Mathematische Formelsammlung

Für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Bearbeitet von
Lothar Papula

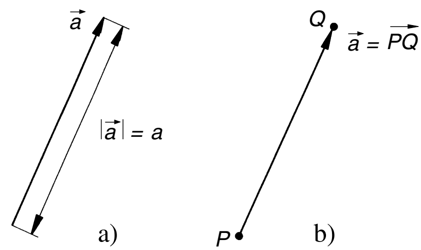
12., überarbeitete Auflage 2017. Buch. XXX, 546 S. Softcover
ISBN 978 3 658 16194 1
Format (B x L): 17,3 x 23,8 cm
Gewicht: 925 g

II Vektorrechnung

1 Grundbegriffe

1.1 Vektoren und Skalare

Vektoren sind *gerichtete* Größen, die durch eine Maßzahl und eine Richtung vollständig beschrieben und in symbolischer Form durch einen Pfeil dargestellt werden (Bild a)). Die Länge des Pfeils heißt *Betrag* $|\vec{a}| = a$ des Vektors $\vec{a}$, die Pfeilspitze legt die *Richtung* (Orientierung) des Vektors fest.



Ein Vektor $\vec{a}$ lässt sich auch eindeutig durch einen *Anfangs-* und *Endpunkt* festlegen: $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ (Bild b)). Bei einer *physikalisch-technischen* Vektorgröße gehört zur vollständigen Beschreibung noch die Angabe der *Maßeinheit*.

Skalare dagegen sind Größen *ohne* Richtungseigenschaft. Sie sind durch Angabe einer *Maßzahl* (bzw. einer Maßzahl *und* einer Maßeinheit) eindeutig beschrieben.

In den Anwendungen unterscheidet man:

1. *Freie Vektoren:* Sie dürfen *parallel* zu sich selbst verschoben werden.
2. *Linienflüchtige Vektoren:* Sie sind längs ihrer *Wirkungslinie* verschiebbar.
3. *Gebundene Vektoren:* Sie werden von einem *festen* Punkt aus abgetragen.

1.2 Spezielle Vektoren

Nullvektor $\vec{0}$: Vektor der Länge 0 (seine Richtung ist *unbestimmt*)

Einheitsvektor $\vec{e}$: Vektor der Länge 1

Ortsvektor $\vec{r}(P) = \overrightarrow{OP}$: Vom Nullpunkt O zum Punkt P gerichteter Vektor

L. Papula, *Mathematische Formelsammlung*, DOI 10.1007/978-3-658-16195-8_2

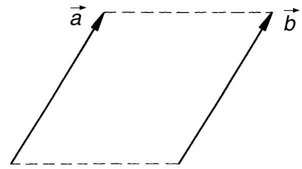
1.3 Gleichheit von Vektoren

Zwei Vektoren heißen *gleich*, wenn sie sich durch Parallelverschiebung zur *Deckung* bringen lassen. Sie stimmen in *Betrag* und *Richtung* und somit auch in ihren *Komponenten* überein (siehe II.2.1).

$$\boxed{\vec{a} = \vec{b} \;\Leftrightarrow\; a_x = b_x\,,\; a_y = b_y\,,\; a_z = b_z}$$

$a_x,\ a_y,\ a_z$: *Skalare* Komponenten von $\vec{a}$

$b_x,\ b_y,\ b_z$: *Skalare* Komponenten von $\vec{b}$

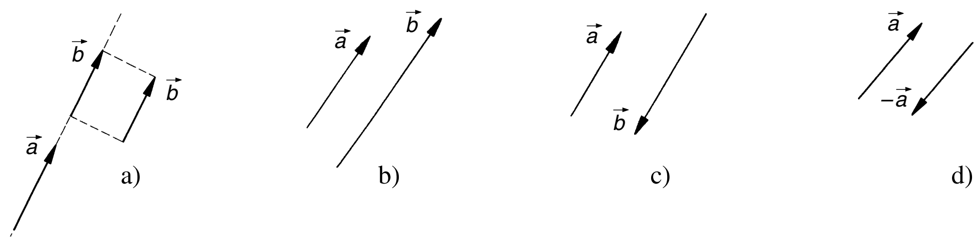


1.4 Kollineare, parallele und antiparallele Vektoren, inverser Vektor

Kollineare Vektoren lassen sich stets durch *Parallelverschiebung* in eine *gemeinsame* Linie bringen (Bild a)).

