FOM-Edition

Wirtschaftsmathematik für das Bachelor-Studium

Lehr und Arbeitsbuch

Bearbeitet von
Thomas Christiaans, Matthias Ross

2., überarbeitete und erweiterte Auflage 2016. Buch. XII, 364 S. Softcover
ISBN 978 3 658 09466 9
Format (B x L): 16,7 x 24,1 cm
Gewicht: 639 g

Weitere Fachgebiete > Mathematik

Zu Inhaltsverzeichnis

schnell und portofrei erhältlich bei

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

1 Grundlagen

1.1 Zahlenmengen, Intervalle und Symbole

Das Rechnen mit Zahlen ist die verbreitetste Nutzung der Mathematik. Die meisten Menschen rechnen quasi automatisch bei fast allen Geldgeschäften, beim Zählen von Teilen und Stücken, beim Messen von Entfernungen oder Geschwindigkeiten. In diesem Kapitel werden keine ökonomischen Anwendungen dargestellt, sondern nur Grundlagen, die in den späteren Abschnitten, aber auch in vielen Bereichen der Wirtschaftswissenschaften ihre Anwendung ohne weitere Erklärungen finden. Hierzu gehören die Bruchrechnung, Potenzen, Logarithmen, das Umformen von Termen und das Auflösen von Gleichungen sowie das Summenzeichen. Sollten Sie dieses Schulwissen bereits ausreichend beherrschen, dann können Sie dieses Kapitel gerne überspringen oder sich nur diejenigen Unterabschnitte herausgreifen, die Ihnen noch Schwierigkeiten bereiten. Überprüfen Sie Ihr Wissen einfach, indem Sie einige der Übungsaufgaben lösen, die am Ende jedes Unterabschnitts angeboten werden.

Mengen

Eine **Menge** ist eine Zusammenstellung von unterschiedlichen Elementen. Mengen werden meistens durch geschweifte Klammern beschrieben. Mit $A = \{1;2;3\}$ wird beispielsweise eine Menge beschrieben, die als Elemente die Zahlen 1, 2 und 3 enthält. Entweder gehört ein Element zu einer bestimmten Menge oder nicht:

$$a \in A : a \text{ ist Element von } A$$
$$a \notin A : a \text{ ist nicht Element von } A$$

Eine Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** und wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet. Sind A und B Mengen, so heißt A eine **Teilmenge** von B, kurz $A \subset B$, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Beispiele

- $A = \{1;2;3\}$, dann ist $2 \in A$, aber $4 \notin A$.
- Mit $A = \{1;2;3\}$ und $B = \{1;2;3;4\}$, gilt $A \subset B$.
- $A = \{a \mid a^2 = 1\} = \{-1;1\}$. Die Menge A besteht aus denjenigen Elementen a, für die gilt, dass a^2 gleich eins ist. Das Symbol $\mid$ bedeutet damit „für die gilt:“.
- $A = \{1;1;1;2;3\}$ ist keine Menge, da nicht alle Elemente unterscheidbar sind.
- $A = \{\text{alle Einwohner von Deutschland}\}$ ist eine Menge.

Zahlenmengen

Die Zahlenmengen sind die am häufigsten verwendeten Mengen, da sie Grundlage nahezu aller Berechnungen sind. Die **natürlichen Zahlen** sind alle positiven ganzen Zahlen:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2016
T. Christiaans und M. Ross, *Wirtschaftsmathematik für das Bachelor-Studium*,
FOM-Edition, DOI 10.1007/978-3-658-09467-6_1

Wird N um die 0 erweitert, erhalten wir die **erweiterten natürlichen Zahlen**

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = N \cup \{0\},$$

wobei $\cup$ „Vereinigung“ heißt und hier bedeutet, dass die Menge N mit der Menge, die nur die 0 enthält, zu einer neuen Menge zusammengefasst wird. Die erweiterten natürlichen Zahlen N_0 zuzüglich der negativen ganzen Zahlen sind die **ganzen Zahlen**:

$$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Alle Zahlen, die sich als Quotient (Bruch) zweier ganzer Zahlen darstellen lassen, heißen **rationale Zahlen**:

$$Q = \left\{ x \;\middle|\; x = \frac{p}{q}; p, q \in Z; q \neq 0 \right\}$$

Jede rationale Zahl kann als endliche oder periodische Dezimalzahl dargestellt werden, zum Beispiel $2/5 = 0{,}4$ oder $1/3 = 0{,}\bar{3}$. Wird Q noch um die **irrationalen Zahlen**, das sind die unendlichen und nicht periodischen Dezimalzahlen wie zum Beispiel $\pi = 3{,}14159265\ldots$ oder $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ ergänzt, haben wir die **reellen Zahlen**:

$$R = \{x \mid x \text{ ist rational oder irrational}\}$$

Wenn Sie sich einen Zahlenstrahl vorstellen, der geometrisch die Zahlen zwischen minus unendlich ($-\infty$) und unendlich (∞) repräsentiert, so gibt es auf diesem Strahl Punkte, denen keine rationale Zahl entspricht. Dagegen können Sie jedem Punkt eindeutig eine reelle Zahl zuordnen. Die reellen Zahlen sind also in dem Sinne vollständig, dass sie einen Zahlenstrahl lückenlos ausfüllen. Für die Zahlenmengen gilt: $N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R$.

Häufig werden Teilmengen der reellen Zahlen benötigt, zum Beispiel:

- Reelle Zahlen ohne 0: $R \setminus \{0\}$, wobei das Symbol $\setminus$ für „ohne“ steht, das heißt, $R \setminus \{0\}$ wird gelesen als „R ohne 0“.
- Nichtnegative reelle Zahlen: $R_+ = \{x \in R \mid x \geqq 0\}$
- Positive reelle Zahlen: $R_{++} = \{x \in R \mid x > 0\}$
- Nichtpositive reelle Zahlen: $R_- = \{x \in R \mid x \leqq 0\}$
- Negative reelle Zahlen: $R_{--} = \{x \in R \mid x < 0\}$

Eingehender werden Mengen im Abschnitt 7.2 behandelt.

Intervalle

Innerhalb der Menge der reellen Zahlen R werden Teilbereiche, zum Beispiel alle Zahlen zwischen -10 und 20, als **Intervalle** dargestellt:

- (a, b) ist das **offene Intervall** zwischen a und b ohne die Zahlen a und b selber, zum Beispiel $(-10, 20) = \{x \in R \mid -10 < x < 20\}$.
- $[a, b]$ ist das **abgeschlossene Intervall** zwischen a und b einschließlich der Grenzen a und b, zum Beispiel $[-10, 20] = \{x \in R \mid -10 \leqq x \leqq 20\}$.
- $(a, b]$ ist das **halboffene Intervall** zwischen a und b ohne a, aber einschließlich b, zum Beispiel $(-10, 20] = \{x \in R \mid -10 < x \leqq 20\}$.
- $[a, b)$ ist analog das **halboffene Intervall** zwischen a und b ohne b, aber einschließlich a.

Runden

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden Zahlen mit vielen oder sogar unendlich vielen Stellen nach dem Komma häufig durch eine verringerte Anzahl an Stellen dargestellt. Diese Verringerung der Stellenanzahl wird **Runden** genannt. Die auch in diesem Lehrbuch verwendete und gängige Methode des **kaufmännischen Rundens** funktioniert folgendermaßen:

- Wenn die erste durch Rundung wegfallende Ziffer eine 0, 1, 2, 3 oder 4 ist, verbleibt die Ziffer an der letzten nicht gerundeten Stelle unverändert.
- Wenn die erste durch Rundung wegfallende Ziffer eine 5, 6, 7, 8 oder 9 ist, wird die Ziffer der letzten nicht gerundeten Stelle um eins erhöht. Falls diese Ziffer eine 9 ist, wird auf 0 gerundet und die vorletzte nicht gerundete Stelle um eins erhöht.
- Wenn nicht anders gefordert, wird in der Regel auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. Allerdings gibt es Anwendungen, bei denen das zu ungenau ist. Wenn Sie zum Beispiel den Prozentsatz $5,09\%$ als gerundeten Dezimalbruch $0,05$ darstellen, wird das in der Regel nicht ausreichend genau sein. In solchen Fällen sollten vier Nachkommastellen angegeben werden, also 0,0509.

Beispiele

- Wird die Zahl 3,4951 auf eine Dezimalstelle gerundet, ergibt sich 3,5, bei zwei Dezimalstellen 3,50 und bei drei Dezimalstellen 3,495.
- Wird die Zahl 2,7549 auf eine Dezimalstelle gerundet, ergibt sich 2,8, bei zwei Dezimalstellen 2,75 und bei drei Dezimalstellen 2,755.

Aufgaben

1.1 Ordnen Sie den folgenden Zahlen die entsprechenden Zahlenmengen N,N_0, Z, Q und R zu:
(a) 1; (b) 3,2; (c) -11; (d) $\sqrt{10}$; (e) $\frac{1}{3}$; (f) 0.

1.2 Runden Sie die nachfolgenden Zahlen auf keine, eine, zwei und drei Nachkommastellen:
(a) 7,3456; (b) 2,3952; (c) $-9,9549$.

Lösungen

1.1 (a) $1 \in N, N_0, Z, Q, R$; (b) $3,2 \in Q, R$; (c) $-11 \in Z, Q, R$; (d) $\sqrt{10} \in R$; (e) $\frac{1}{3} \in Q, R$; (f) $0 \in N_0, Z, Q, R$.

1.2 (a) 7; 7,3; 7,35; 7,346; (b)2; 2,4; 2,40; 2,395; (c) -10; $-10,0$; $-9,95$; $-9,955$.

1.2 Grundrechenarten und Klammern

Als **Grundrechenarten** bezeichnet man die Addition ($+$) und Multiplikation ($\cdot$) sowie deren jeweilige Umkehrungen, die Subtraktion ($-$) und Division ($\div$, :, oder /). Grundsätzlich wird von links nach rechts gerechnet, wobei diese Reihenfolge aber durch weitere Konventionen verändert werden kann. Durch Klammern umschlossene Ausdrücke werden vorrangig, und falls mehrere Klammerausdrücke ineinander verschachtelt sind, von innen nach außen berechnet. Anschließend werden Potenzen, Wurzeln und Ausdrücke auf oder unter Brüchen

berechnet. Schließlich werden Produkte und Quotienten als umklammert angesehen (**Punktrechnung vor Strichrechnung**). Zuletzt werden Addition und Subtraktion durchgeführt.

Werden zwei negative Ausdrücke multipliziert oder dividiert, ergibt sich ein positives Vorzeichen, welches zur Vereinfachung fast immer weggelassen wird. Ein negatives Vorzeichen vor einer Klammer bedeutet entsprechend, dass der gesamte Klammerausdruck sein Vorzeichen ändert oder dass der gesamte Klammerausdruck mit -1 multipliziert wird. Letztlich hat sich als Vereinfachung auch durchgesetzt, dass der Punkt, der die Multiplikation beschreibt, immer dann fortgelassen wird, wenn sich hieraus keine veränderte Interpretation ergibt. Statt $4 \cdot x \cdot y$ wird einfach $4xy$ geschrieben.

Beispiele

- $2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$
- $3 + (-9) = 3 - 9 = -6$
- $4 - (2 - 1) = 4 - 2 + 1 = 3$
- $25 - 2(3 \cdot 4) = 25 - 2 \cdot 12 = 1$
- $(-4)(-5) = 20$

Bei der Addition und der Multiplikation ist die Reihenfolge, mit der die Berechnungen durchgeführt werden, aufgrund des **Kommutativgesetzes** ($a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$ für alle reellen Zahlen) und des **Assoziativgesetzes** [$(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$] egal. Das **Distributivgesetz** [$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$] erleichtert das Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken und ist beim sogenannten Ausklammern hilfreich.

