablaufberg (Gefälle 4 %) mit der Geschwindigkeit v_0 = 0,5 m/s abgestoßen. a) Mit welcher Geschwindigkeit v_1 verlässt der Wagen den Ablaufberg, wenn die Fahrwiderstandszahl μ_r = 0,005 beträgt? b) Wie weit (s_2) rollt der Wagen auf der ebenen Strecke? Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

3. Der Kugel (m = 50 g) in Beispiel 1.14, S. 31, soll die Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 2,97 m/s durch eine vorgespannte Feder erteilt werden (**Bild 2.51**). Die Federkonstante beträgt c = 1 N/cm.

Bild 2.51: Feder



a) Um welchen Betrag f_f muss die Feder zuvor gespannt werden?

b) In welcher Zeit t_0 wird die Geschwindigkeit v_0 erreicht? Reibung wird vernachlässigt.

4. Bei Glatteis versucht, ein allradgetriebenes Fahrzeug den Höhenunterschied h = 1 m zu überwinden. Der Fahrer gibt so viel Gas, dass die Räder auf der glatten Straße durchrutschen (μ = 0,05) (**Bild 2.52**). a) Wie groß muss die Geschwindigkeit v_0 am Fuß der schiefen Ebene sein, damit das Fahrzeug noch mit v_1 = 1 m/s auf der Höhe ankommt? b) Nach welcher Zeit t_1 erreicht das Fahrzeug diese Höhe?

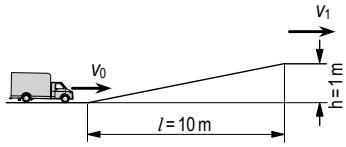


Bild 2.52: Fahrzeug bei glatter Straße am Hang

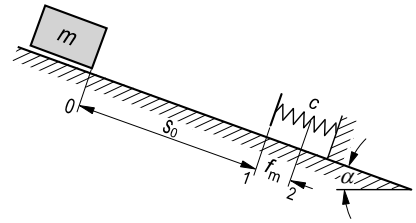


Bild 2.53: Kiste in Abfangvorrichtung

5. In einer Transportanlage soll eine auf einer Schrägen von $\alpha = 20^{\circ}$ herabgleitende Kiste ($m = 100$ kg) so durch eine Feder abgefangen werden, dass die maximale Verzögerung den Wert $a_{max} = -4\,g$ nicht überschreitet ($\mu = 0{,}2$, $s_0 = 2$ m, **Bild 2.53**).
Man bestimme a) die maximale Federkraft F_m, b) den maximalen Federweg f_m, c) die erforderliche Federkonstante c und d) die Geschwindigkeit v_1, mit der die Kiste an der Feder ankommt. Hinweis: Es ist $c\,f_m^2/2 = F_m f_m/2$.

6. Am Ende eines Stabes ($l = 0{,}5$ m) mit vernachlässigbar kleiner Masse sitzt eine Stahlkugel mit der Masse $m = 1$ kg und wird aus der Lage $\varphi_0 = 120^{\circ}$ gegenüber der Vertikale losgelassen (**Bild 2.54**). In der Vertikale wird sie von einer Feder ($c = 300$ N/cm) abgefangen.
Man bestimme a) die Geschwindigkeit v_1 der Kugel beim Auftreffen auf die Feder, b) den größten Federweg f_m, c) die maximale Federkraft F_m und d) die größte Zugkraft F_n im Stab.

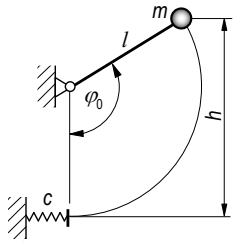


Bild 2.54: System zu Aufgabe 6

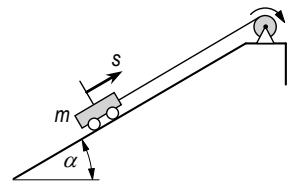


Bild 2.55: Heben eines Wagens durch Motorwinde

7. Ein Wagen ($m = 2000$ kg) wird aus der Ruhelage gleichförmig beschleunigt durch eine Motorwinde eine Schräge ($\alpha = 30^{\circ}$, $\mu = 0{,}08$) hinaufgezogen und erreicht in $t_1 = 5$ s die Geschwindigkeit $v_1 = 5$ m/s, die er dann beibehält (**Bild 2.55**). Gesucht sind a) die Beschleunigung a_1, der Weg s_1 und die Leistung P_1 der Seilkraft F_{s1} nach $t_1 = 5$ s, b) das Geschwindigkeit-Zeit-, Seilkraft-Zeit- und Leistung-Zeit-Diagramm für die ersten 10 s, c) die maximale Motorleistung P_{1M}, wenn der Wirkungsgrad der Motorwinde $\eta = 0{,}8$ beträgt.

8. Wie groß ist die maximale Leistung P am Umfang der Treibräder der Lokomotive in Aufgabe 2, S. 81?

9. Welcher mittlere Leistungsverlust $\overline{P_v}$ tritt durch die Reibung in den Führungen der Kreuzschubkurbel der vorstehenden Aufgabe 1 auf, wenn diese mit der Drehzahl $n_A = 1440\ \text{min}^{-1}$ angetrieben wird?

10. Ein Muldenförderband ist $l = 50$ m lang und $b = 0{,}8$ m breit. Die durchschnittliche Schütthöhe des Fördergutes bezogen auf die Breite b beträgt $c = 6$ cm, die mittlere Schüttdichte $\rho = 1{,}4$ kg/dm³ und die Bandgeschwindigkeit $v = 1{,}2$ m/s. a) Wie groß ist die stündliche Fördermenge $\dot{m}_Q$ in kg/h? b) Welche maximale Zugkraft F_s tritt in dem Förderband auf, wenn dieses bei einer Steigung von 10 % fördert und die am Band auftretenden Reibungskräfte mit 5 % des auf dem Band vorhandenen Gewichtes berücksichtigt werden? (Die Vorspannung bleibe unberücksichtigt.) c) Welche Antriebsleistung P ist erforderlich, wenn der Wirkungsgrad der Antriebstrommel $\eta_A = 0{,}92$, der des Getriebes $\eta_G = 0{,}89$ ist?

11. Ein Wagen (Masse m) rollt reibungsfrei aus der Ruhelage A eine schiefe Ebene herab, die tangential in eine Kreisbahn mit dem Radius r einläuft (Todesschleife im Zirkus (**Bild 2.56**)). a) Von welcher Höhe h_{min} oberhalb vom Punkt D muss die Bewegung mindestens beginnen, damit sich der Wagen nicht in D von der Kreisbahn löst? (Man bestimme h_{min} als Vielfaches von r.) b) Wie groß ist die Normalkraft F_n an den Stellen B, C und D, wenn $h = r$ gewählt wird? (Man gebe F_n als Vielfaches von $m\,g$ an.)