Parallele Vektoren haben *gleiche* Richtung (Bild b)). Symbolische Schreibweise: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Antiparallele Vektoren haben *entgegengesetzte* Richtung (Bild c)). Symbolische Schreibweise: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.



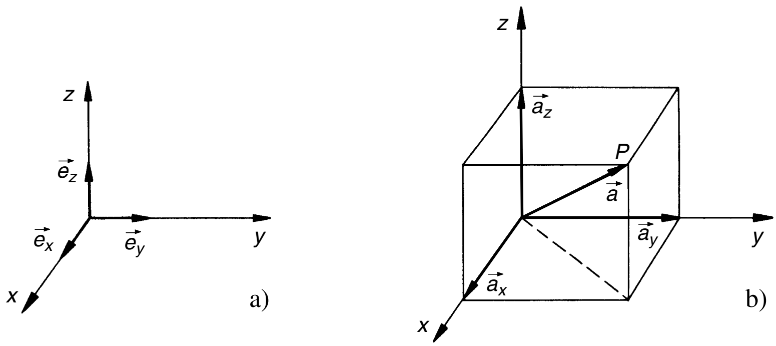
Parallele bzw. *anti-parallele* Vektoren sind demnach *kollinear.*

Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen *inversen* oder *Gegenvektor* $-\vec{a}$ (Bild d)). Er entsteht aus dem Vektor $\vec{a}$ durch *Richtungsumkehr*. Die Vektoren $\vec{a}$ und $-\vec{a}$ sind somit *gleichlang*, ihre Komponenten unterscheiden sich lediglich im *Vorzeichen*.

2 Komponentendarstellung eines Vektors

2.1 Komponentendarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem

Die *Einheitsvektoren* $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$, auch *Basisvektoren* genannt, stehen paarweise *senkrecht* aufeinander und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (rechtshändiges System), d. h. sie haben *dieselbe* Orientierung wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der *rechten* Hand (Bild a)). Statt $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ verwendet man auch die Symbole $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ oder $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.



In diesem System besitzt ein Vektor $\vec{a}$ die folgende *Komponentendarstellung* (Bild b))[1]:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y + a_z\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_x,\ \vec{a}_y,\ \vec{a}_z$: *Vektorkomponenten* von $\vec{a}$

$a_x,\ a_y,\ a_z$: *Vektorkoordinaten* oder *skalare* Vektorkomponenten von $\vec{a}$

$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$: Schreibweise in Form eines sog. *Spaltenvektors*

Schreibweise als *Zeilenvektor*: $\vec{a} = (a_x\ a_y\ a_z)$

2.2 Komponentendarstellung spezieller Vektoren

Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$: $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\,\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\,\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$

Ortsvektor von P: $\vec{r}\,(P) = \overrightarrow{OP} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

[1] Bei *ebenen* Vektoren verschwindet die dritte Komponente.

Nullvektor: $\vec{0} = 0\,\vec{e}_x + 0\,\vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Basisvektoren: $\vec{e}_x = 1\,\vec{e}_x + 0\,\vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; analog: $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.3 Betrag und Richtungswinkel eines Vektors

Betrag (Länge) eines Vektors

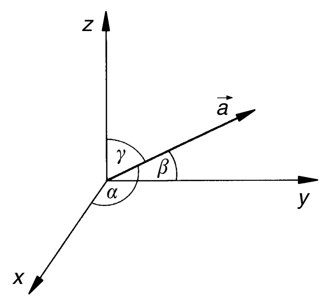
$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \qquad (|\vec{a}| \ge 0)$$

Richtungswinkel eines Vektors (Richtungskosinus)

Für die *Richtungswinkel* α, β und γ, die der Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ mit den drei Koordinatenachsen (Basisvektoren) bildet, gelten folgende Beziehungen:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



Hinweis: Für den *Nullvektor* $\vec{0}$ lassen sich keine Richtungswinkel angeben.