Beispiele

- $x + 4 - (4 - x) = x + 4 - 4 + x = 2x$
- $4(3x + 1) = 12x + 4$
- $-3(-2 + 3x) = 6 - 9x$
- $(12xy - 6y) = 6y(2x - 1)$
- $(4 + x)(5 + x) = 20 + 4x + 5x + x^2 = 20 + 9x + x^2$
- $(4 + x)(5 + y) = 20 + 4y + 5x + xy$

Die Ausdrücke x und y stehen in diesen Beispielen für sogenannte **Variablen**, für die beliebige reelle Zahlen eingesetzt werden können. x^2 ist ein Abkürzung für $x \cdot x$. Dagegen sind **Konstanten** feste Zahlen.

Aufgaben

1.3 Vereinfachen und berechnen Sie:

(a) $4 + (-2) - 3(2 - (4 - 8) \div 2) + 9$;

(b) $4 - 2(-3(5 - 4) - 4(-1))$;

(c) $(4 - 2((3^2 - 5^2) - 4) - 43)$;

(d) $4 - 12/(2 + 4)8 + 8 \div 2 + 7$;

(e) $x + 2x - 3(x - 3x) - x(-2 + 9) - 2(-x)$;

(f) $(x + y)(x + y)$;

(g) $6x - 4y - 4xy + 2x(-3 + 2y) - y(x - 4)$;

(h) $(x - y)(x - y)$;

(i) $(s + t)(s + t) + (s - t)(s - t) + 2(s + t)(s - t)$;

(j) $(x + y)(x - y)$;

(k) $(2s - 3t)(3s - 2t) - 6(s - t)(s + t) - 12t(t - s) + st$;

(l) $4(2x - 5y) - (6x + (3x - 2y) - (5x + 3y) - (-x + 6y)) - (3x - 9y)$.

Lösungen

1.3 (a) $4 - 2 - 3(2 - (-4) \div 2) + 9 = 4 - 2 - 3(2 + 2) + 9 = 4 - 2 - 12 + 9 = -1$;

(b) $4 - 2(-3 \cdot 1 + 4) = 4 - 2 \cdot 1 = 2$;

(c) $4 - 2((9 - 25) - 4) - 43 = 4 - 2 \cdot (-20) - 43 = 1$;

(d) $4 - 12/6 \cdot 8 + 4 + 7 = 4 - 2 \cdot 8 + 4 + 7 = -1$;

(e) $x + 2x - 3 \cdot (-2x) + 2x - 9x + 2x = x + 2x + 6x + 2x - 9x + 2x = 4x$;

(f) $x^2 + x \cdot y + y \cdot x + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$;

(g) $6x - 4y - 4xy - 6x + 4xy - xy + 4y = -xy$;

(h) $x^2 - x \cdot y - y \cdot x + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$;

(i) $s^2 + 2st + t^2 + s^2 - 2st + t^2 + 2(s^2 - t^2) = 2s^2 + 2t^2 + 2s^2 - 2t^2 = 4s^2$;

(j) $x^2 - x \cdot y + y \cdot x - y^2 = x^2 - y^2$;

(k) $6s^2 - 4st - 9st + 6t^2 - 6(s^2 - t^2) - 12t^2 + 12st + st = 0$;

(l) $8x - 20y - (6x + 3x - 2y - 5x - 3y + x - 6y) - 3x + 9y = 0$.

1.3 Bruchrechnung

Immer wenn eine Zahl a durch eine Zahl b, die nicht 0 sein darf, geteilt wird, spricht man von einem **Quotienten**, für den es auch eine andere Darstellungsmöglichkeit gibt, nämlich den **Bruch**:

$$a \div b = a : b = a/b = \frac{a}{b}$$

Der Term auf dem Bruchstrich wird als **Zähler** bezeichnet, der Term unter dem Bruchstrich als **Nenner**.

Für Brüche gelten neben den bereits bekannten einige zusätzliche Rechenregeln, die es ermöglichen, mit den Ergebnissen innerhalb der Bruchrechnung zu verbleiben. Bei Berechnungen mit Zahlen kann dann häufig auf Taschenrechner oder andere Hilfsmittel verzichtet werden. Weiterhin ermöglicht die Bruchrechnung Berechnungen mit Variablen, Platzhaltern oder Buchstaben.

Erweitern eines Bruchs

Multipliziert man den Zähler und den Nenner eines Bruchs mit der gleichen Zahl $c \neq 0$, dieser Vorgang wird **Erweiterung** genannt, dann ändert sich der Wert des Bruchs nicht:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Kürzen eines Bruchs

Natürlich gilt diese Gleichheit auch rückwärts. Wenn im Zähler und Nenner jeweils ein Produkt mit teilweise gleichen Faktoren steht, können wir diejenigen Faktoren, die identisch sind, jeweils paarweise weglassen. Dieser Vorgang wird auch **Kürzen** genannt. Da Brüche, die aus kleineren Zahlen bestehen, eleganter und für die meisten Menschen besser verständlich sind, wird mittels Kürzen häufig versucht, die kleinstmöglichen ganzen Zahlen in Zähler und Nenner zu verwenden.

Sehr hilfreich für das Kürzen ist, die Ausdrücke in Zähler und Nenner jeweils in ihre **Primfaktoren** aufzuteilen, das sind die kleinstmöglichen ganzen Zahlen außer eins, die als Produkt jeweils den Ausdruck ergeben. Gleiche Primfaktoren können bequem paarweise im Zähler und Nenner einfach weggelassen werden.

Beispiele

- $\frac{12}{8} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$
- $\frac{105}{21} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{5}{1} = 5$

Dezimalzahlen und Brüche

Brüche können in Dezimalzahlen umgewandelt werden. Die erste Stelle vor dem Komma einer Dezimalzahl beschreibt die Anzahl der Einer, die zweite die Anzahl der Zehner, die dritte die Anzahl der Hunderter usw. Hinter dem Komma beschreibt die erste Stelle die Zehntel, die zweite die Hundertstel usw. Die Zahl 0,125 bedeutet deshalb 1 Zehntel und 2 Hundertstel und 5 Tausendstel, was zusammen gleich 125 Tausendstel oder $\frac{125}{1.000}$ ist.

Um Brüche in Dezimalzahlen umzuwandeln, werden die Brüche so lange erweitert, bis im Nenner eine Zehnerpotenz steht (1,10, 100, ...). Anschließend kann die Dezimalzahl direkt aus dem Zählerwert abgelesen werden, wobei nur noch das Komma an die richtige Stelle gesetzt werden muss. Lautet der Bruch auf Zehntel, wird das Komma um eine Stelle nach links verschoben, bei Hundertstel zwei Stellen usw. Aus zum Beispiel 1/8 wird damit:

$$\frac{1}{8} = \frac{125}{1.000} = 0{,}125$$

Manche Brüche, zum Beispiel 1/3, lassen sich nicht auf eine Zehnerpotenz im Nenner erweitern. Die Regelmäßigkeit in der Ziffernfolge, die während solcher Suche nach immer höheren Zehnerpotenzen entsteht, wird auch als **Periodizität** bezeichnet. Die sich wiederholende Sequenz wird mit einem Balken über den jeweiligen Ziffern dargestellt. Diese Sequenz lässt

sich am einfachsten herausfinden, wenn man die schriftliche Division anwendet. Für das Beispiel 1/3 erkennt man, dass immer wieder ein Rest von 1 verbleibt, der unendlich oft zu einer weiteren 3 als Nachkommastelle führt:

$$
\begin{array}{lcl}
1 \div 3 & = & 0{,}33\ldots = 0{,}\overline{3} \quad \text{(gelesen: „0 Komma Periode 3“)} \\
\underline{0} & & \\
10 & & \\
\underline{9} & & \\
10 & & \\
\underline{9} & & \\
\ldots & &
\end{array}
$$

Aufgaben

1.4 Kürzen Sie die folgenden Brüche weitestmöglich, und stellen Sie das Ergebnis als Dezimalzahl dar:

(a) $\frac{12}{16}$; (b) $\frac{18}{12}$; (c) $\frac{110}{330}$; (d) $\frac{90}{100}$; (e) $\frac{-210}{315}$; (f) $\frac{-55}{-11}$;

(g) $\frac{28}{42}$; (h) $\frac{xy}{(2x-x)y}$; (i) $\frac{12x-24y}{4x-8y}$; (j) $\frac{4y-4z}{2y-2z}$; (k) $\frac{20xy}{5y\cdot 4x}$; (l) $\frac{3x\cdot 4y}{4x\cdot 3y}$.

Lösungen

1.4 (a) $\frac{2\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$; (b) $\frac{2\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$; (c) $\frac{2\cdot 5\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 11} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$; (d) $\frac{3\cdot 3\cdot 10}{2\cdot 5\cdot 10} = \frac{9}{10} = 0{,}9$;

(e) $\frac{-1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 7} = -\frac{2}{3} = -0{,}\overline{6}$; (f) $\frac{-1\cdot 5\cdot 11}{-1\cdot 11} = \frac{5}{1} = 5$; (g) $\frac{2\cdot 2\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 7} = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$; (h) 1; (i) $\frac{12(x-2y)}{4(x-2y)} = 3$;

(j) $\frac{4(y-z)}{2(y-z)} = 2$; (k) $\frac{4\cdot 5\cdot x\cdot y}{4\cdot 5\cdot x\cdot y} = 1$; (l) $\frac{3\cdot 4\cdot x\cdot y}{3\cdot 4\cdot x\cdot y} = 1$.

Multiplikation von Brüchen

In der Bruchrechnung gelten nun die folgenden Rechenregeln. Zwei Brüche werden miteinander **multipliziert**, indem jeweils die beiden Zähler multipliziert und die beiden Nenner multipliziert werden:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Addition und Subtraktion von Brüchen

Die **Addition** und **Subtraktion** zweier Brüche ist nur dann möglich, wenn die Nenner der beiden Brüche identisch sind. Dann bleibt der gemeinsame Nenner bestehen und die Zähler werden addiert oder subtrahiert:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

Falls die Nenner zweier Brüche nicht gleich sind, müssen die Brüche mittels Erweiterung auf einen einheitlichen Nenner gebracht werden. Für die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ist beispielsweise der kleinste gemeinsame Nenner, der sogenannte **Hauptnenner**, die Zahl 6.

Division von Brüchen

Wird ein Bruch durch einen anderen Bruch **dividiert**, dann entspricht dies einer Multiplikation mit dem **Kehrwert**, das heißt, Zähler und Nenner desjenigen Bruchs, durch den dividiert wird, werden vertauscht:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Beispiele

- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$
- $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{15} - \frac{3 \cdot 3}{15} = \frac{1}{15}$
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$
- $\frac{6}{7} \div \frac{2}{7} = \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{6 \cdot 7}{7 \cdot 2} = 3$

Aufgaben

1.5 Berechnen und kürzen Sie weitestmöglich:

(a) $\frac{1}{8} + \frac{1}{12}$; (b) $\frac{11}{8} - \frac{3}{12}$; (c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$; (d) $4 - \frac{1}{4} - \frac{7}{2}$;

(e) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$; (f) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{7}\right) \frac{7}{13}$; (g) $5x \cdot \frac{2+2x}{x(10+10x)}$; (h) $xy\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)$;

(i) $\frac{\frac{6}{5} - \frac{7}{10}}{1{,}6 - \frac{3}{5} - \frac{3}{4}}$; (j) $\frac{4 \cdot \left(\frac{3}{x} + 6\right)}{\frac{1}{x} \cdot (6 + 12x) \cdot 2}$; (k) $\frac{2x-y}{4x^2 - 2xy} \div \left(\frac{1}{x} - \frac{9}{12x}\right) \div \frac{1}{2}$;

(l) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \div \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10} \div \frac{1}{12}$; (m) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \div \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{10} \div \frac{11}{12}$; (n) $\frac{6 \cdot \left(\frac{4}{x} + 8\right)}{\frac{1}{4x}(12 + 24x)}$.