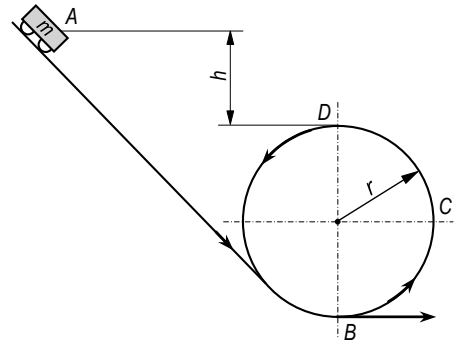


Bild 2.56:
Wagen in Todesschleife

2.3 Bewegung eines Körpers in einem ihn umgebenden Medium

2.3.1 Widerstandsgesetze

Bewegt sich ein Körper in einem Medium, so behindert dieses seine Bewegung. Man denke an die Bewegung von Fahrzeugen in Luft oder Wasser, an den Fall einer Kugel in zäher Flüssigkeit u. a. m. Das Medium übt auf den Körper eine Kraft aus, die der Bewegung entgegenwirkt. Wie die Erfahrung zeigt, ist diese Widerstandskraft außer von der geometrischen Form des Körpers und der Art des Mediums vor allem von der Geschwindigkeit v abhängig, mit der sich der Körper relativ zum Medium bewegt.

Bei Strömungsgeschwindigkeiten, wie sie etwa an Straßenfahrzeugen auftreten, kann man die *Widerstandskraft* F_W dem Quadrat der Geschwindigkeit v proportional annehmen, und wie in der Strömungslehre gezeigt wird, ist

$$F_W = c_W \frac{\rho v^2}{2} A \tag{2.125}$$

In dieser Gleichung sind $(\rho/2)v^2 = q$ der *Staudruck*, ρ die *Dichte* (bei mittlerer Außentemperatur und Atmosphärendruck ist für Luft $\rho_L \approx 1{,}25$ kg/m^3 [1)]) und A die *Spantfläche*, das ist die „Schattenfläche" des Körpers in Strömungsrichtung. Der *Widerstandsbeiwert* c_W ist eine einheitenlose Größe, die von der Körperform und im Allgemeinen auch noch von der Geschwindigkeit abhängt. Den Widerstandsbeiwert kann man mit Hilfe von Gl. (2.125) bestimmen, indem man die Kraft F_W misst, die bei bekannter Strömungsgeschwindigkeit v sowie gegebener Dichte ρ und Spantfläche A auf den Körper einwirkt. Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen, nehmen wir im Folgenden c_W als konstant an. Diese Annahme ist für Gase im Bereich bis zu 70 % der Schallgeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit für Luft ≈ 330 m/s) ausreichend genau. Nachfolgend sind einige c_W-Werte zusammengestellt:

---

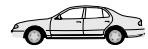
1) Internationale Normalatmosphäre $\rho_L = 1{,}225$ kg/m^3.

Widerstandsbeiwerte

1. Offene Halbkugel $\xrightarrow{v}$ $c_W = 0{,}34$

2. Offene Halbkugel $\xrightarrow{v}$ $c_W = 1{,}33$

3. Stromlinienkörper $\xrightarrow{v}$ $c_W \approx 0{,}1$

4. Kraftfahrzeuge $\xrightarrow{v}$  $c_W = 0{,}3$ bis $0{,}9$

Nach Gl. (2.114) ist die Leistung das Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit. Zur Überwindung der Widerstandskraft F_W ist also die Leistung

$$P = F_w v = c_W \frac{\rho\, v^3}{2} A \tag{2.126}$$

erforderlich. Sie steigt mit der 3. Potenz der Geschwindigkeit v.

Leitet man Gl. (2.126) nach der Geschwindigkeit ab und berücksichtigt darin nochmals Gl. (2.126), so gewinnt man

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v} = 3\, c_W \frac{\rho\, v^2}{2} A = \frac{3\, P}{v} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}P}{P} = 3\, \frac{\mathrm{d}v}{v} \tag{2.127}$$

Diese Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen der relativen Änderung der Leistung P und der Geschwindigkeit v an. Eine Geschwindigkeitssteigerung von z. B. 10 % setzt demnach eine Erhöhung der Leistung um ≈ 30 % voraus.

Bei einer sog. schleichenden Strömung, wie sie etwa beim Fall einer kleinen Kugel in zäher Flüssigkeit auftritt, ist die Widerstandskraft F_W der 1. Potenz der Geschwindigkeit v proportional,

$$F_W = k\, v \tag{2.128}$$

Die Proportionalitätskonstante k kann aus dieser Gleichung durch Messen der Widerstandskraft bei bekannter Geschwindigkeit bestimmt werden.

Beispiel 2.33: Ein Kraftfahrzeug fährt auf ebener Straße mit der Geschwindigkeit v = 100 km/h, der Widerstandsbeiwert beträgt c_W = 0,35, die Spantfläche A = 1,6 m² und die Dichte der Luft ρ_L = 1,25 kg/m³. a) Wie groß ist die Luftwiderstandskraft F_W, und welche Leistung P ist erforderlich, sie zu überwinden? b) Um wie viel erhöhen sich Widerstand und Leistung, wenn die Geschwindigkeit auf 120 bzw. 150 km/h gesteigert wird?

a) Nach Gl. (2.125) ist der Luftwiderstand

$$F_W = c_W \frac{\rho\, v^2}{2} A = 0{,}35 \cdot \frac{1{,}25\ \mathrm{kg/m^3}}{2} (100/3{,}6\ \mathrm{m/s})^2 \cdot 1{,}6\ \mathrm{m^2} = 270\ \mathrm{N}$$

und nach Gl. (2.126) die Leistung

$$P = F_W v = 270\ \mathrm{N} \cdot (100/3{,}6)\ \mathrm{m/s} = 7500\ \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 7{,}5\ \mathrm{kW}$$

b) Wird die Geschwindigkeit um den Faktor 1,2 bzw. 1,5 von 100 auf 120 bzw. 150 km/h gesteigert, so erhöht sich der Widerstand quadratisch

$$F_W = 1{,}2^2 \cdot 270\ \text{N} = 389\ \text{N} \qquad \text{bzw.} \qquad F_W = 1{,}5^2 \cdot 270\ \text{N} = 608\ \text{N}$$