Umgekehrt lassen sich die Vektorkoordinaten aus dem Betrag und den drei Richtungswinkeln (Richtungskosinus) des Vektors berechnen:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma$$

■ **Beispiel**

Wir berechnen den *Betrag* und die drei *Richtungswinkel* des Vektors $\vec{a} = 4\,\vec{e}_x - 2\,\vec{e}_y + 5\,\vec{e}_z$:

$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{45} = 6{,}71$, $\quad \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{45}} = 0{,}5963 \;\Rightarrow\; \alpha = 53{,}4°$

$\cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{45}} = -0{,}2981 \;\Rightarrow\; \beta = 107{,}3°$, $\quad \cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{45}} = 0{,}7454 \;\Rightarrow\; \gamma = 41{,}8°$

Kontrolle: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0{,}5963^2 + (-0{,}2981)^2 + 0{,}7454^2 = 1$

■

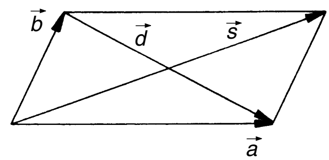
3 Vektoroperationen

3.1 Addition und Subtraktion von Vektoren

Geometrische Darstellung

Addition und *Subtraktion* zweier Vektoren erfolgen nach der *Parallelogrammregel.*

Summenvektor	$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$
Differenzvektor	$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

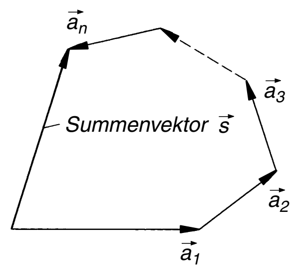


Differenzvektor: Zu $\vec{a}$ wird der *inverse* Vektor von $\vec{b}$ addiert: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Die Addition *mehrerer* Vektoren erfolgt nach der *Polygonregel (Vektorpolygon).*

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n$$

Hinweis: Das Vektorpolygon liegt i. Allg. nicht in einer Ebene.



Komponentendarstellung

Addition und *Subtraktion* zweier Vektoren erfolgen *komponentenweise:*

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

Kommutativgesetz $\quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

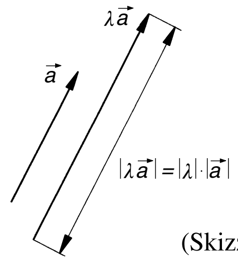
Assoziativgesetz $\quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Geometrische Darstellung

$\lambda\,\vec{a}$: Vektor mit der Länge $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ und der Richtung oder Gegenrichtung des Vektors $\vec{a}$:

$$\text{für} \quad \begin{array}{ll} \lambda > 0: & \lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a} \\ \lambda < 0: & \lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a} \\ \lambda = 0: & \lambda\vec{a} = \vec{0} \end{array}$$



(Skizze: $\lambda > 0$)

Komponentendarstellung

Die *Multiplikation* eines Vektors mit einem reellen *Skalar* erfolgt *komponentenweise*:

$$\lambda\,\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,a_x \\ \lambda\,a_y \\ \lambda\,a_z \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

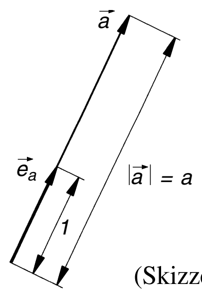
Rechenregeln

$$\left.\begin{array}{lrl} \textit{Assoziativgesetz} & \lambda(\mu\,\vec{a}) & = \mu(\lambda\,\vec{a}) = (\lambda\,\mu)\,\vec{a} \\ \textit{Distributivgesetze} & \lambda\big(\vec{a} + \vec{b}\big) & = \lambda\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b} \\ & (\lambda + \mu)\,\vec{a} & = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{a} \end{array}\right\} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Normierung eines Vektors

Für den in Richtung des Vektors $\vec{a} \neq \vec{0}$ weisenden *Einheitsvektor* $\vec{e}_a$ gilt:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix}, \quad |\vec{e}_a| = 1$$