Lösungen

1.5 (a) $\frac{3}{24} + \frac{2}{24} = \frac{3+2}{24} = \frac{5}{24}$; (b) $\frac{33}{24} - \frac{6}{24} = \frac{33-6}{24} = \frac{9}{8}$; (c) $\frac{15}{20} + \frac{4}{20} + \frac{1}{20} = \frac{15+4+1}{20} = 1$;

(d) $\frac{16-1-14}{4} = 0{,}25$; (e) $\frac{4+3-1}{6} = 1$; (f) $\frac{26}{35} \cdot \frac{7}{13} = \frac{2}{5} = 0{,}4$; (g) $\frac{5x \cdot (2+2x)}{5x \cdot (2+2x)} = 1$;

(h) $xy \cdot \left(\frac{x}{xy} + \frac{y}{xy}\right) = \frac{xy(y+x)}{xy} = x + y$; (i) $\frac{\frac{12}{10} - \frac{7}{10}}{\frac{160}{100} - \frac{60}{100} - \frac{75}{100}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = 2$;

(j) $\frac{\frac{12+24x}{x}}{\frac{1}{x} \cdot (12+24x)} = 1$; (k) $\frac{2x-y}{2x(2x-y)} \div \frac{4-3}{4x} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2x} \cdot \frac{4x}{1} \cdot \frac{2}{1} = 4$; (l) $\frac{16}{5} = 3{,}2$; (m) $\frac{48}{77}$;

(n) $\frac{(24+48x) \cdot 4x}{x \cdot (12+24x)} = \frac{2 \cdot (12+24x) \cdot 4x}{x \cdot (12+24x)} = 8$.

1.4 Potenzrechnung, Wurzeln und Logarithmen

Potenzen

Die wiederholte Multiplikation mit der gleichen Zahl wird vereinfachend durch einen Exponenten, das ist eine Hochzahl, die rechts oberhalb des Ausdrucks notiert wird, beschrieben. Der Ausdruck $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ wird durch 2^4 abgekürzt. Allgemein hat ein **Potenzausdruck** oder kurz eine **Potenz** deshalb die Gestalt

$$a^x,$$

wobei a als **Basis** und x als **Exponent** oder auch **Hochzahl** bezeichnet wird. Für die Basis a können immer alle positiven reellen Zahlen eingesetzt werden. Von der anschaulichen Definition der mehrfachen Multiplikation her müsste der Exponent eine natürliche Zahl sein. Man kann jedoch zeigen, dass die Potenz auch für alle ganzen Zahlen, alle rationalen Zahlen und sogar alle reellen Zahlen als Exponenten definiert werden kann, wobei dann im Allgemeinen aber die Basis positiv sein muss. In Ausnahmefällen darf die Basis auch 0 oder negativ werden. Überprüfen Sie das gerne mit Ihrem Taschenrechner.

(Potenzregeln) Ähnlich wie bei der Bruchrechnung ergeben sich durch die Potenzschreibweise zusätzliche Rechenregeln, die einen vereinfachten Umgang mit den Potenzen ermöglichen (alle Regeln gelten für alle reellen Exponenten, wenn $a > 0$ und $b > 0$):

(a)	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	(b)	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
(c)	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	(d)	$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
(e)	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	(f)	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
(g)	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	(h)	$a^0 = 1$

Multipliziert man zwei gleiche Basen mit unterschiedlichen Exponenten, dann besagt die Regel (a), dass die Exponenten addiert werden können. Regel (b) bezieht sich auf unterschiedliche Basen, aber gleiche Exponenten, wobei in diesen Fällen die Basen multipliziert werden. Negative Exponenten bedeuten gemäß (c), dass der Gesamtterm bei umgedrehtem Vorzeichen des Exponenten in den Nenner gesetzt werden kann. Potenziert man einen Potenzausdruck, dann entspricht das gemäß (d) einer Multiplikation der jeweiligen Exponenten. Regel (e) ergibt sich aus der Kombination von (b), (c) und (d), denn:

$$\frac{a^x}{b^x} = a^x \cdot \left(b^{-1}\right)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Ebenso ergibt sich Regel (f) aus der Kombination von (a) und (c). Regel (h) besagt, dass jede Zahl außer 0, die mit 0 potenziert wird, 1 ergibt.

Wurzelrechnung

Die **n-te Wurzel** von a sucht diejenige Zahl b, die hoch n den Term a ergibt:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{ist gleichbedeutend mit} \quad b^n = a$$

Die **Quadratwurzel** von a ist der am häufigsten verwendete Spezialfall, der diejenige Zahl b sucht, die hoch 2 (oder zum Quadrat) den Term a ergibt. Zur Vereinfachung wird die 2 über der Wurzel meistens weggelassen ($\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$).

Die Potenzregel (g) gibt damit auch den rationalen Zahlen in der Potenz, also allen Zahlen, die als Bruch darstellbar sind, eine intuitive Bedeutung. Betrachten wir als Beispiel:

$$4^{2,5} = 4^{\frac{5}{2}} = \left(4^5\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^5} = \sqrt{4^5} = 32$$

Mit einem Bruch in der Potenz kann also immer mit dem jeweiligen Nenner die entsprechende Wurzel gezogen werden.

Aber auch irrationale Zahlen, also Zahlen, die durch eine unendliche Anzahl an nicht-periodischen Nachkommastellen gekennzeichnet sind, können im Exponenten einer Potenz stehen. Da diese Zahlen nicht als Bruch ausgedrückt werden können, ist eine ähnlich intuitive Erklärung wie bei den rationalen Exponenten nicht verfügbar. Mathematisch ist es jedoch möglich, die Existenz dieser Potenzausdrücke mit reellen Zahlen mittels beliebig genauer Annäherung durch rationale Zahlen zu beweisen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir hier jedoch auf diesen Beweis und verweisen auf die Literaturhinweise am Ende des Kapitels.

Beispiele

- $7^4 \cdot 7^3 \cdot 7^{-2} = 7^{4+3-2} = 7^5$
- $7^3 \cdot 2^3 = 14^3$
- $\dfrac{2^3 \cdot 2^{-2}}{2^{-4} \cdot 2^5} = 2^{3-2+4-5} = 2^0 = 1$
- $\left(x^4 y^{-3}\right)^2 = \left(x^4\right)^2 \left(y^{-3}\right)^2 = x^8 y^{-6}$
- $\dfrac{4^{0,5}}{2^{0,5}} = \left(\dfrac{4}{2}\right)^{0,5} = \sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{2^6} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 4$
- $\sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[8]{x^4} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(x^4\right)^{\frac{1}{8}} = x^{2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot x^{4 \cdot \frac{1}{8}} = x^{0,5} \cdot x^{0,5} = x^1 = x$
- $\sqrt[7]{x^2} \cdot \sqrt[7]{x^5} = \sqrt[7]{x^2 \cdot x^5} = \sqrt[7]{x^7} = x$

Aufgaben

1.6 Berechnen Sie die folgenden Potenzausdrücke unter Verwendung der Potenzregeln (bitte ohne Taschenrechner).

(a) $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$;

(b) $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4^{-6}$;

(c) $5^7 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 2^{17} \cdot 2^{-19} \cdot 5^{-10}$;

(d) $2^{-4} \cdot 3^4 \cdot 7^3 \cdot 2^5 \cdot 3^{-3} \cdot 7^{-2}$;

(e) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 2^3 \cdot 3^2$;

(f) $3^{1,5} \cdot 3^{0,2} \cdot 3^{0,3} \cdot \sqrt{3} \cdot 3^{-3,5}$;

(g) $7^{\frac{1}{10}} \cdot 7^{-0,4} \cdot 7^{\frac{3}{2}} \cdot 7^{-0,2}$;

(h) $\dfrac{5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{9}{10}}}{5^{\frac{6}{5}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{5}{6}} \cdot 5^{-2}}$;

(i) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{8}} \cdot x^{-\frac{4}{3}} \cdot y^{\frac{1}{8}}}{x^{-0,4} \cdot y^{-0,25} \cdot x^{-0,6} \cdot y^{-0,5} \cdot x^{-1}}$;

(j) $\left(3^2 2^2\right)^{0,5}$;

(k) $7^3 \cdot (1/7)^3$;

(l) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$;

(m) $\left(16x^8\right)^{0,25}$;

(n) $\left(16x^8y^4\right)^{0,5} \cdot \left(4x^4y\right)^{-1}$;

(o) $\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[12]{2^{-1}}$;

(p) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{7^{15}}}$;

(q) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$;

(r) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[5]{y^3}\right)^{-2}}{\left(\sqrt[3]{x^{-2}} \cdot y^{\frac{-6}{25}}\right)^5}$;

(s) $\dfrac{\left(4x^2y^3\right)^{-2}\left(2x^2y^3\right)^4}{\left(8x^4y^4\right)^3\left(16x^3y^2\right)^{-3}}$;

(t) $\left(3x^3y^5\right)^{-3}\left(3x^{-2}y^{-2}\right)^{-2}\left(3xy^2\right)^6$;

(u) $\sqrt[3]{2xy^4}\sqrt[3]{4x^2y^{-1}}$;

(v) $\sqrt{3x^3y^2}\sqrt[3]{3x^4y^{-5}}\sqrt[6]{3xy^4}$.

Lösungen

1.6 (a) 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; (b) $4^{3+4-6} = 4^1 = 4$; (c) $5^{7+3-10} \cdot 2^{3+17-19} = 2$;
(d) $2^{-4+5} \cdot 3^{4-3} \cdot 7^{3-2} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$; (e) $2^{3-2-3+3} \cdot 3^{2-3+2} = 6$; (f) $3^{1,5+0,2+0,3+0,5-3,5} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$;
(g) $7^{0,1-0,4+1,5-0,2} = 7$; (h) $5^{\frac{15-12+20-27}{30}} \div 5^{\frac{36-15-25-60}{30}} = 5^{\frac{4}{30}-\frac{-64}{30}} = 5^2 = 25$; (i) $\frac{x^{-1} \cdot y^{0,25}}{x^{-2}y^{-0,75}} = xy$;
(j) $\left(3^2\right)^{0,5} \cdot \left(2^2\right)^{0,5} = 3^{2 \cdot 0,5} \cdot 2^{2 \cdot 0,5} = 6$; (k) $7^3 \cdot \left(1^3/7^3\right) = 1$; (l) $\sqrt{2 \cdot 8} = 4$; (m) $16^{\frac{1}{4}}x^{8 \cdot 0,25} = 2x^2$;
(n) $16^{0,5} \cdot x^{8 \cdot 0,5} \cdot y^{4 \cdot 0,5} \cdot 4^{-1}x^{-4}y^{-1} = y$; (o) $\left(2^4\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^3\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(2^{-1}\right)^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{16}{12}+\frac{9}{12}-\frac{1}{12}} = 2^2 = 4$;
(p) $\left(\left(7^{15}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 7^{15 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = 7$; (q) $\left(\frac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$; (r) $\dfrac{\left(x^{\frac{5}{3}} \cdot y^{\frac{3}{5}}\right)^{-2}}{\left(x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{6}{25}}\right)^5} = \dfrac{x^{-\frac{10}{3}} \cdot y^{-\frac{6}{5}}}{x^{-\frac{10}{3}} \cdot y^{-\frac{30}{25}}} = 1$;
(s) $\dfrac{4^{-2}x^{-4}y^{-6}2^4x^8y^{12}}{8^3x^{12}y^{12}16^{-3}x^{-9}y^{-6}} = 8x$; (t) $3^{-3}x^{-9}y^{-15}3^{-2}x^4y^43^6x^6y^{12} = 3xy$; (u) $\sqrt[3]{8x^3y^3} = 2xy$;
(v) $3^{0,5}x^{1,5}y^1 3^{\frac{1}{3}}x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{5}{3}}3^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{4}{6}} = 3^{0,5+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}x^{1,5+\frac{4}{3}+\frac{1}{6}}y^{1-\frac{5}{3}+\frac{4}{6}} = 3x^3$.

Logarithmen

Der **Logarithmus** von a zur Basis b (mit $a > 0$, $b > 0$) sucht denjenigen Exponenten x, für den $b^x = a$ gilt:

$$\log_b a = x \quad \text{ist gleichbedeutend mit} \quad b^x = a$$

Der Logarithmus ordnet damit jeder Kombination von Zahlen a und b genau einen Wert zu, den man sich folgendermaßen merken kann:

$$\log_b a \text{ beantwortet: } b \textit{ hoch wieviel ergibt } a?$$

Zur Vereinfachung ist es üblich, den Logarithmus zur Basis 10 mit lg und den Logarithmus zur Basis der Eulerschen Zahl e, den **natürlichen Logarithmus**, mit ln abzukürzen:

- $\lg = \log_{10}$
- $\ln = \log_e$ mit $e = 2{,}71828\ldots$

Wenn Sie sich über die *krumme* Zahl e wundern, die so eine wichtige Rolle als Basis des Logarithmus spielt: Wir werden im Kapitel 2 auf der Seite 42 klären, wo diese Zahl herkommt.