Die Leistung wächst mit der 3. Potenz der Geschwindigkeit auf

$$P = 1{,}2^3 \cdot 7{,}5\ \text{kW} = 13{,}0\ \text{kW} \qquad \text{bzw.} \qquad P = 1{,}5^3 \cdot 7{,}5\ \text{kW} = 25{,}3\ \text{kW}$$

Beispiel 2.34: Der Motor eines Kraftwagens hat die Höchstleistung P = 50 kW, der Wirkungsgrad zwischen Motor und Straße beträgt η = 0,8, die Fahrwiderstandszahl μ_r = 0,023, der Widerstandsbeiwert c_W = 0,38, die Masse des Wagens m = 1400 kg, die Spantfläche A = 1,6 m^2, die Dichte der Luft ρ = 1,25 kg/m^3.
Welche Spitzengeschwindigkeit v erreicht das Fahrzeug bei höchster Motorleistung a) auf einer Steigung von 5 % bei v_W = 10 m/s Gegenwind, b) auf einer Steigung von 5 % in ruhender Luft, c) auf ebener Straße bei v_W = 10 m/s Gegenwind, d) auf ebener Straße in ruhender Luft?

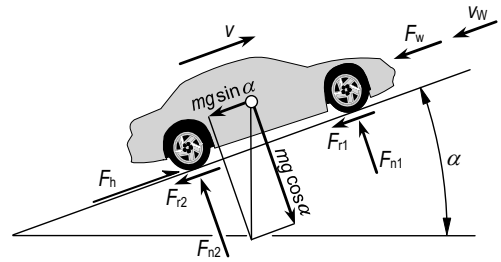


Bild 2.57: Fahrzeug bei Bergfahrt mit Luftwiderstand

a) Nach **Bild 2.57** sind die Reibungskraft $F_r = F_{r1} + F_{r2} = m\ g\ \mu_r \cos\alpha$, die Gewichtskraftkomponente $m\ g \sin\alpha$ und der Luftwiderstand F_W der Bewegung entgegengerichtet. Die Geschwindigkeit des Fahrzeugs gegenüber der Luft ist $(v + v_W)$. Den Widerstandskräften hält die Antriebskraft F_h das Gleichgewicht. Diese findet man aus der Gleichung $F_h\ v = P\eta$. (Die Leistung der Antriebskraft F_h ist kleiner als die Motorleistung P, daher ist P mit η zu multiplizieren.) Wegen der gleichförmigen Bewegung ist die Trägheitskraft Null, und aus dem Gleichgewicht der Kräfte in Bewegungsrichtung folgt

$$F_h = \frac{P\eta}{v} = m\ g\ \mu_r \cos\alpha + m\ g \sin\alpha + c_W \frac{\rho\,(v + v_W)^2}{2} A$$

$$P\eta = m\ g \cos\alpha\ (\mu_r + \tan\alpha)\ v + c_W \frac{\rho}{2} A\ (v^3 + 2\ v_W v^2 + v_W^2 v) \tag{2.129}$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten und $\cos\alpha \approx 1$ erhält man die Zahlenwertgleichung

$$50\,000 \cdot 0{,}8 = 1400 \cdot 9{,}81\ (0{,}023 + 0{,}05)\ v + 0{,}38\ \frac{1{,}25}{2}\ 1{,}6\ (v^3 + 20\ v^2 + 100\ v)$$

mit v in m/s.

Ordnet man nach Potenzen von v, so kann die Gleichung 3. Grades

$$v^3 + 20\ v^2 + 2738\ v - 105\,263 = f(v) = 0$$

direkt mit einem Rechenprogramm oder mit Hilfe des *Newton*schen Iterationsverfahrens gelöst werden (s. *Brauch*, *W.*; *Dreyer*, *H.-J.*; *Haacke*, *W.*: Mathematik für Ingenieure. 11. Aufl., Wiesbaden 2006).

Mit einer geschätzten Näherung v_1 = 90 km/h = 25 m/s erhält man

$$f(v_1) = -\,8\,688 \qquad \text{und} \qquad f'(v_1) = 5613$$

sowie

$$v = v_2 = v_1 - f(v_1) / f'(v_1) = \left(25 + \frac{8688}{5613}\right) \text{m/s} = 26{,}5 \text{ m/s} = 95{,}5 \text{ km/h}$$

Eine Wiederholung der Rechnung mit dem neuen Wert $v = 26{,}5$ m/s bringt keine Änderung innerhalb der angegebenen Dezimalstellen. Die beiden anderen Lösungen der Gleichung 3. Grades sind konjugiert komplex und hier ohne Bedeutung.

b) In ruhender Luft ist in Gl. (2.129) $v_W = 0$ zu setzen. Dann erhält man die Zahlenwertgleichung

$$v^3 + 2638\, v - 105\,263 = f(v) = 0 \qquad \text{mit } v \text{ in m/s}$$

Sie hat die Lösung $v = 29{,}8$ m/s = 107,3 km/h.

c) Auf ebener Straße ist in Gl. (2.129) $\alpha = 0$

$$v^3 + 20\, v^2 + 931\, v - 105\,263 = f(v) = 0 \qquad \text{mit } v \text{ in m/s}$$

Die Lösung ist $v = 35{,}9$ m/s = 129,2 km/h.

d) Für ebene Straße und Bewegung in ruhender Luft bekommt man schließlich als Zahlenwertgleichung ($\alpha = 0$ und $v_W = 0$)

$$v^3 + 831\, v - 105\,263 = f(v) = 0 \qquad \text{mit } v \text{ in m/s}$$

Daraus erhält man die Spitzengeschwindigkeit $v = 41{,}4$ m/s = 149,0 km/h.

2.3.2 Fall eines Körpers in einem ihn umgebenden Medium

Auf einen Körper, der in einem Medium senkrecht zur Erde fällt, wirken die Gewichtskraft F_G beschleunigend, die Auftriebskraft F_A und die Widerstandskraft F_W verzögernd. Nach **Bild 2.58** verlangt das Gleichgewicht der Kräfte

$$m\, a = (F_G - F_A) - F_W \tag{2.130}$$

Die Widerstandskraft F_W wächst mit zunehmender Geschwindigkeit und hält schließlich der um die Auftriebskraft F_A verminderten Gewichtskraft F_G das Gleichgewicht. Die Beschleunigung wird dann Null, und der Körper bewegt sich gleichförmig mit der *stationären Sinkgeschwindigkeit* v_s. Diese kann aus Gl. (2.130) berechnet werden, wenn das Widerstandsgesetz bekannt ist.

Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft des von dem Körper verdrängten Mediums. Ist V das Volumen des Körpers und ρ_M die Dichte des Mediums, so ist die Auftriebskraft

$$F_A = g\, \rho_M\, V \tag{2.131}$$

Mit der Dichte ρ_K des Körpers erhält man die um den Auftrieb verminderte Gewichtskraft

$$F_G^* = F_G - F_A = g\, (\rho_K - \rho_M)\, V = \left(1 - \frac{\rho_M}{\rho_K}\right) F_G = \alpha\, F_G \tag{2.132}$$

Im lufterfüllten Raum gilt das quadratische Widerstandsgesetz der Gl. (2.125), und mit Gl. (2.130) gewinnt man die stationäre Sinkgeschwindigkeit v_S aus der Bedingung $F_G^* = F_W$

$$F_W = c_W \frac{\rho\, v_S^2}{2} A = F_G^* \qquad v_S = \sqrt{\frac{F_G^*}{c_W \frac{\rho}{2} A}} \tag{2.133}$$

Die Auftriebskraft ist beim Fall eines Körpers in Luft im Allgemeinen vernachlässigbar klein gegenüber der Gewichtskraft, so dass $F_G^* \approx F_G = m\,g$ gesetzt werden kann.

Für einen Körper, der in einer zähen Flüssigkeit fällt, sowie bei schleichenden Bewegungen in Gasen gilt das lineare Widerstandsgesetz von Gl. (2.128). Aus der Bedingung $F_G^* = F_W$ erhält man hier

$$F_W = k\, v_S = F_G^* \qquad v_S = \frac{F_G^*}{k} \tag{2.134}$$

Stoppt man die Zeit t, in der ein Versuchskörper eine Messstrecke s mit der konstanten Sinkgeschwindigkeit $v_S = s/t$ durchfällt, so kann aus Gl. (2.134) die Konstante k bestimmt werden. Versuche dieser Art dienen zum Vergleich der Zähigkeiten verschiedener Medien.

Beispiel 2.35: Ein Fallschirmspringer m = 90 kg versucht, seine stationäre Sinkgeschwindigkeit vor Öffnen des Fallschirmes möglichst klein zu halten, indem er der Luft eine große „Spantfläche" anbietet. Welche stationäre Sinkgeschwindigkeit v_S erreicht er, wenn A = 0,5 m², c_W = 1,0, ρ = 1,00 kg/m³ (in ≈ 2 km Höhe) und $F_G^* \approx F_G = m\,g$ ist?
Nach Gl. (2.133) wird mit $F_G^* = m\,g$

$$v_S = \sqrt{\frac{m\,g}{c_W \frac{\rho}{2} A}} = \sqrt{\frac{90\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{1{,}0 \cdot \frac{1{,}00\ \text{kg/m}^3}{2} \cdot 0{,}5\ \text{m}^2}} = 59{,}4\ \text{m/s} = 214\,\text{km/h}$$

Mit dem quadratischen Widerstandsgesetz der Gl. (2.125) erhält man aus Gl. (2.130) die Beschleunigung-Geschwindigkeit-Funktion. Teilt man durch

$$F_G^* = (F_G - F_A) = \alpha\, F_G \quad \text{so wird} \qquad \frac{m\,a}{\alpha\, F_G} = 1 - \left(\frac{c_W \frac{\rho}{2} A}{F_G^*} \right) v^2 \tag{2.135}$$

Der Klammerausdruck ist nach Gl. (2.133) gleich $1/v_S^2$ und mit $F_G = m\,g$ folgt

$$\frac{a}{\alpha\, g} = 1 - \left(\frac{v}{v_S} \right)^2 \tag{2.136}$$

Die Funktionskurve dieser Gleichung ist eine Parabel (**Bild 2.58b**). Wird ein Körper aus der Ruhelage ($v_0 = 0$) losgelassen, dann beginnt die Bewegung für $F_G = F_G^*$ ($\alpha = 1$) mit Fallbeschleunigung. Die Beschleunigung wird Null, wenn der Körper die stationäre Sinkgeschwindigkeit $v = v_S$ erreicht hat. Beginnt eine Bewegung mit $v_0 > v_S$, dann ist die Bewegung verzögert ($a/(\alpha\, g) < 0$). Da die Bremsverzögerung quadratisch mit der Geschwindigkeit steigt, treten rasch große Verzögerungen auf; so ist für $v_0 = 2\, v_S$ die Beschleunigung $a_0 = -3\, g\, \alpha$ und für $v_0 = 3\, v_S$ wird $a_0 = -8\, g\, \alpha$.

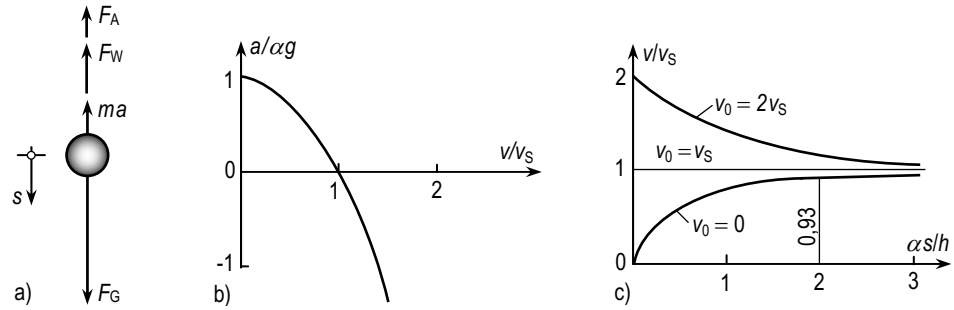


Bild 2.58: a) Fall eines Körpers im umgebenden Medium
b) Beschleunigung-Geschwindigkeit-Diagramm
c) Geschwindigkeit-Ort-Diagramm

Für die Beschleunigung kann man schreiben (s. auch Abschn. 2.2.1, Beschleunigungsarbeit)

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{v_S^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\left(\frac{v}{v_S}\right)^2\right]$$

Mit dieser Umformung erhält man aus Gl. (2.136)

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{v_S^2}{2\,g}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{v}{v_S}\right)^2 = 1-\left(\frac{v}{v_S}\right)^2 \tag{2.137}$$

Der Faktor $v_S^2/2\,g = h$ auf der linken Seite dieser Gleichung bedeutet die Fallhöhe, die der Körper aus der Ruhelage frei durchfallen müsste, um die Geschwindigkeit v_S zu erreichen (s. Gl. (1.24)). Setzt man zur Vereinfachung

$$\left(\frac{v}{v_S}\right)^2 = z$$

so wird aus Gl. (2.137)

$$\frac{h}{\alpha}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 1 - z$$

Diese Differenzialgleichung kann nach der Methode der Trennung der Veränderlichen gelöst werden