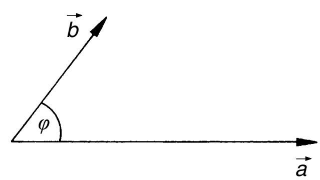
(Skizze: $|\vec{a}| > 1$)

3.3 Skalarprodukt (inneres Produkt)

Definition eines Skalarproduktes

Das *Skalarprodukt* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der wie folgt definierte *Skalar*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \big|\vec{b}\big| \cdot \cos\varphi$$



φ: Winkel zwischen den beiden Vektoren mit $0° \leq \varphi \leq 180°$

Skalarprodukt in der Komponentendarstellung

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Regel: *Komponentenweise* multiplizieren, die Produkte aufaddieren.

Sonderfälle

(1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left\{ \begin{matrix} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \\ \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \end{matrix} \right\}$

(3) Die *Einheitsvektoren* $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ bilden eine *orthonormierte* Basis[2]:

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1, \qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$

Rechenregeln

Kommutativgesetz $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Distributivgesetz $\quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Assoziativgesetz $\quad \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$

Schnittwinkel zweier Vektoren

Den Schnittwinkel φ zweier vom Nullvektor verschiedener Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet man aus der folgenden Gleichung $(0° \le \varphi \le 180°)$:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$\cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad$ rechter Winkel
$\cos \varphi > 0 \quad \Rightarrow \quad$ spitzer Winkel (strumpfer Winkel bei $\cos \varphi < 0$)

■ **Beispiel**

Wir bestimmen den *Schnittwinkel* φ der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$:

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{51}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 - 2 + 15 = 18, \qquad \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{18}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{51}} = 0{,}6736 \quad \Rightarrow$

$\varphi = \arccos 0{,}6736 = 47{,}7°$ ■

[2] Orthonormierte Vektoren sind *Einheitsvektoren*, die paarweise aufeinander *senkrecht* stehen.

Orthogonalität zweier Vektoren

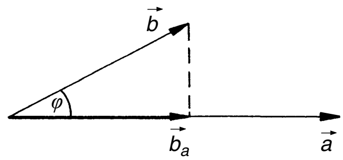
Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen genau dann *senkrecht* aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt *verschwindet*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b} \qquad \text{(orthogonale Vektoren)}$$

Projektion eines Vektors auf einen zweiten Vektor

Durch Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ entsteht der folgende Vektor (*Komponente* von $\vec{b}$ in Richtung von $\vec{a}$):

$$\vec{b}_a = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{e}_a)\, \vec{e}_a$$



$\vec{e}_a$: Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$ mit

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

3.4 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)

Definition eines Vektorproduktes

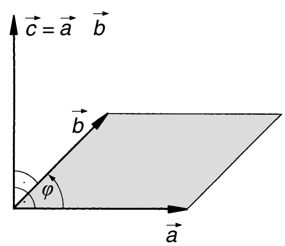
Das *Vektorprodukt* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der eindeutig bestimmte *Vektor* $\vec{c}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

(2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

$(\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0)$

(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: Rechtssystem



φ: Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $0° \leq \varphi \leq 180°$

Geometrische Deutung: Der *Betrag* des Vektorproduktes $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich dem *Flächeninhalt* des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten *Parallelogramms*:

$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \qquad (0° \leq \varphi \leq 180°)$$

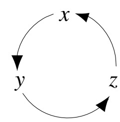
Das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht *senkrecht* auf der Parallelogrammfläche.

Vektorprodukt in der Komponentendarstellung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Anmerkung

Durch *zyklisches* Vertauschen der Indizes erhält man aus der ersten Komponente die zweite und aus dieser schließlich die dritte Komponente.



■ **Beispiel**

Wir berechnen mit Hilfe des Vektorproduktes den *Flächeninhalt* A des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannten *Parallelogramms*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 - 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 5 - 4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 0 \\ 0 - 3 \\ 5 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{12^2 + (-3)^2 + 13^2} = 17{,}94$$

■

Vektorprodukt in der Determinantenschreibweise

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Die dreireihige Determinante lässt sich *formal* nach der Regel von *Sarrus* berechnen (siehe VII.2.2).