Bevor elektronische Rechenmaschinen wie zum Beispiel Taschenrechner generell verfügbar waren, wurden umfangreiche Multiplikationen und auch das Ziehen von Wurzeln mit Hilfe des Logarithmus, seiner Rechenregeln und sogenannten Logarithmentafeln durchgeführt. Heutzutage fristet der Logarithmus eher ein Schattendasein und findet in den Wirtschaftswissenschaften nur noch selten Anwendung. Allerdings gibt es in der Finanzmathematik und im Zusammenhang mit Wachstumsprozessen einige sehr zentrale Fragestellungen, die den Logarithmus und seine Gesetze erfordern. Aus diesem Grund werden hier drei wichtige **Rechenregeln** für den Umgang mit dem Logarithmus vorgestellt:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(a)} & \log_b(x \cdot y) & = & \log_b x + \log_b y \\ \text{(b)} & \log_b(x/y) & = & \log_b x - \log_b y \\ \text{(c)} & \log_b(x^y) & = & y \cdot \log_b x \end{array}$$

Stellen Sie sich einmal die Frage „9 hoch wieviel ist 243?“ vor. Eine direkte Anwendung der Definition des Logarithmus ergibt mit Hilfe eines Taschenrechners:

$$\log_9 243 = 2{,}5$$

Mit Hilfe der Regel (a) wären auch folgende Umformungen möglich:

$$\log_9 243 = \log_9 3 \cdot 81 = \log_9 3 + \log_9 81 = 0{,}5 + 2 = 2{,}5$$

Auf fast jedem Taschenrechner gibt es eine Taste für den natürlichen Logarithmus ln. Mit Hilfe der Regel (c) kann die Gleichung dann folgendermaßen aufgelöst und ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned} 9^x &= 243 \\ \ln(9^x) &= \ln 243 \\ x \cdot \ln 9 &= \ln 243 \\ x &= \frac{\ln 243}{\ln 9} = 2{,}5 \end{aligned}$$

Beispiele

- $\log_2 16 = 4$, da $2^4 = 16$
- $\lg 1.000 = \log_{10} 1.000 = 3$, da $10^3 = 1.000$
- $\ln 10 = \log_e 10 = 2{,}303$, da $2{,}718^{2{,}303} = 10$
- $1{,}2^x = 3$, also $\ln(1{,}2^x) = \ln 3$, also $x \cdot \ln(1{,}2) = \ln 3$ und damit $x = \dfrac{\ln 3}{\ln(1{,}2)} \approx 6{,}03$
- $1{,}5^x = 7$, also $x = \log_{1{,}5} 7 \approx 4{,}80$

Aufgaben

1.7 Berechnen Sie mit Hilfe der Logarithmusregeln und ohne Taschenrechner:
(a) $\log_2 (16 \cdot 8)$; (b) $\log_3 (27 \cdot 9)$; (c) $\log_4 (16 \cdot 2)$; (d) $\log_{16} 2$; (e) $\log_9 27$.

1.8 Berechnen Sie mit Hilfe der Logarithmusregeln und mit Taschenrechner:
(a) $1{,}1^x = 3$; (b) $1{,}01^x = 2$; (c) $1{,}05^x = 5$; (d) $10^x = 2$; (e) $2^x = 1024$.

Lösungen

1.7 (a) $\log_2 16 + \log_2 8 = 4 + 3 = 7$; (b) $\log_3 27 + \log_3 9 = 3 + 2 = 5$;
(c) $\log_4 16 + \log_4 2 = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$; (d) $\frac{1}{4} = 0{,}25$; (e) $\log_9 9 + \log_9 3 = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$.

1.8 (a) $x = \log_{1{,}1} 3$ (oder $= \frac{\ln 3}{\ln 1{,}1}$) $\approx 11{,}53$; (b) $x = \log_{1{,}01} 2$ (oder $= \frac{\ln 2}{\ln 1{,}01}$) $\approx 69{,}66$;
(c) $x = \log_{1{,}05} 5$ (oder $= \frac{\ln 5}{\ln 1{,}05}$) $\approx 32{,}99$; (d) $x = \log_{10} 2$ (oder $= \frac{\ln 2}{\ln 10}$) $\approx 0{,}30$;
(e) $x = \log_2 1024$ (oder $= \frac{\ln 1024}{\ln 2}$) $= 10$.

1.5 Gleichungen und Ungleichungen

Eine **Gleichung** behauptet, dass zwei Ausdrücke ganz einfach *gleich* sind. Mathematisch wird diese Aussage durch ein Gleichheitszeichen zwischen den beiden Ausdrücken dargestellt. Weiterhin ist eine Gleichung durch eine unbekannte Variable, zum Beispiel x, charakterisiert, für die ein Wert gesucht wird, der die Gleichung löst beziehungsweise erfüllt.

Die Umformungen der Gleichungen unterliegen dabei folgenden Grundprinzipien. Erstens, wenn beide Seiten der Gleichung derselben mathematischen Operation unterzogen werden, dann ändert sich die Gleichheitsaussage im Allgemeinen nicht. Zweitens erfolgen die Umformungen mit dem Ziel, am Ende das Ergebnis für x, nämlich einen Ausdruck der Form „$x =$ Zahl“ stehen zu haben. Hierfür ist es häufig notwendig, bestimmte Terme, die auf der gleichen Seite wie x stehen, auf die andere Seite der Gleichung zu bringen. Dieser Schritt erfolgt fast immer mit der sogenannten **Umkehroperation**. Steht auf einer Seite $+6$, dann ist die Umkehroperation hierzu -6, zu $\cdot$ ist die Umkehroperation $\div$. Die Tabelle 1.1 fasst diese und weitere Umkehroperationen zusammen.

Die sogenannten **Äquivalenzumformungen** Addition, Subtraktion, Multiplikation (mit einer reellen Zahl ungleich 0) und Division (durch eine reelle Zahl ungleich 0) lassen die Lösungen der jeweiligen Gleichung unverändert. Das Zeichen $\Leftrightarrow$ wird häufig verwendet, um die Äquivalenz zweier mathematischer Ausdrücke oder Gleichungen auszudrücken, das Zeichen $\Rightarrow$ zeigt an, dass ein Ausdruck aus einem anderen folgt (vgl. ausführlich den Abschnitt 7.1.3).

Tabelle 1.1 Umkehroperationen

Operation	$+$	$-$	$\cdot$	$\div$	hoch a	$\log_a x$	a^x
Umkehroperation	$-$	$+$	$\div$	$\cdot$	hoch $\frac{1}{a}$	$a^{\log_a x}$	$\log_a a^x$

Lineare Gleichungen

Eine vergleichsweise einfache Klasse sind die **linearen Gleichungen**, in denen die gesuchte Variable ohne kompliziertere Beziehungen wie Potenzen, Wurzeln und dergleichen auf den beiden Seiten der Gleichung erscheint. Beispielsweise wird durch die lineare Gleichung

$$\frac{4x+6}{2} = 4x - 3$$

die Gleichheit der Ausdrücke $\frac{4x+6}{2}$ und $4x-3$ behauptet. x ist die unbekannte Variable, für die ein Wert gesucht wird, der die Gleichung erfüllt. Diese Suche erfolgt mittels geeigneter Umformungen der Gleichung, bis das Ergebnis für x gefunden ist. Zur besseren Nachvollziehbarkeit wird die auszuführende Umformung hinter die jeweilige Gleichung geschrieben:

$$\begin{aligned}
\frac{4x+6}{2} &= 4x-3 && \mid \cdot 2\\
4x+6 &= (4x-3)\cdot 2 &&\\
4x+6 &= 8x-6 && \mid -4x\\
6 &= 4x-6 && \mid +6\\
12 &= 4x && \mid \div 4\\
x &= 3 && \mid \text{Lösung}
\end{aligned}$$

Grundsätzlich gibt es keine falschen Umformungen, da durch die Äquivalenz die Gleichheitsaussage ja immer bestehen bleibt – zumindest, solange keine Rechenfehler erfolgen. Allerdings sind gewisse Umformungen nicht zielführend, um am Ende ein Ergebnis für die unbekannte Variable zu erhalten. Als allgemeine Richtlinie ist hilfreich, wenn der Ausdruck, der die gesuchte Variable enthält, **von außen nach innen** aufgelöst wird.

Aufgaben

1.9 Lösen Sie die Gleichungen mit Hilfe von Äquivalenzumformungen:

(a) $5x-3=17$; (b) $7-2x=19$; (c) $\frac{3x-4}{7} = 8-x$;

(d) $\frac{3-5x}{2} = 5x+9$; (e) $\frac{3-5x}{-4} = \frac{3x-3}{2}$; (f) $\frac{6-5x}{4x} = -\frac{1}{2}$;

(g) $\frac{5}{2x} = \frac{2}{x-1}$; (h) $\frac{8-3x}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{6} - \frac{9x}{12}$; (i) $\frac{7-x}{x+5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{18}{3}$.

Lösungen

1.9 (a) $5x = 20 \iff x = 4$; (b) $-2x = 12 \iff x = -6$;
(c) $3x - 4 = 56 - 7x \iff 10x = 60 \iff x = 6$;
(d) $3 - 5x = 10x + 18 \iff -15 = 15x \iff x = -1$;
(e) $3 - 5x = \dfrac{3x-3}{2} \cdot (-4) \iff 3 - 5x = -6x + 6 \iff x = 3$;
(f) $6 - 5x = -\frac{1}{2} \cdot 4x \iff 6 = 3x \iff x = 2$; (g) $5 = \frac{2 \cdot 2x}{x-1} \iff 5(x-1) = 4x \iff x = 5$;
(h) $\dfrac{8-3x}{5} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3x}{4} \iff \dfrac{(8-3x)\cdot 4}{20} + \dfrac{3x \cdot 5}{20} = 1 \iff 32 - 12x + 15x = 20 \iff x = -4$;
(i) $\dfrac{7-x}{x+5} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \iff \dfrac{7-x}{x+5} = 1 \iff 7 - x = x + 5 \iff x = 1$.

Lineare Ungleichungen

Eine **lineare Ungleichung** setzt zwei lineare Ausdrücke derart miteinander in Beziehung, dass der Ausdruck auf der linken Seite kleiner ($<$), kleiner oder gleich ($\leqq$), größer ($>$) oder größer oder gleich ($\geqq$) dem Ausdruck auf der rechten Seite sein soll. Meistens ist auf beiden Seiten eine unbekannte Variable x in dem Ausdruck enthalten, und die interessierende Fragestellung ist, welche Werte x annehmen darf, damit die Ungleichung erfüllt ist.

Die Lösung derartiger Fragestellungen erfolgt auf dem gleichen Weg wie bei linearen Gleichungen, das heißt, durch Äquivalenzumformungen wird die unbekannte Variable x auf die eine Seite der Ungleichung gebracht, so dass dann das Lösungsintervall direkt abgelesen werden kann.

Wichtig bei Ungleichungen ist, dass immer, wenn die Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder dividiert wird, das Ungleichheitszeichen seine Richtung umkehrt:

$$\begin{array}{rcll} -4x & < & 8 & \mid \cdot (-\frac{1}{4}) \\ x & > & -2 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge beinhaltet in diesem Beispiel also alle x für die gilt $x > -2$.