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{1-z} = \int\frac{\alpha\,\mathrm{d}s}{h} \qquad -\ln(1-z) = \frac{\alpha s}{h} + C \qquad \ln\left[1-\left(\frac{v}{v_S}\right)^2\right] = -\frac{\alpha s}{h} - C$$

Die Integrationskonstante C bestimmt man aus der Anfangsbedingung. Wählt man diese so, dass am Ort $s = 0$ die Geschwindigkeit $v = v_0$ ist, so wird

$$\ln\left[1-\left(\frac{v_0}{v_S}\right)^2\right]=-C$$

Die Geschwindigkeit-Ort-Funktion genügt also der Gleichung

$$-\frac{\alpha\, s}{h}=\ln\frac{1-\left(\frac{v}{v_S}\right)^2}{1-\left(\frac{v_0}{v_S}\right)^2} \tag{2.138}$$

oder

$$\frac{v}{v_S}=\sqrt{1-\left[1-\left(\frac{v_0}{v_S}\right)^2\right]\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\, s}{h}}} \tag{2.139}$$

In **Bild 2.58c** sind die v, s-Kurven für die Werte $v_0 = 0$, $v_0 = v_S$ und $v_0 = 2\ v_S$ in einheitenloser Form aufgetragen. Beginnt eine Bewegung aus der Ruhelage ($v_0 = 0$), so sind nach dem Fallweg $s = 2\ h/\alpha$ 93 % der stationären Sinkgeschwindigkeit erreicht. Für $v_0 = v_S$ ist die Bewegung vom Beginn an gleichförmig, und für $v_0 > v_S$ ist die Bewegung verzögert.

Beispiel 2.36: Ein Fallschirmspringer m = 90 kg ($F_G^* \approx F_G$, $\alpha \approx 1$) hat seinen Fallschirm bei der Geschwindigkeit v_0 ganz geöffnet. Der Fallschirm (Durchmesser d = 6 m) wird als offene Halbkugel angesehen und hat den Widerstandsbeiwert c_W = 1,33. Die Dichte der Luft sei unabhängig von der Höhe ρ = 1,25 kg/m³ (Fall in Bodennähe). a) Wie groß ist die stationäre Sinkgeschwindigkeit v_S? b) Von welcher Höhe h müsste der Fallschirmspringer mit nicht geöffnetem Fallschirm hinunterspringen, wenn er im freien Fall die Geschwindigkeit v_S erreichen will? c) Nach welcher Fallhöhe würde er die stationäre Sinkgeschwindigkeit zu 93 % erreichen, wenn er aus der Ruhelage mit ganz geöffnetem Fallschirm springen könnte (v_0 = 0)? d) Welche Bremsverzögerung würde er erfahren, wenn er bei der Geschwindigkeit v_0 = 59,4 m/s (vgl. Beispiel 2.35, S. 119) schlagartig seinen Fallschirm öffnen könnte? e) Bei welcher Geschwindigkeit darf der Fallschirm ganz geöffnet sein, wenn die maximale Verzögerung den Wert $a_0 = -8\ g$ nicht überschreiten soll?

a) Nach Gl. (2.133) wird die stationäre Sinkgeschwindigkeit mit $F_G^* = m\,g$

$$v_S=\sqrt{\frac{m\,g}{c_W\,\frac{\rho}{2}A}}=\sqrt{\frac{90\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{1{,}33\cdot\frac{1{,}25\ \mathrm{kg/m^3}}{2}\cdot 28{,}3\ \mathrm{m^2}}}=6{,}13\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b) Die Sprunghöhe h ist

$$h=\frac{v_S^2}{2\,\mathrm{g}}=\frac{(6{,}13\ \mathrm{m/s})^2}{2\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}=1{,}92\ \mathrm{m}$$

c) Aus Gl. (2.138) folgt mit v/v_S = 0,93, α = 1 und v_0 = 0

$$-\frac{s}{h}=\ln\left(1-\frac{v^2}{v_S^2}\right)=\ln 0{,}135=-2{,}00 \qquad s=2\,h=2\cdot 1{,}92\ \mathrm{m}=3{,}84\ \mathrm{m}$$

d) Für $v_0 = 59{,}4$ m/s ist $v_0/v_S = 9{,}69$, und nach Gl. (2.136) wird mit $\alpha = 1$

$$\frac{a_0}{g} = 1 - \left(\frac{v_0}{v_S}\right)^2 = 1 - 9{,}69^2 = -92{,}9$$

Da der Mensch nur etwa die 8fache (kurzzeitig etwa 20fache) Fallbeschleunigung erträgt, ist diese Verzögerung für den Menschen nicht zulässig. Der Fallschirm darf also nur langsam geöffnet werden.

e) Aus Gl. (2.136) erhält man mit $a_0/g = -8$ und $\alpha = 1$

$$\frac{v_0}{v_S} = \sqrt{1 - \frac{a_0}{g}} = \sqrt{9} = 3 \qquad v_0 = 3\, v_S = 3 \cdot 6{,}13 \text{ m/s} = 18{,}39 \text{ m/s}$$

2.3.3 Aufgaben zu Abschnitt 2.3

1. Wie groß sind die indizierte Motorleistung P_i und der stündliche Kraftstoffverbrauch B des Fahrzeugs (m = 1 100 kg) in Beispiel 2.33, S. 116, wenn die Fahrwiderstandsziffer $\mu_r = 0{,}023$, der thermische Wirkungsgrad unabhängig von der Geschwindigkeit $\eta_{th} = 0{,}32$, der mechanische Wirkungsgrad des Motors $\eta_m = 0{,}90$ und der Wirkungsgrad zwischen Motor und Straße $\eta_s = 0{,}85$ betragen? Der Heizwert des Kraftstoffes sei $H = 33 \cdot 10^6$ J/l. Wie groß ist der Kraftstoffverbrauch für 100 km Fahrweg?

2. Welche Motorleistung P_m würde das Fahrzeug in Beispiel 2.34, S. 117, benötigen, wenn die Spitzengeschwindigkeit auf ebener Straße in ruhender Luft v = 165 km/h betragen soll?

3. Eine Stahlkugel (Dichte $\rho_K = 7{,}85$ kg/dm³, $c_W = 0{,}4$) fällt in Luft ($\rho_L = 1{,}25$ kg/m³) aus der Ruhelage senkrecht zur Erde. a) Wie ändert sich die stationäre Sinkgeschwindigkeit v_S mit dem Durchmesser d? b) Wie groß wird v_S für d = 1, 10, 100 und 1000 mm?