Etwas problematischer ist es, wenn im Rahmen der Umformung mit der Variablen x multipliziert oder dividiert wird, gleichzeitig aber noch unbekannt ist, ob diese Variable positive oder negative Werte annimmt. In diesen Situationen müssen die alternativen Fälle im Rahmen einer **Fallunterscheidung** separat diskutiert werden. Betrachten wir hierzu folgendes Beispiel:

$$\frac{x-2}{x+4} \leqq 3$$

Um diese Ungleichung nach x aufzulösen, wollen wir im ersten Schritt beide Seiten mit $x + 4$ multiplizieren. Hieraus ergeben sich zwei Fälle: Fall 1 beinhaltet, dass $x + 4 > 0$ ist, was äquivalent ist zu der Aussage $x > -4$. Die Alternative ist Fall 2, $x + 4 < 0$, was äquivalent ist zu der Aussage $x < -4$. Für $x = -4$ ist die Gleichung **nicht definiert**, da der Nenner in diesem Fall unzulässigerweise 0 wäre.

Für diese beiden Fälle kann die Ungleichung nun mittels Umformungen gelöst werden.

Fall 1, $x > -4$:

$$\begin{array}{rcll} x-2 & \leqq & 3\cdot(x+4) & \\ x-2 & \leqq & 3x+12 & |-3x+2 \\ -2x & \leqq & 14 & |\div(-2) \\ x & \geqq & -7 & \end{array}$$

Lösung: $x > -4$

Fall 2, $x < -4$:

$$\begin{array}{rcll} x-2 & \geqq & 3\cdot(x+4) & \\ x-2 & \geqq & 3x+12 & |-3x+2 \\ -2x & \geqq & 14 & |\div(-2) \\ x & \leqq & -7 & \end{array}$$

Lösung: $x \leqq -7$

Lösungsmenge: $L = \{x \in R \,|\, x > -4 \text{ oder } x \leqq -7\}$

Jetzt müssen die Ergebnisse dieser Fälle nur noch zusammengeführt werden: Im Fall 1 müssen zwei Bedingungen gleichzeitig gelten, nämlich die des Falles $x > -4$ **und** das Ergebnis $x \geqq -7$. Das gemeinsame Intervall dieser beiden Bedingungen ist $x > -4$, denn dann ist auch $x \geqq -7$. Im Fall 2 verhält es sich ähnlich, das gemeinsame Intervall der beiden Bedingungen ist $x \leqq -7$, dann dann gilt auch $x < -4$. Zusammengefasst ist die Lösungsmenge der Ungleichung also $L = \{x \in R \,|\, x > -4 \text{ oder } x \leqq -7\}$.

Beispiele

■
$$\begin{array}{rcll} 4(x-3) & \leqq & 3(x+2) & \\ 4x-12 & \leqq & 3x+6 & |-3x+12 \\ x & \leqq & 18 & |L = \{x \in R \,|\, x \leqq 18\} \end{array}$$

■ $\dfrac{x-5}{x+2} \geqq 1 \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{Fall 1, } x > -2: & x-5 \geqq x+2 \Leftrightarrow 0 \geqq 7: \quad \text{keine Lösung} \\ \text{Fall 2, } x < -2: & x-5 \leqq x+2 \Leftrightarrow 0 \leqq 7: \quad x < -2 \end{array} \Big\} \; x < -2$

■ $\dfrac{x-3}{x+1} \geqq 2 \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{Fall 1, } x > -1: & x-3 \geqq 2x+2 \Leftrightarrow x \leqq -5: \quad \text{keine Lösung} \\ \text{Fall 2, } x < -1: & x-3 \leqq 2x+2 \Leftrightarrow x \geqq -5: \quad -5 \leqq x < -1 \end{array} \Big\} \; -5 \leqq x < -1$

Aufgaben

1.10 Berechnen Sie die Lösungsintervalle für die folgenden Ungleichungen:
(a) $\dfrac{x+3}{4} > 5$; (b) $\dfrac{x-7}{2} \leqq 3$; (c) $\dfrac{3-x}{-4} \leqq -6$; (d) $\dfrac{10-x}{x-4} \geqq 1$; (e) $\dfrac{5+x}{4-x} < 2$;
(f) $\dfrac{x}{-3} \leqq \dfrac{2x-4}{-2}$; (g) $\dfrac{6x-6}{3x+6} \leqq 5$; (h) $\dfrac{3-x}{x-3} \geqq 1$; (i) $\dfrac{8-2x}{2x-8} \leqq 1$; (j) $\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{4-x}$.

Lösungen

1.10 (a) $x+3 > 20 \Longleftrightarrow x > 17$; (b) $x \leqq 13$; (c) $3-x \geqq 24 \Longleftrightarrow -x \geqq 21 \Longleftrightarrow x \leqq -21$;
(d) Fall 1, $x > 4: 10-x \geqq x-4 \Longleftrightarrow x \leqq 7$, also $4 < x \leqq 7$; Fall 2, $x < 4: 10-x \leqq x-4 \Longleftrightarrow x \geqq 7$, also keine Lösung; Gesamtergebnis (Fall 1 und 2): $4 < x \leqq 7$;
(e) $x < 1$ oder $x > 4$; (f) $x \leqq 3$; (g) $x \leqq -4$ oder $x > -2$;
(h) keine Lösung; (i) $x \in R \setminus \{4\}$; (j) $0 < x \leqq 2$ oder $x > 4$.

Dreisatz

Der **Dreisatz** ist eine Rechenmethode, die Verhältnisse verknüpft, die logisch zueinander in Beziehung stehen. Kostet beispielweise ein Buch 10 €, dann werden fünf Bücher 50 € kosten. Als Gleichung schreibt sich diese Beziehung folgendermaßen:

$$\frac{10\,€}{1\text{ Buch}} = \frac{50\,€}{5\text{ Bücher}}$$

Hier wird unterstellt, dass jedes Buch den gleichen Preis hat. Zwischen der Anzahl von Büchern und den gesamten Kosten dieser Anzahl besteht dann eine **proportionale Beziehung**: Gesamte Kosten = Preis pro Stück · Anzahl der Bücher. Der **Dreisatz** ist eine Rechenmethode für derartige proportionale Beziehungen. Wenn eine Maschine beispielsweise 12 Teile in 2 Stunden produziert, kann mittels des Dreisatzes berechnet werden, wie viel Zeit x die Maschine zur Herstellung von 54 Teilen benötigt. Hierzu werden die Verhältnisse mittels einer Gleichung in eine logische Beziehung gesetzt, um anschließend nach der gesuchten Variablen aufzulösen:

$$\frac{12\text{ Teile}}{2\text{ Stunden}} = \frac{54\text{ Teile}}{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{54\text{ Teile}}{12\text{ Teile}} \cdot 2\text{ Stunden} = 9\text{ Stunden}$$

Die Bezeichnung „Dreisatz“ erklärt sich wie folgt: 1. Satz: Eine Maschine schafft 12 Teile in 2 Stunden. 2. Satz: Dann schafft eine Maschine 1 Teil in $2/12$ Stunden. 3. Satz: Daher schafft die Maschine 54 Teile in $54 \cdot 2/12 = 9$ Stunden. Die beschriebene Methode mit den Verhältnissen lässt sich praktisch schneller durchführen.

Aufgaben

1.11 (a) In einem Restaurant bedienen 2 Kellner zusammen 14 Tische. Wie viele Kellner benötigt das Restaurant, wenn im Rahmen einer Erweiterung die Kapazität auf 35 Tische erhöht wird?

(b) Ein Auto verbraucht 8 l Benzin auf 100 km. Wie viel Benzin wird für eine Fahrt von 87,5 km benötigt?

(c) Mit 4 Maschinen werden pro Monat 44 Teile produziert. Wie viele Teile können 9 Maschinen pro Monat produzieren?

(d) Wie viel kosten 4 Kilo Mehl, wenn 1 Pfund 50 ct kostet?

Lösungen

1.11 (a) $x = 2/14 \cdot 35 = 5$; (b) $x = 8/100 \cdot 87{,}5 = 7$; (c) $x = 9 \cdot 44/4 = 99$;
(d) $x = 50\text{ct}/0{,}5 \cdot 4 = 4\,€$.

Nichtlineare Gleichungen

Immer dann, wenn die unbekannte Variable in Gleichungen durch Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und weitere funktionale Beziehungen beschrieben wird, sprechen wir von **nichtlinearen Gleichungen**. Das Auflösen dieser nichtlinearen Gleichungen nach der unbekannten Variablen gestaltet sich fast immer anspruchsvoller als bei linearen Gleichungen, häufig sind diese Gleichungen sogar nur numerisch, das heißt mit rechnergestützten Suchverfahren lösbar, auf die wir erst später im Abschnitt 7.3 kurz eingehen werden.

Stattdessen konzentrieren wir uns hier auf einige generelle Ansätze, wie das Auflösen von Gleichungen, die Potenzen, Wurzeln und Logarithmen enthalten, funktionieren kann. Betrachten wir hierzu beispielhaft die folgende einfache Potenzgleichung:

$$\begin{aligned} x^6 &= 64 && |()^{\frac{1}{6}} \\ (x^6)^{\frac{1}{6}} &= 64^{\frac{1}{6}} && \\ x &= 64^{\frac{1}{6}} = 2 && |\text{Lösung} \end{aligned}$$

Sofern x in der Basis eines Potenzausdrucks steht, ist eine Auflösung nach x möglich, wenn mit dem Kehrwert des Ausgangsexponenten potenziert wird. Die Gleichung $x^a = b$ wird damit folgendermaßen nach x aufgelöst:

$$x = (x^a)^{\frac{1}{a}} = b^{\frac{1}{a}}$$

Dieses Verfahren gilt für alle Potenzausdrücke, also auch reelle Zahlen im Exponenten. Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, werden damit auch Wurzeln erfasst.

In manchen Fällen werden bei nichtlinearen Gleichungen mittels der Umformungen sogenannte **Scheinlösungen** berechnet. Betrachten wir beispielhaft die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= -2 && |()^2 \\ x &= (-2)^2 = 4 && |\text{Scheinlösung, da } \sqrt{4} = 2 \neq -2 \end{aligned}$$

Ursache für das Auftreten dieser Scheinlösung ist, dass das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist. Wenn man solche Umformungen vornimmt, muss deshalb immer geprüft werden, ob die gefundene Lösung tatsächlich eine Lösung der ursprünglichen Gleichung ist. Die Probe ist daher fester Bestandteil der Lösung von Wurzelgleichungen. Um sicherzugehen, sollten Sie bei nichtlinearen Gleichungen immer eine Probe vornehmen, um Scheinlösungen gegebenenfalls auszuschließen.

Beispiele

- $x^3 = 10 \iff x = 10^{\frac{1}{3}}$
- $x^{-4} = 10 \iff x = 10^{-\frac{1}{4}}$
- $x^{\frac{2}{3}} = 10 \iff x = 10^{\frac{3}{2}}$
- $\sqrt{x} = 10 \iff x = 10^2$
- $\sqrt[4]{x} = 10 \iff x = 10^4$
- $(x-2)^4 = 10 \iff x = 10^{\frac{1}{4}} + 2$
- $\sqrt[3]{x+7} = 10 \iff x = 10^3 - 7$
- $\sqrt{x-2} = -10 \iff x = 102$ ist Scheinlösung

Aufgaben

1.12 Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf (Berechnung gegebenenfalls mit Taschenrechner).

(a) $x^{12} = 4^6$; (b) $x^5 = 2^{10}$; (c) $\dfrac{x^3+6}{7} - 2 = 8$;

(d) $\dfrac{\sqrt{x+4}-10}{7} + 1 = 0$; (e) $\dfrac{(x-3)^4-3}{9} = \dfrac{26}{3}$; (f) $x + 4 = \dfrac{8+4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

(g) $(1+x)^6 = 3$; (h) $\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12} = 3$; (i) $\left(1+\frac{4x}{5}\right)^{-3} = 2$.

Lösungen

1.12 (a) $x = \left(4^6\right)^{\frac{1}{12}} \iff x = 4^{\frac{1}{2}} = 2$; (b) $x = 4$; (c) $x = 4$; (d) $(x+4)^{\frac{1}{2}} - 10 = -7 \iff (x+4)^{\frac{1}{2}} = 3$ $\iff x + 4 = 3^2 \iff x = 5$; (e) $x = 6$; (f) $x = 4$; (g) $x \approx 0{,}20$; (h) $x \approx 1{,}15$; (i) $x \approx -0{,}26$.

Bei einem weiteren Typ von nichtlinearen Gleichungen befindet sich die gesuchte Variable im Exponenten des Potenzausdrucks oder im Logarithmus. Da Potenz und Logarithmus die jeweiligen Umkehroperationen zueinander sind, erfolgt eine Auflösung der Gleichungen genau mit diesen Rechenoperationen, wobei auch der natürliche Logarithmus verwendet werden kann. Im Abschnitt 1.4 ist dieses Verfahren bereits beschrieben worden.

Beispiele

- $3^x = 81 \iff x = \log_3 81 \left(\overset{\text{oder}}{=} \frac{\ln 81}{\ln 3} = \frac{\ln 3^4}{\ln 3} = \frac{4 \cdot \ln 3}{\ln 3}\right) = 4$
- $1{,}03^x = 2 \iff x = \log_{1{,}03} 2 \left(\overset{\text{oder}}{=} \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03}\right) \approx 23{,}45$
- $2^{x+5} = 8 \iff x = \log_2 8 - 5 \left(\overset{\text{oder}}{=} \frac{\ln 8}{\ln 2} - 5 = \frac{\ln 2^3}{\ln 2} - 5 = \frac{3 \cdot \ln 2}{\ln 2} - 5\right) = -2$
- $\log_3 x = 4 \iff 3^{\log_3 x} = 3^4 \iff x = 3^4 = 81$
- $\ln x = 4 \iff e^{\ln x} = e^4 \iff x = e^4 \approx 54{,}60$

Aufgaben

1.13 Lösen Sie die Gleichungen durch geeignete Umformungen und gegebenenfalls mit Hilfe des Taschenrechners:

(a) $4^x = 128$; (b) $7^x = 8$; (c) $1{,}05^x = 3$; (d) $1{,}01^x = 1{,}3$;

(e) $2^{x-4} = 4^8$; (f) $1{,}04^{2x+5} = 3$; (g) $1{,}06^{0{,}2-3x} = 4$; (h) $\log_5 x = 3$;

(i) $\log_2 (x-3) = 4$; (j) $\ln x = 1{,}5$; (k) $\ln (x^5) = 1$; (l) $\log_3 (x^{1{,}5}) = 6$.

Lösungen

1.13 (a) $x = \frac{\ln 128}{\ln 4} = 3{,}5$; (b) $x = \frac{\ln 8}{\ln 7} \approx 1{,}07$; (c) $x = \frac{\ln 3}{\ln 1{,}05} \approx 22{,}52$; (d) $x = \frac{\ln 1{,}3}{\ln 1{,}01} \approx 26{,}37$;
(e) $x - 4 = \frac{\ln 4^8}{\ln 2} = \frac{8 \cdot \ln 4}{\ln 2} = \frac{8 \cdot 2 \cdot \ln 2}{\ln 2} \iff x = 16 + 4 = 20$; (f) $x = \left(\frac{\ln 3}{\ln 1{,}04} - 5\right) \div 2 \approx 11{,}51$;
(g) $x = \left(\frac{\ln 4}{\ln 1{,}06} - 0{,}2\right) \div (-3) \approx -7{,}86$; (h) $x = 5^3 = 125$; (i) $x = 2^4 + 3 = 19$;
(j) $x = e^{1{,}5} \approx 4{,}48$; (k) $x = e^{0{,}2} \approx 1{,}22$; (l) $x = 3^{\frac{6}{1{,}5}} = 81$.

Binomische Formeln

Inhaltliche Grundlage der anschließenden Auflösung quadratischer Gleichungen sind die **binomischen Formeln**. Die binomischen Formeln beschreiben zwar nur das Ausklammern und Ausmultiplizieren dreier einfacher quadratischer Formeln, wie sie bereits im Abschnitt Grundrechenarten beschrieben wurden. Aufgrund der wiederkehrenden Anwendungen in den verschiedensten Teildisziplinen der Mathematik und Statistik bietet es sich zur schnellen Nutzung jedoch an, die Formeln auswendig zu können:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{a}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{b}$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{c}$$

Aufgaben

1.14 Berechnen und vereinfachen Sie mit Hilfe der binomischen Fomeln:

(a) $(x+y)^2 - (x-y)^2 - 4xy$; (b) $(s+t)^2 + (s-t)^2 - 2(s+t)(s-t)$;

(c) $(2s+3t)^2 - (3t-2s)^2 - 23st$; (d) $(4x+5y)^2 - (4x-5y)(4x+5y) - 40xy$;

(e) $\frac{8x^2 - 24xy + 18y^2}{4x^2 - 12xy + 9y^2}$; (f) $(\sqrt{xy} - 1)(-1 - \sqrt{xy})$; (g) $\frac{(x+y)^2}{x^2 - y^2} - \frac{x^2 - y^2}{(x-y)^2}$.

Lösungen

1.14 (a) $x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 - 4xy = 0$; (b) $4t^2$;
(c) st; (d) $50y^2$; (e) 2; (f) $1 - xy$; (g) $\frac{(x+y)(x+y)}{(x+y)(x-y)} - \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} - \frac{x+y}{x-y} = 0$.

Quadratische Gleichungen

Wenn die unbekannte Variable in einer Gleichung durch einen quadratischen Potenzausdruck beschrieben wird, zum Beispiel $-2x^2 + 12x - 10 = 0$, so sprechen wir von einer **quadratischen Gleichung**. Der erste Schritt der Lösung besteht in der Umformung in die sogenannte Normalform durch Division der Gleichung mit dem Koeffizienten von x^2, hier also mit -2:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Wird die quadratische Gleichung in die **Normalform**

$$x^2 + px + q = 0$$

umgestellt, können die Lösungen sofort mit der **p-q-Formel** berechnet werden:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Für unser Beispiel $x^2 - 6x + 5 = 0$ können nun die Konstanten $p = -6$ und $q = 5$ direkt abgelesen und für die Lösung mit Hilfe der p-q-Formel genutzt werden:

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 5}; \qquad \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 5$$

Beim Einsetzen der Konstanten p und q sollte immer genau auf die Vorzeichen geachtet werden, da dies eine häufige Fehlerquelle bei der Berechnung der Lösungen ist.

Nicht alle quadratischen Gleichungen haben zwei Lösungen. Wenn der Wurzelausdruck in der p-q-Formel 0 ist, verschmelzen die beiden Lösungen zu einer. Falls der Term unter der Wurzel negativ ist, kann die Wurzel natürlich nicht gezogen werden, und es existiert keine Lösung. Nur im Falle eines positiven Terms unter der Wurzel existieren zwei unterschiedliche Lösungen x_1 und x_2.

Die p-q-Formel kann man so beweisen: Weil nach der ersten binomischen Formel $(x + p/2)^2 = x^2 + px + (p/2)^2$ ist, wird die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ durch Subtraktion von q und Addition von $(p/2)^2$ auf beiden Seiten umgeformt in:

$$x^2 + px + (p/2)^2 = (p/2)^2 - q \quad \Longleftrightarrow \quad (x + p/2)^2 = (p/2)^2 - q$$

Zieht man nun die Wurzel auf beiden Seiten und bedenkt, dass das Quadrat von $-\sqrt{(p/2)^2 - q}$ gleich dem Quadrat von $\sqrt{(p/2)^2 - q}$ ist, weil das Minuszeichen beim Quadrieren zu Plus wird, so folgt $x + p/2 = \pm\sqrt{(p/2)^2 - q}$. Subtraktion von $p/2$ auf beiden Seiten ergibt die p-q-Formel. Dieser Beweis entspricht dem Verfahren der **quadratischen Ergänzung**, welches intuitiver aber aufwändiger als die p-q-Formel ist.

Eine quadratische Gleichung wird auch als **Polynomgleichung zweiten Grades** bezeichnet. Weitere Verfahren zur Lösung von Polynomgleichungen höheren Grades werden in den Abschnitten 4.3.2 und 7.3 dargestellt.

Beispiele

- $3x^2 - 24x = 27 \iff 3x^2 - 24x - 27 = 0 \iff x^2 - 8x - 9 = 0$
  $\Rightarrow p = -8;\ q = -9;\ x_1 = -1;\ x_2 = 9$
- $-x^2 - 8x - 16 = 0 \iff x^2 + 8x + 16 = 0 \Rightarrow p = 8;\ q = 16;\ x_1 = x_2 = -4$
- $17 - 16x^2 = -8 \iff x^2 - \frac{25}{16} = 0 \Rightarrow p = 0;\ q = -\frac{25}{16};\ x_1 = -\frac{5}{4};\ x_2 = \frac{5}{4}$
- $x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow p = 4;\ q = 5$; keine Lösung, da $\sqrt{-1}$ nicht definiert ist

Aufgaben

1.15 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen mit Hilfe der p-q-Formel:

(a) $x^2 - 6x + 8 = 0$; (b) $-3x^2 + 3x + 6 = 0$; (c) $-4x^2 - 8x + 15 = 3$;

(d) $10 - 10x - x^2 = 35$; (e) $2x - 2 - 0{,}5x^2 = 2$; (f) $4x^2 + 7 = 8$;

(g) $x^2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{12}x = \frac{1}{6}$; (h) $5 + x^2 = -(2x + 1)$; (i) $2x - \frac{1}{7}x^2 = 7$.

Lösungen

1.15 (a) $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; (b) $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; (c) $x_1 = -3$; $x_2 = 1$; (d) $x_1 = x_2 = -5$; (e) keine Lösung; (f) $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}$; (g) $x_1 = -\frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{3}$; (h) keine Lösung; (i) $x_1 = x_2 = 7$.

1.6 Prozentrechnung

Die **Prozentrechnung** beschäftigt sich mit der vergleichenden Beschreibung von Größenverhältnissen. Einfache Größenverhältnisse werden zum Beispiel durch „die Hälfte von“ oder „ein Drittel von“ beschrieben. Komplexere Verhältnisse hingegen, wie zum Beispiel $\frac{6}{25}$, werden ungern als Bruch verbalisiert, weil den meisten Menschen zumindest auf die Schnelle ein Gefühl für die Größenordnung fehlt. Stattdessen hat sich hier das Verhältnis zu 100 für viele als verständlich und vergleichbar entwickelt. Dieses Verhältnis zu 100 wird vereinfachend als **Prozent** oder **Prozentsatz** bezeichnet und durch das Prozentzeichen % abgekürzt:

$$x\% = \frac{x}{100}$$

Statt eines Bruchs kann der Prozentsatz alternativ auch als Dezimalzahl dargestellt werden, also zum Beispiel:

$$12\% = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

Der Begriff **Prozentpunkt** wird in diesem Zusammenhang genutzt, um auf den **absoluten Unterschied** zwischen zwei prozentualen Angaben aufmerksam zu machen. Verändert sich beispielsweise die Wachstumsrate von 12% auf 15%, entspricht dies einer Erhöhung um 3 Prozentpunkte. Kleinere Veränderungen können durch den Begriff **Basispunkt**, das ist der hundertste Teil eines Prozentpunktes, beschrieben werden.

Eine typische und einfache Frage in der Prozentrechnung lautet: „Wie viel sind 12% von 60 Gramm?“ Zur Beantwortung kann einfach der **Dreisatz** verwendet werden: Das Verhältnis von 12 zu 100 soll das gleiche sein wie das Verhältnis von x, unserer gesuchten Größe, zu 60 g. Als Gleichung formuliert, die nach x aufgelöst wird, ergibt sich:

$$\frac{12}{100} = \frac{x}{60\,\text{g}} \iff x = \frac{12}{100} \cdot 60\,\text{g} = 0{,}12 \cdot 60\,\text{g} = 7{,}2\,\text{g}$$

Die Ausgangsgröße, auf die sich der Prozentsatz (hier 12%) bezieht, wird auch als **Grundwert** (hier 60 g) bezeichnet. Der **Prozentwert** bezeichnet dann den entsprechenden Anteil vom Grundwert (hier 7,2 g).