4. Eine Kugel (d = 8 mm, $\rho_K = 7{,}85$ kg/dm³) fällt in zäher Flüssigkeit ($\rho_F = 0{,}91$ kg/dm³) mit stationärer Sinkgeschwindigkeit v_s. Ein Fallweg von 0,5 m wird in 5 s zurückgelegt. Wie groß ist die Konstante k in Gl. (2.128)?

5. a) Für den Fall eines Körpers (Masse m) in zäher Flüssigkeit stelle man die Bewegungsgleichung auf und bestimme das Beschleunigung-Zeit-, Geschwindigkeit-Zeit- und Ort-Zeit-Gesetz. b) Nach welcher Zeit t_1 und nach welchem Weg s_1 wird die stationäre Sinkgeschwindigkeit v_S zu 86,5 % erreicht, wenn die Bewegung aus der Ruhelage beginnt? Hinweise: Man setze nach Gl. (2.132) $\alpha = (F_G - F_A)/F_G$ und $T = v_S/(\alpha\, g)$.

6. Welche Spitzengeschwindigkeit erreicht das Fahrzeug in Beispiel 2.34, S. 117, in den Fällen a), b), c) und d), wenn man annimmt, dass die Antriebskraft unabhängig von der Geschwindigkeit konstant ist und den Wert F = 1200 N hat? e) Wie groß wäre dann die maximale Motorleistung P_m?

2.4 Impulssatz, Impulsmomentsatz

Die Tragweite der Begriffe Impuls und Impulsmoment und der mit Hilfe dieser Begriffe formulierten Sätze (Impulssatz, Impulsmomentsatz) erkennt man erst bei der Betrachtung des Massenpunktsystems (Abschn. 4) und des Körpers (Abschn. 5). Wegen ihrer Bedeutung sollen sie bereits für einen Massenpunkt formuliert werden.

2.4.1 Impuls, Impulssatz

Das Produkt aus der Masse eines Massenpunktes und seiner Geschwindigkeit nennt man

Impuls oder Bewegungsgröße

$$\vec{p} = m\,\vec{v} \tag{2.140}$$

Der Impuls ist als Vektor definiert, er ist mit dem Geschwindigkeitsvektor gleichgerichtet (**Bild 2.59**). In natürlichen Koordinaten hat er daher nur eine von Null verschiedene Komponente p_t. Der Betrag des Impulsvektors ist gleich dem Betrag seiner Bahnkomponente p_t, er wird als Produkt aus der Masse und dem Betrag der Bahngeschwindigkeit des Massenpunktes berechnet

$$|\,\vec{p}\,| = p = p_t = m\,v \tag{2.141}$$

Mit Hilfe des Impulsvektors lässt sich das *Newton*sche Grundgesetz durch Umformung

$$m\,\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\vec{v}) = \vec{F}$$

in der Form schreiben

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \tag{2.142}$$

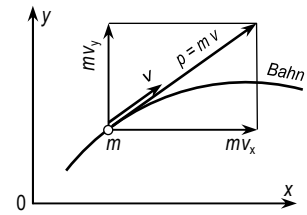


Bild 2.59: Impulsvektor

oder in Komponentenform bei Zerlegung in einem kartesischen x, y, z-System

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = F_x \qquad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = F_y \qquad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = F_z \tag{2.143}$$

In dieser Form wird das *Newton*sche Grundgesetz als Impulssatz bezeichnet. Gl. (2.142) besagt:

Die zeitliche Änderung des Impulses eines Massenpunktes ist gleich der auf ihn wirkenden resultierenden äußeren Kraft.

Newton hat sein Grundgesetz in einer Fassung angegeben, die der Gl. (2.142) entspricht. In dieser Gestalt ist das Grundgesetz umfassender als in der Form der Gl. (2.6), denn es gilt auch, wenn die Masse zeitlich veränderlich ist.

Da Integration als Umkehroperation der Differenziation aufgefasst werden kann, können die Beziehungen Gl. (2.142) und (2.143) auch in Integralform geschrieben werden. Für die x-Richtung erhält man z. B. aus der ersten der Gl. (2.143)

$$p_{\mathrm{x}} = \int F_{\mathrm{x}}(t)\,\mathrm{d}t$$

Ist p_{x0} die Impulskomponente zur Zeit t_0 und p_{x1} die Impulskomponente zur Zeit t_1, so folgt aus dieser Gleichung durch Integration in den Grenzen von t_0 bis t_1

$$p_{\mathrm{x1}} - p_{\mathrm{x0}} = \int_{t_0}^{t_1} F_{\mathrm{x}}(t)\,\mathrm{d}t$$

Zusammenfassend erhält man aus Gl. (2.143) die Beziehungen

$$\boldsymbol{p_{\mathrm{x1}} - p_{\mathrm{x0}} = \int_{t_0}^{t_1} F_{\mathrm{x}}(t)\,\mathrm{d}t \qquad p_{\mathrm{y1}} - p_{\mathrm{y0}} = \int_{t_0}^{t_1} F_{\mathrm{y}}(t)\,\mathrm{d}t \qquad p_{\mathrm{z1}} - p_{\mathrm{z0}} = \int_{t_0}^{t_1} F_{\mathrm{z}}(t)\,\mathrm{d}t} \tag{2.144}$$

Diese Gleichungen können mit

$$\vec{p}_1 = \begin{Bmatrix} p_{\mathrm{x1}} \\ p_{\mathrm{y1}} \\ p_{\mathrm{z1}} \end{Bmatrix} \qquad \vec{p}_0 = \begin{Bmatrix} p_{\mathrm{x0}} \\ p_{\mathrm{y0}} \\ p_{\mathrm{z0}} \end{Bmatrix} \qquad \vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_{\mathrm{x}}(t) \\ F_{\mathrm{y}}(t) \\ F_{\mathrm{z}}(t) \end{Bmatrix}$$

zu einer Vektorbeziehung zusammengefasst werden

$$\boldsymbol{\vec{p}_1 - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t} \tag{2.145}$$

Aus dem *Newton*schen Grundgesetz für die Bahnrichtung

$$m\,a_{\mathrm{t}} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,v) = F_{\mathrm{t}}$$

erhält man mit $m\,v = p_{\mathrm{t}} = p$ nach Gl. (2.141)

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F_{\mathrm{t}} \tag{2.146}$$

Daraus folgt

$$\boldsymbol{p_1 - p_0 = \int_{t_0}^{t_1} F_{\mathrm{t}}(t)\,\mathrm{d}t} \tag{2.147}$$

Der *Betrag* des Impulses wird also nur durch die Bahnkomponente der resultierenden Kraft geändert. Treten bei der Bewegung eines Massenpunktes nur Normalkräfte F_n auf, ist also die Bahnkomponente $F_t = 0$, so erfährt der Impulsvektor zwar ständig eine Richtungsänderung, sein *Betrag* $p = m\,v$ bleibt jedoch konstant, denn für den Betrag des Impulsvektors folgt mit $F_t = 0$ aus Gl. (2.146)

$$p = m\,v = \text{const} \tag{2.148}$$

Ein Schienenfahrzeug, das auf einer Kreisbahn angestoßen wird, bewegt sich also mit konstanter Bahngeschwindigkeit v, wenn in Richtung der Bahn keine Kräfte (also auch keine Reibungskräfte) wirken. Gleiches gilt für einen Satelliten, der sich auf einer Kreisbahn um die Erde bewegt.