Sehr häufig werden Veränderungen des Grundwertes im Zeitablauf, sogenannte **Wachstumsraten**, durch entsprechende Prozentwerte beschrieben. Bezeichnet x_{ALT} den Wert der Ausgangsperiode und x_{NEU} den Wert der Folgeperiode, dann ergibt sich die Wachstumsrate w durch:

$$w = \frac{x_{\text{NEU}} - x_{\text{ALT}}}{x_{\text{ALT}}}$$

Eine einfache Umformung der Gleichung ergibt, dass sich der neue Grundwert der Folgeperiode aus dem alten Grundwert zuzüglich der Wachstumsrate ergibt:

$$x_{\text{NEU}} = x_{\text{ALT}} \cdot (1 + w)$$

Insbesondere in der Zinsrechnung, aber auch bei vielen anderen Fragestellungen, die sich auf Veränderungen beziehen, spielt dieser Zusammenhang eine wichtige Rolle.

Verändert sich beispielsweise der Umsatz eines Unternehmens von 25 € auf 30 €, dann berechnet sich die Wachstumsrate gemäß:

$$w = \frac{30\,€ - 25\,€}{25\,€} = 0{,}2 = 20\%$$

Wächst der Umsatz anschließend nochmals um 10%, führt das in der zweiten Periode zu einem Gesamtumsatz von $30\,€ \cdot (1 + 10\%) = 33\,€$.

Beispiele

- Auf einen Nettobetrag von $x = 200\,€$ fallen 19% Mehrwertsteuer an. Wie hoch sind die Steuer y und der Bruttobetrag z?

  $\frac{y}{200\,€} = \frac{19}{100} \iff y = 0{,}19 \cdot 200\,€ = 38\,€;$
  $z = 200\,€ + 38\,€ = 200\,€ \cdot (1 + 19\%) = 238\,€$

- Der Bruttobetrag einer Zahlung beträgt 476 € bei einem Mehrwertsteuersatz von 19%. Wie hoch ist der Nettobetrag x?

  $476\,€ = x \cdot (1 + 19\%) \iff x = \frac{476\,€}{(1 + 19\%)} = 400\,€$

- Wie hoch sind Nettobetrag x und Bruttobetrag z, wenn die Mehrwertsteuer bei einem Steuersatz von 19% genau 9,50 € beträgt?

  $\frac{9{,}50\,€}{19\%} = \frac{x}{100\%} \iff x = \frac{9{,}50\,€ \cdot 100\%}{19\%} = 50\,€;$
  $z = 50\,€ \cdot (1 + 19\%) = 59{,}50\,€$

- Wie viel Zinsen ergeben sich, wenn ein Anlagebetrag von 500 € für eine Periode zu einem Zinssatz von 5% angelegt wird?

  $\frac{x}{500\,€} = 5\% \iff x = 500\,€ \cdot 5\% = 25\,€$

- Der Umsatz eines Unternehmens ist dieses Jahr um 20% auf 72 € gestiegen. Wie hoch war der Umsatz x im vergangenen Jahr?

  $72\,€ = x \cdot (1 + 20\%) \iff x = \frac{72\,€}{1 + 20\%} = 60\,€$

Aufgaben

1.16 (a) Wie viel sind 70% von 80?

(b) Der Umsatz eines Unternehmens hat sich von 150 auf 195 erhöht. Wie hoch ist die Wachstumsrate?

(c) Wie viel sind 8% von 750?

(d) Wie viel Mehrwertsteuer S von 19% fallen auf einen Nettobetrag von 20 € an?

(e) Wie viel Mehrwertsteuer S von 19% beinhaltet ein Bruttoverkaufspreis von 5,95 €?

(f) Wie hoch sind Nettopreis x und Bruttopreis z, wenn die Mehrwertsteuer bei einem Steuersatz von 19% genau 57 € beträgt?

(g) Wie hoch ist die Durchfallquote x, wenn 8 von 64 Studenten eine Klausur nicht bestehen?

Lösungen

1.16 (a) $x = 0{,}70 \cdot 80 = 56$; (b) $w = \frac{195-150}{150} = 30\%$; (c) $x = 0{,}08 \cdot 750 = 60$;
(d) $S = 0{,}19 \cdot 20\,€ = 3{,}80\,€$; (e) $S = 5{,}95\,€ \cdot 0{,}19/1{,}19 = 0{,}95\,€$;
(f) $x = 57\,€/0{,}19 = 300\,€$; $z = 1{,}19 \cdot 300\,€ = 357\,€$; (g) $x = 8/64 = 12{,}5\%$.

1.7 Summenzeichen

Das **Summenzeichen** dient der abkürzenden Schreibweise von Summen mit vielen Summanden. Statt der Auslassungspunkte wird der Gesamtausdruck durch den großen griechischen Buchstaben Sigma und weitere Variablen beschrieben:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n, \quad (i, m, n \in N,\ m \leqq n).$$

Hier ist i die sogenannte **Laufvariable**, die alle ganzen Zahlen zwischen m und n repräsentiert. Üblicherweise wird die kleinste Zahl dieser Zahlenmenge unter oder rechts unterhalb des Summenzeichens geschrieben, die größte Endzahl dieser Menge wird oberhalb oder rechts oberhalb des Summenzeichens geschrieben. Rechts hinter dem Summenzeichen steht dann ein Ausdruck, der die einzelnen Summanden beschreibt. Jeder dieser Summanden ergibt sich aus dem Einsetzen der verschiedenen Zahlen, die die Laufvariable annimmt. Nehmen wir beispielhaft die Summe:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{2i+1}{i} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1} + \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} + \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} + \frac{2 \cdot 4 + 1}{4}$$

Die Laufvariable nimmt hier die ganzen Zahlen von 1 bis 4 an. Diese Zahlen der Laufvariablen werden nun nacheinander in den Ausdruck hinter dem Summenzeichen eingesetzt, und dann werden diese Ausdrücke aufsummiert.

In der mathematischen **Statistik** werden häufig Daten addiert, zum Beispiel $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$ und $a_4 = 7$. Das **arithmetische Mittel** $\bar{a}$ ist zum Beispiel die Summe der Werte dividiert durch ihre Anzahl. Mit dem Summenzeichen können diese Operationen so dargestellt werden:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 4 + 3 + 6 + 7 = 20, \quad \bar{a} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} a_i = 4 + 3 + 6 + 7 = 5$$

Sie müssen hier die einzelnen Summanden nicht ausrechnen, weil sie als Daten vorliegen.

Die Summen können auch über eine unendliche Indexmenge definiert werden ($m = -\infty$ und/oder $n = \infty$). Grundsätzlich ist das Summenzeichen aber nur eine vereinfachte Schreibweise, so dass die bekannten Rechenregeln weiterhin ihre Gültigkeit besitzen und auf diese Schreibweise übertragen werden können.

Rechenregeln für das Summenzeichen

(a) $$\sum_{i=m}^{n} c = (n - m + 1)c$$

(b) $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(c) $$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

(d) $$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Fehlerquellen

Achten Sie bitte darauf, dass im Allgemeinen gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - c) \neq \sum_{i=1}^{n} a_i - c$$

Beispiele

Einige der Beispiele und Aufgaben können Sie einfacher unter Verwendung der nach dem deutschen Mathematiker Carl Gauß benannten **Gaußschen Summenformel** berechnen, die wir hier ohne Beweis angeben (vgl. dazu die S. 299):

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

- $\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$
- $\sum_{i=1}^{5} 3i = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$
- $\sum_{i=1}^{10} (3i - 15) = 3 \cdot \sum_{i=1}^{10} i - 10 \cdot 15 = 3 \cdot 55 - 150 = 15$
- $\sum_{i=0}^{4} (2i + 2) = 2 \sum_{i=0}^{4} i + 5 \cdot 2 = 30$

- $\sum_{i=0}^{4} 2i + 2 = 2\sum_{i=0}^{4} i + 2 = 22$
- $\sum_{i=3}^{10}(-2) = (10 - 3 + 1) \cdot (-2) = -16$

Doppelsummen

Werden zwei Summen ineinander verschachtelt, spricht man von sogenannten **Doppelsummen**. Zur Erklärung nehmen wir an, ein Betrieb verbraucht jeweils die Mengen a_{ij} Dieselkraftstoff in 4 verschiedenen Fahrzeugen ($i = 1, 2, 3, 4$) in den ersten 3 Monaten ($j = 1, 2, 3$) eines Jahres. Diese Verbräuche kann man in der folgenden Tabelle darstellen. Der Gesamtverbrauch ergibt sich als Doppelsumme in der letzten Zeile und Spalte der Tabelle.

Fahrzeug	Januar	Februar	März	Summe
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\sum_{j=1}^{3} a_{1j}$
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\sum_{j=1}^{3} a_{2j}$
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\sum_{j=1}^{3} a_{3j}$
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	$\sum_{j=1}^{3} a_{4j}$
Summe	$\sum_{i=1}^{4} a_{i1}$	$\sum_{i=1}^{4} a_{i2}$	$\sum_{i=1}^{4} a_{i3}$	$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}$

Hier wird deutlich, dass es gleichgültig ist, ob wir über die Spalten oder die Zeilen aufsummieren. Erklärung ist das Kommutativgesetz, welches besagt, dass bei der Addition die gewählte Reihenfolge egal ist:

(e) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Aufgaben

1.17 Berechnen Sie die folgenden Summen:

(a) $\sum_{i=1}^{5} i$; (b) $\sum_{i=1}^{5} 100i$; (c) $\sum_{i=1}^{5}(100i - 300)$; (d) $\sum_{i=1}^{100} i$;

(e) $\sum_{i=1}^{100}(-i)$; (f) $\sum_{i=1}^{100}(-3i + 150)$; (g) $\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=2}^{n-1} i^2$; (h) $\sum_{i=0}^{3} 2^i - i^2$;

(i) $\sum_{i=2}^{5} i^2$; (j) $\left(\sum_{i=2}^{5} i\right)^2$; (k) $\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{4} 4ij$; (l) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{10} ij$.

Lösungen

1.17 (a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$; (b) $100\sum_{i=1}^{5} i = 100 \cdot 15 = 1500$; (c) $100\sum_{i=1}^{5} i - 5 \cdot 300 = 0$;
(d) $\frac{100\cdot(100+1)}{2} = 5050$; (e) $-\frac{100\cdot(100+1)}{2} = -5050$; (f) $-3 \cdot \left(\sum_{i=1}^{100} i\right) + 100 \cdot 150 = -150$;
(g) $1 + n^2$; (h) $1 - 0 + 2 - 1 + 4 - 4 + 8 - 9 = 1$; (i) 54; (j) 196; (k) 240; (l) 550.

1.8* Stellenwertsysteme

Dezimalzahlen

Bei unserer Darstellung der Zahlenmengen sind wir bisher von der uns geläufigen Darstellung der Zahlen im sogenannten Dezimalsystem ausgegangen. Daneben existieren andere Möglichkeiten, Zahlen darzustellen. Im Dezimalsystem ist die Schreibweise für die reelle Zahl 154,21 eigentlich eine Abkürzung für:

$$1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2}$$

Die Stellen der Zahl geben also an, wie oft welche Potenz von 10 gezählt wird, hier einmal die zweite Potenz (10^2), fünfmal die erste Potenz, viermal die nullte Potenz, zweimal die negative erste Potenz und einmal die negative zweite Potenz. Allgemein heißt eine Zahl in der Darstellung

$$a_n \dots a_0{,}a_{-1} \dots a_{-m} = \sum_{j=-m}^{n} a_j \cdot 10^j, \quad a_j \in \{0;1;2;\dots;9\}$$

eine **Dezimalzahl**. Die jeweilige Stelle einer Ziffer gibt an, mit welcher Potenz von 10 sie jeweils multipliziert wird. Allgemeiner können auch andere als die Zehnerpotenzen für ein solches **Stellenwertsystem** verwendet werden.

Aufgaben

1.18 (a) Schreiben Sie die Zahl 10.001,05 in der Darstellung einer Summe von Zehnerpotenzen auf.
(b) Schreiben Sie die Zahl $-5{,}31$ in der Darstellung einer Summe von Zehnerpotenzen auf.

Lösungen

1.18 (a) $10.001{,}05 = 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$;
(b) $-5{,}31 = -5 \cdot 10^0 - 3 \cdot 10^{-1} - 1 \cdot 10^{-2}$.