Trägt man die Bahnkomponente der Kraft als Ordinate über der Zeit als Abszisse auf, so ist das bestimmte Integral der Gl. (2.147) der Fläche unter dieser Kurve proportional (**Bild 2.60**).

Für den einzelnen Massenpunkt erzielt man durch Anwendung des Impulssatzes keine wesentlichen Vereinfachungen gegenüber dem Grundgesetz. Seine Bedeutung erhält der Impulssatz erst durch Erweiterung und Anwendung auf Systeme von Massenpunkten (s. Abschn. 4), insbesondere auch bei Untersuchung von Stoßvorgängen (s. Abschn. 6).

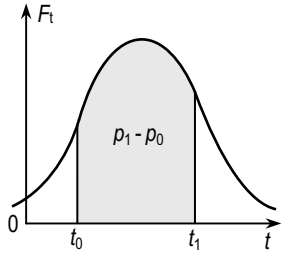


Bild 2.60: Kraft-Zeit-Diagramm

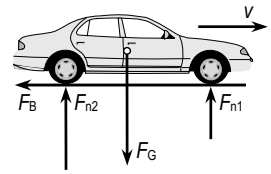


Bild 2.61: Bremskraft am Fahrzeug

Beispiel 2.37: Ein Pkw (Masse m = 1200 kg) fährt mit der Geschwindigkeit v_0 = 72 km/h. Wie groß muss die als konstant angenommene Bremskraft F_B sein, wenn das Fahrzeug in t_1 = 4 s zum Stillstand kommen soll?

In **Bild 2.61** sind die am Fahrzeug angreifenden äußeren Kräfte angegeben. Bei Vernachlässigung von Luftwiderstand und Reibungsverlusten wirkt entgegen der Fahrtrichtung nur die konstante Bremskraft F_B, und mit dem Impulssatz in Gl. (2.147) erhält man mit $F_t = -F_B$

$$m\,v_1 - m\,v_0 = \int_0^{t_1} F_t\,\mathrm{d}t = -F_B\,t_1$$

Mit $v_1 = 0$ folgt die Bremskraft

$$F_B = m\frac{v_0}{t_1} = 1200\ \text{kg} \cdot \frac{(72/3{,}6)\ \text{m/s}}{4\ \text{s}} = 6000\ \text{N}$$

Der Quotient v_0/t_1 ist die konstante Bremsverzögerung a_0. Gegenüber dem Grundgesetz bringt der Impulssatz hier praktisch keinen Vorteil.

2.4.2 Impulsmoment, Impulsmomentsatz

In der Statik haben wir das statische Moment $\vec{M}_0$ einer Kraft $\vec{F}$ bezüglich eines Punktes 0 definiert und dieses durch das Vektorprodukt

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.149}$$

dargestellt, wobei $\vec{r}$ der Ortsvektor von dem Bezugspunkt 0 zum Angriffspunkt der Kraft $\vec{F}$ ist (**Bild 2.62a**) (s. Band *Statik*, Abschn. 4.2 und Abschn. 8.3). Entsprechend definiert man das Moment des Impulses eines Massenpunktes – das Impulsmoment – durch

$$\boldsymbol{\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\ \vec{v}} \tag{2.150}$$

Das Impulsmoment $\vec{L}_0$ eines Massenpunktes mit der Masse m bezüglich eines Punktes 0 ist das Vektorprodukt aus dem Ortsvektor $\vec{r}$ und dem Impuls $\vec{p} = m\,\vec{v}$ des Massenpunktes.

Das Impulsmoment wird auch als *Drehimpuls* oder *Drall* bezeichnet. Die Vektoren $\vec{r}$, $m\,\vec{v}$ und $\vec{L}_0$ bilden in dieser (!) Reihenfolge ein Rechtssystem (**Bild 2.62b**).

Der Betrag des Impulsmomentes ist (vgl. die Analogie zum statischen Moment einer Kraft)

$$|\vec{L}_0| = L_0 = r\,m\,v \sin\alpha = m\,v\,h \tag{2.151}$$

Dabei ist α der von den Vektoren $\vec{r}$ und $m\,\vec{v}$ (in dieser Reihenfolge!) eingeschlossene Winkel und h der Abstand (Hebelarm) der mit dem Impulsvektor $m\,\vec{v}$ zusammenfallenden Geraden vom Bezugspunkt 0 (**Bild 2.62b**).

Bildet man unter Beachtung der Produktregel der Differenzialrechnung die Ableitung des Impulsmomentes in Gl. (2.150) nach der Zeit, so erhält man

$$\dot{\vec{L}}_0 = \dot{\vec{r}} \times m\,\vec{v} + \vec{r} \times m\,\dot{\vec{v}}$$

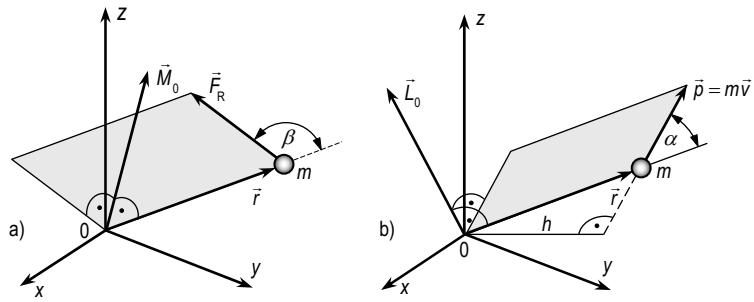


Bild 2.62: a) Momentvektor $\vec{M}_0$ b) Impulsmoment $\vec{L}_0$

Wir wählen 0 als *festen Bezugspunkt* (als solchen, der in einem Inertialsystem ruht s. S. 63), dann ist $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, und der erste Term auf der rechten Seite der letzten Gleichung wird Null, weil $\dot{\vec{r}}$ und $m\,\vec{v}$ parallel sind ($\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$). Damit folgt

$$\dot{\vec{L}}_0 = \vec{r} \times m\,\dot{\vec{v}} \tag{2.152}$$

Nun ist nach Gl. (2.142) $m\,\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{p}}$ gleich der Resultierenden $\vec{F}_\mathrm{R}$ der am Massenpunkt angreifenden Kräfte. Damit erhält man aus Gl. (2.152) den *Impulsmomentsatz* für einen einzelnen Massenpunkt

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}_\mathrm{R} = \vec{M}_0 \tag{2.153}$$

Die Ableitung des Impulsmomentes bezüglich eines festen Punktes 0 nach der Zeit ist gleich dem statischen Moment der Resultierenden der am Massenpunkt angreifenden Kräfte bezüglich desselben Punktes.