Dualzahlen

Für die Informatik ist insbesondere das Dualsystem wichtig. Während im Dezimalsystem zehn Symbole benötigt werden (0, 1, 2, …,9), kommt das Dualsystem mit zwei Symbolen (0 und 1) aus. Der *0* und der *1* entsprechen in der Computerschaltung die beiden Zustände *Spannung aus* und *Spannung ein*.

Eine Zahl in der Darstellung

$$a_n \dots a_0{,}a_{-1} \dots a_{-m} = \sum_{j=-m}^{n} a_j \cdot 2^j, \quad a_j \in \{0;1\}$$

heißt **Dualzahl**. Zum Beispiel steht 101 im Dualsystem für $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, was im Dezimalsystem der Zahl 5 entspricht.

Werden mehrere Stellenwertsysteme parallel verwendet, so muss die Basis jeweils angegeben werden, indem die Zahl eingeklammert und mit einem Index für das verwendete Stellenwertsystem versehen wird. Zum Beispiel lautet die Zahl $(34)_{10} = 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$ (Dezimalsystem) im Dualsystem $(100010)_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$.

Die Umrechnung von Dualzahlen in Dezimalzahlen ist relativ einfach, weil wir gewohnt sind, mit Dezimalzahlen zu rechnen. Zum Beispiel würden wir im Kopf die erste Stelle in $(1001)_2$ direkt mit einmal 2^3, also $(8)_{10}$ umrechnen (wobei wir den Exponenten ohnehin als Dezimalzahl *3* statt konsequenter als Dualzahl *11* schreiben). Die gesamte Zahl $(1001)_2$ können wir so umrechnen: $(1001)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (9)_{10}$.

Viel schwieriger ist der umgekehrte Weg von einer Dezimalzahl in eine Dualzahl. Dazu geben wir das folgende Verfahren ohne Beweis an: Man dividiere die Dezimalzahl durch 2 und notiere den Rest, dann dividiere man das Ergebnis (ohne Rest) wieder durch 2 und notiere den Rest usw. Die von **rechts nach links notierten Reste** ergeben die gesuchte Dualzahl. Bei Dezimalbrüchen muss man multiplizieren statt dividieren: Man multipliziere den Dezimalbruch mit 2 und notiere den Überlauf (die Ziffer im Ergebnis, die vor dem Komma erscheint), dann multipliziere man das Ergebnis (ohne Überlauf) wieder mit 2 und notiere den Überlauf usw. Die von **links nach rechts notierten Überläufe** ergeben die Nachkommastellen des gesuchten Dualbruchs.

Beispiele

- Die Zahl $(24)_{10}$ soll als Dualzahl geschrieben werden:

  $$24 \div 2 = 12 \text{ R } 0; \quad 12 \div 2 = 6 \text{ R } 0; \quad 6 \div 2 = 3 \text{ R } 0; \quad 3 \div 2 = 1 \text{ R } 1; \quad 1 \div 2 = 0 \text{ R } 1$$

  Die in umgekehrter Reihenfolge aufgeschriebenen Reste liefern das Ergebnis:

  $$(24)_{10} = (11000)_2$$

- Die Zahl $(0{,}1)_{10}$ soll als Dualzahl geschrieben werden:

  $$0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2 \text{ Ü } 0, \quad 0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4 \text{ Ü } 0, \quad 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8 \text{ Ü } 0, \quad 0{,}8 \cdot 2 = 0{,}6 \text{ Ü } 1, \quad 0{,}6 \cdot 2 = 0{,}2 \text{ Ü } 1,$$
  $$0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4 \text{ Ü } 0; \quad 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8 \text{ Ü } 0; \quad 0{,}8 \cdot 2 = 0{,}6 \text{ Ü } 1; \quad 0{,}6 \cdot 2 = 0{,}2 \text{ Ü } 1$$

  Anhand der zweiten Zeile sieht man, dass die Überläufe sich periodisch wiederholen. Die in gleicher Reihenfolge aufgeschriebenen Überläufe liefern daher das Ergebnis:

  $$(0{,}1)_{10} = (0{,}\overline{00011})_2$$

- Die Zahl $(24{,}1)_{10}$ soll als Dualzahl geschrieben werden: Man kann die Ergebnisse der beiden vorangehenden Beispiele nun einfach addieren und erhält:

  $$(24{,}1)_{10} = (11000{,}\overline{00011})_2$$

Im Dualsystem kann man die Grundrechenarten analog zum Dezimalsystem ausführen, etwa auch schriftlich multiplizieren. Als Beispiel betrachten wir $(101)_2 \cdot (101)_2$, was im Dezimalsystem $(5)_{10} \cdot (5)_{10} = (25)_{10}$ entspricht:

1	0	1	·	1	0	1
				1	0	1
			0	0	0	
		1	0_1	1		
		1	1	0	0	1

Für das Ergebnis gilt $(11001)_2 = (25)_{10}$.

Aufgaben

1.19 (a) Stellen Sie $(11111)_2$ als Dezimalzahl dar.
(b) Stellen Sie $(10101{,}1)_2$ als Dezimalzahl dar.
(c) Stellen Sie $(101010{,}01)_2$ als Dezimalzahl dar.
(d) Stellen Sie $(37)_{10}$ als Dualzahl dar.
(e) Stellen Sie $(37{,}1)_{10}$ als Dualzahl dar.
(f) Stellen Sie $(137{,}05)_{10}$ als Dualzahl dar.

1.20 (a) Berechnen Sie das Produkt $(16)_{10} \cdot (2)_{10}$ direkt im Dezimalsystem und anschließend nach Umwandlung beider Faktoren ins Dualsystem innerhalb des Dualsystems. Wandeln Sie zur Probe das Ergebnis wieder ins Dezimalsystem um.
(b) Wiederholen Sie die Aufgabe (a) für das Produkt $(15)_{10} \cdot (3)_{10}$.

Lösungen

1.19 (a) $(11111)_2 = (31)_{10}$; (b) $(10101{,}1)_2 = (21{,}5)_{10}$; (c) $(101010{,}01)_2 = (42{,}25)_{10}$; (d) $(37)_{10} = (100101)_2$; (e) $(37{,}1)_{10} = (100101{,}\overline{00011})_2$; (f) $(137{,}05)_{10} = (10001001{,}\overline{00011})_2$.

1.20 (a) $(16)_{10} \cdot (2)_{10} = 32_{10}$; $(16)_{10} = (10000)_2$ und $(2)_{10} = (10)_2$, also $(10000)_2 \cdot (10)_2 = (100000)_2$. Probe: $(100000)_2 = (32)_{10}$; (b) $(15)_{10} \cdot (3)_{10} = (45)_{10}$; $(15)_{10} = (1111)_2$ und $(3)_{10} = (11)_2$, also $(1111)_2 \cdot (11)_2 = (101101)_2$. Probe: $(101101)_2 = (45)_{10}$.

Hexadezimalzahlen

Für die Datenverarbeitung ist das Dualsystem grundlegend. In der Informatik wurde früher außerdem häufig das Oktalsystem verwendet, heute dagegen vor allem das Hexadezimalsystem. Beide haben im Vergleich zum Dualsystem den Vorteil, dass sie einfacher lesbar sind. Wir stellen kurz das Hexadezimalsystem vor, das als Basis die Zahl 16 (Dezimalsystem) beziehungsweise 2^4 hat. Dadurch kann in der Informatik eine Folge von vier Bits, als vierstellige Dualzahl interpretiert, stets durch ein Symbol im Hexadezimalsystem dargestellt werden. Entsprechend wird ein Datenwort aus acht Symbolen im Dualsystem im Hexadezimalsystem durch zwei Symbole dargestellt.

Da im Hexadezimalsystem 16 als Basis verwendet wird, werden neben den Ziffern von 0 bis 9 noch sechs weitere Zeichen benötigt, üblicherweise A, B, C, D, E und F. Eine Zahl in der Darstellung

$$a_n \dots a_0{,}a_{-1} \dots a_{-m} = \sum_{j=-m}^{n} a_j \cdot 16^j, \quad a_j \in \{0;1;\dots;9;A;\dots;F\}$$

heißt **Hexadezimalzahl**.

Beispiele

- $(B7)_{16} = 11 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 = (183)_{10}$.
- $(FA8)_{16} = 15 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 = (4008)_{10}$.

Eine vierstellige Dualzahl kann die Dezimalwerte von 0 bis 15 durchlaufen (im Dualsystem 0000 bis 1111), also genau die Zahlen, die im Hexadezimalsystem mit einer Stelle darstellbar

sind (0 bis F). Bildet man eine achtstellige Dualzahl mit vier Nullen hinten, so kann die achtstellige Zahl die Dezimalwerte 16 bis 240 in 16er-Schritten durchlaufen (00010000 bis 11110000 im Dualsystem), also genau die Werte, die im Hexadezimalsystem mit zwei Stellen und einer 0 an der zweiten Stelle darstellbar sind (10 bis $F0$). Man kann also jeden Viererblock an Dualzahlen durch eine einstellige Hexadezimalzahl wiedergeben und diese Blöcke auch hintereinander aufschreiben, um die entsprechenden mehrstelligen Hexadezimalzahlen zu erhalten. Damit werden Dualzahlen übersichtlicher dargestellt.

Beispiele

- Da $(1100)_2 = (C)_{16}$ ist, folgt direkt, dass $(11001100)_2 = (CC)_{16}$. Sie können das auch überprüfen, indem Sie beide Darstellungen in das Dezimalsystem umwandeln:

$$(11001100)_2 = (204)_{10} \quad \text{und} \quad (CC)_{16} = (204)_{10}.$$

- Wegen $(0011)_2 = (3)_{16}$ und $(1100)_2 = (C)_{16}$ ist $(00111100)_2 = (3C)_{16}$.

Aufgaben

1.21 (a) Stellen Sie $(67)_{16}$ im Dualsystem und im Dezimalsystem dar.
(b) Stellen Sie $(FAD)_{16}$ im Dualsystem und im Dezimalsystem dar.
(c) Stellen Sie $(10010101)_2$ im Hexadezimalsystem dar.
(d) Stellen Sie $(111110010101)_2$ im Hexadezimalsystem dar.

Lösungen

1.21 (a) $(67)_{16} = (1100111)_2 = (103)_{10}$; (b) $(FAD)_{16} = (111110101101)_2 = (4013)_{10}$;
(c) $(10010101)_2 = (95)_{16}$; (d) $(111110010101)_2 = (F95)_{16}$.

Literaturhinweise

Dieses Kapitel behandelt in weiten Teilen Grundlagen, die mehr oder weniger ausführlich in praktisch allen (einführenden) Büchern zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler dargestellt werden, zum Beispiel in Luderer und Würker (2011), Simon und Blume (1994), Sydsaeter et al. (2014) oder Tietze (2013).

Trotz der Bemühungen, die grundlegenden Rechentechniken anschaulich und einfach zu vermitteln, werden einige Leser Verständnisschwierigkeiten haben. Neben verschiedenen Schulbüchern, die deutlich langsamer die entsprechenden Inhalte vermitteln, ist insbesondere Rolles und Unger (2010) als Nachschlagewerk mit ausführlichen Erklärungen zu empfehlen. Weitere Übungsaufgaben mit Lösungen über dieses im Wesentlichen in der Mittelstufe vermittelte Wissen finden sich in Postel (2012).

Wir haben einige Regeln angegeben, ohne sie zu beweisen. So bedarf zum Beispiel die Verwendung von reellen Zahlen als Exponenten in Potenzen einer näheren Begründung, die Sie zum Beispiel in Heuser (2009a) finden können (das Niveau dieses Buches geht allerdings erheblich über die Anforderungen hier hinaus).

Die Stellenwertsysteme spielen vor allem für Wirtschaftsinformatiker eine Rolle. Dementsprechend finden sich ausführlichere Darstellungen in Lehrbüchern zur Mathematik für Informatiker, zum Beispiel in Teschl und Teschl (2013).

http://www.springer.com/978-3-658-09466-9

Wirtschaftsmathematik für das Bachelor-Studium

Christiaans, Th.; Ross, M.

2016, XII, 364 S. 81 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-09466-9