Beispiel 2.38: *Zentralbewegung*. Greift an einem Massenpunkt eine Kraft $\vec{F}_\mathrm{R}$ an, die dauernd auf einen festen Punkt 0 gerichtet ist ($\vec{F}_\mathrm{R}$ parallel zu $\vec{r}$), so spricht man von einer Zentralbewegung (z. B. Planetenbewegung). In diesem Fall ist $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}_\mathrm{R} = \vec{0}$ und damit nach Gl. (2.153) das Impulsmoment $\vec{L}_0$ konstant. Da der Impulsmomentvektor jetzt auch seine Richtung dauernd beibehält, kann sich der Massenpunkt nur in einer Ebene (z. B. der x, y-Ebene) bewegen, auf der der Vektor $\vec{L}_0$ senkrecht steht. Diese Bewegung lässt sich anschaulich deuten. Das von dem Fahrstrahl $\vec{r}$ in der Zeit Δt überstrichene Flächenelement (**Bild 2.63**) hat die Größe

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \Delta\vec{r}\right| = \frac{1}{2} r\,\Delta r \sin\alpha$$

mit $\Delta\vec{r} \approx \vec{v}\,\Delta t$ (s. Gl. (1.36)) erhält man durch Grenzwertbildung die so genannte Flächengeschwindigkeit

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| \tag{2.154}$$

Setzt man diese Beziehung in Gl. (2.150) ein, so folgt für den Betrag des Impulsmomentes

$$|\vec{L}_0| = |\vec{r} \times m\,\vec{v}| = 2\,m\,\dot{A} = \text{const} \tag{2.155}$$

Diese Gleichung enthält die Aussage des 2. *Kepler*schen Gesetzes, welches besagt, dass bei einer Zentralbewegung der Fahrstrahl $\vec{r}$ (z. B. von der Sonne zur Erde) in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht.

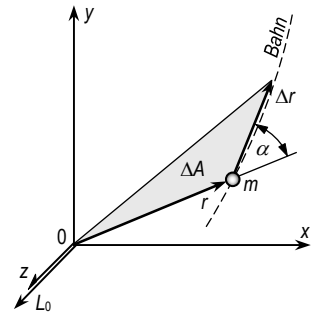


Bild 2.63: Zentralbewegung

2.4.3 Aufgaben zu Abschnitt 2.4

1. Ein Pkw mit der Masse m = 1400 kg beschleunigt in t_1 = 10 s von v_0 = 0 km/h auf v_1 = 100 km/h. Wie groß ist die als konstant angenommene Antriebskraft F_A, wenn die Fahrwiderstandszahl μ_r = 0,02 ist und der Luftwiderstand vernachlässigt wird?

2. Ein Klotz mit der Masse m = 5 kg wird mittels einer Feder auf eine um α = 30° geneigte Ebene geschossen (**Bild 2.64**). Beim Verlassen der Feder besitzt der Klotz eine Geschwindigkeit v_0 = 10 m/s. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Klotz und Unterlage beträgt μ = 0,2. Bestimmen Sie die Zeitdauer t_1 vom Verlassen der Feder bis zum Stillstand des Klotzes.

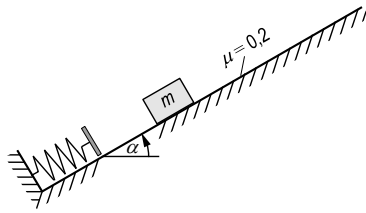


Bild 2.64: Klotz auf schiefer Ebene

3. Eine Kugel mit der Masse m = 2 kg fällt aus einer Höhe h = 3 m auf eine starre Unterlage. Die Stoßdauer beim Aufprall der Kugel beträgt t_S = 0,01 s. Unter Annahme des in **Bild 2.65b** dargestellten Stoßkraftverlaufs ermittle man die maximale Stoßkraft F_0.

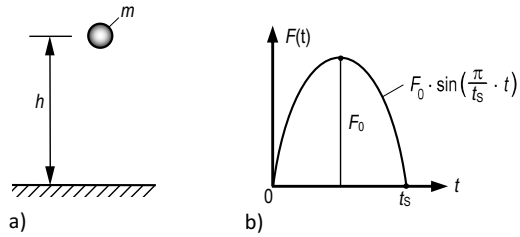


Bild 2.65:
a) Fallende Kugel b) Stoßkraftverlauf

4. Ein Klotz mit der Masse m = 10 kg, der durch einen 1 m langen, masselosen Stab gehalten wird, bewegt sich auf einer Kreisbahn um den Drehpunkt 0 (**Bild 2.66**). Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Klotz und Unterlage beträgt μ = 0,2. Zu Beginn der Drehbewegung wird der Rotor aus Klotz und Stab auf eine Winkelgeschwindigkeit ω = 10 s^{-1} beschleunigt.

a) Wie groß muss das Antriebsmoment M_A im Punkt 0 gewählt werden, damit sich der Rotor mit der Winkelgeschwindigkeit ω = 10 s^{-1} = const weiterdreht? b) Geben Sie für diesen Fall den Betrag des Drehimpulses $\vec{L}_0$ an. c) Wie groß ist die Flächengeschwindigkeit $\dot{A}$, mit der der Rotor die Grundfläche überstreicht?

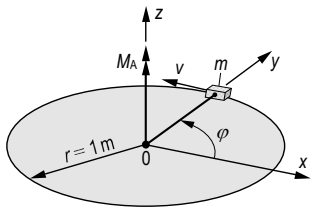


Bild 2.66: Klotz auf Kreisbahn

http://www.springer.com/978-3-658-12123-5

Holzmann/Meyer/Schumpich Technische Mechanik
Kinematik und Kinetik
Eller, C.
2016, XII, 367 S. 231 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-12123-5