Sonderfälle

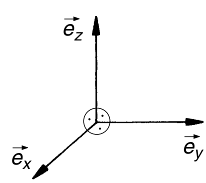
(1) Für *kollineare* Vektoren ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ und umgekehrt (*entartetes* Parallelogramm).

(2) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(3) Für die Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ gilt (sie bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem):

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z\,, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x\,, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$



Rechenregeln

Antikommutativgesetz $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Distributivgesetze $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Assoziativgesetz $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$

Kollineare Vektoren

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann *kollinear*, wenn ihr Vektorprodukt *verschwindet*:

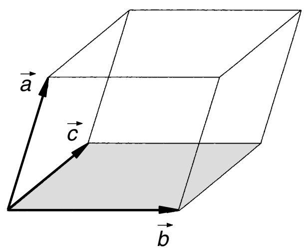
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \quad \text{oder} \quad \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \qquad \text{(kollineare Vektoren)}$$

3.5 Spatprodukt (gemischtes Produkt)

Definition eines Spatproduktes

Das *Spatprodukt* $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,]$ dreier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist das *skalare* Produkt aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \times \vec{c}$:

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}\,)$$



Das Spatprodukt $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,]$ ist *positiv*, wenn die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem* bilden, sonst *negativ*.

Geometrische Deutung: Der *Betrag* des Spatproduktes $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,]$ ist das *Volumen* des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten *Spats* (auch *Parallelepiped* genannt):

$$V_{\text{Spat}} = |[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,]|$$

Spatprodukt in der Komponentendarstellung

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)$$

Spatprodukt in der Determinantenschreibweise

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Rechenregeln

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dürfen *zyklisch* vertauscht werden: $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}] = [\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}]$

(2) Vertauschen *zweier* Vektoren bewirkt einen *Vorzeichenwechsel* des Spatproduktes:
z. B. $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = -[\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}]$ (die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ wurden vertauscht)

Komplanare Vektoren

Drei Vektoren sind genau dann *komplanar*, wenn ihr Spatprodukt *verschwindet:*

$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ sind *komplanar* (d. h. sie liegen in einer *Ebene*)

■ **Beispiel**

Das Spatprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ verschwindet:

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 8 - 80 + 8 + 10 + 48 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ sind } \textit{komplanar}$$

■

3.6 Formeln für Mehrfachprodukte

(1) *Entwicklungssätze:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$$
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

(2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})\,(\vec{b} \cdot \vec{c})$

Spezialfall $\vec{c} = \vec{a}$, $\vec{d} = \vec{b}$:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a})\,(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

4 Anwendungen

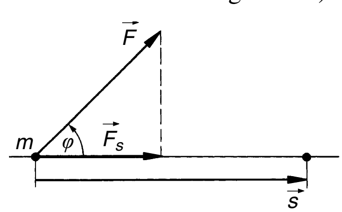
4.1 Arbeit einer konstanten Kraft

Eine *konstante* Kraft $\vec{F}$ verrichtet beim Verschieben eines Massenpunktes m um den Vektor $\vec{s}$ die folgende *Arbeit* (Skalarprodukt aus Kraft- und Verschiebungsvektor):

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi = F_s\, s$$

F_s: Kraftkomponente in Wegrichtung

$s = |\vec{s}|$: Verschiebung

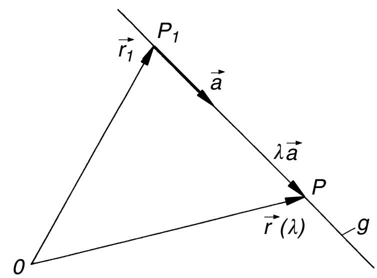


4.2 Vektorielle Darstellung einer Geraden

4.2.1 Punkt-Richtungs-Form

In der Parameterdarstellung

Gegeben: Ein Punkt P_1 auf der Geraden g mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$ und ein Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden



$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}$$

λ: Parameter; $\lambda \in \mathbb{R}$; $\vec{a} \neq \vec{0}$

■ **Beispiel**

Die Vektorgleichung der durch den Punkt $P_1 = (1;\ -2;\ 5)$ verlaufenden Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ lautet:

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda \\ -2 - 4\lambda \\ 5 + 2\lambda \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

■

In der Determinantenschreibweise

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z$: Einheitsvektoren (Basisvektoren)

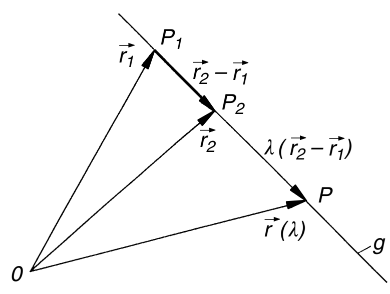
$a_x,\ a_y,\ a_z$: *Skalare* Vektorkomponenten des Richtungsvektors $\vec{a}$

$x_1,\ y_1,\ z_1$: Koordinaten des festen Punktes P_1 der Geraden

$x,\ y,\ z$: Koordinaten des *laufenden* Punktes P der Geraden

4.2.2 Zwei-Punkte-Form

Gegeben: Zwei *verschiedene* Punkte P_1 und P_2 auf der Geraden g mit den Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$



$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\,\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

λ: Parameter; $\lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{r}_2 - \vec{r}_1$: Richtungsvektor der Geraden

■ **Beispiel**

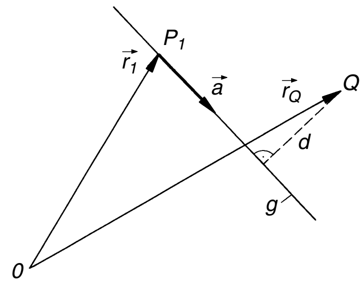
Die Vektorgleichung der Geraden durch die beiden Punkte $P_1 = (-1;\ 5;\ 0)$ und $P_2 = (1;\ -3;\ 2)$ lautet:

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1+1 \\ -3-5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2\lambda \\ 5-8\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

■

4.2.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Gegeben: Eine Gerade g mit der Gleichung $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}$ und ein Punkt Q mit dem Ortsvektor $\vec{r}_Q$



$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}$$

$\vec{a}$: Richtungsvektor der Geraden

$d = 0 \quad \Rightarrow \quad Q$ liegt auf der Geraden.

■ **Beispiel**

Wir berechnen den Abstand d des Punktes $Q = (1;\ 5;\ 3)$ von der Geraden mit der Vektorgleichung

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}:$$

$$\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-1 \\ 5-1 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-20 \\ 0+2 \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)| = \sqrt{(-17)^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{357}, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{357}}{\sqrt{38}} = 3{,}065$$

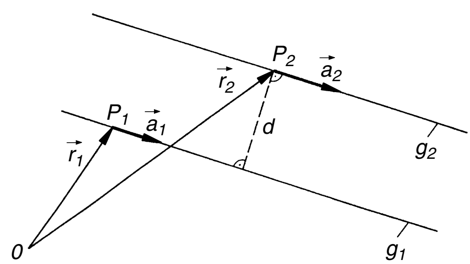
■

4.2.4 Abstand zweier paralleler Geraden

Gegeben: Zwei *parallele* Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen

$\vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1\,\vec{a}_1$ und

$\vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2\,\vec{a}_2$



$$d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|}$$

Die Geraden g_1 und g_2 mit den Richtungsvektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind genau dann *parallel*, wenn die beiden Richtungsvektoren *kollinear* sind, d. h. $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{0}$ ist. In der Abstandsformel darf der Vektor $\vec{a}_1$ durch den Vektor $\vec{a}_2$ ersetzt werden.

$d = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Die Geraden g_1 und g_2 fallen zusammen.

■ **Beispiel**

$P_1 = (1;\ 0;\ 5)$ ist ein Punkt der Geraden g_1, $P_2 = (0;\ 2;\ 1)$ ein solcher der Geraden g_2. Der *gemeinsame* Richtungsvektor ist $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir bestimmen den Abstand d dieser *parallelen* Geraden:

$$\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ -1+8 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)| = \sqrt{(-6)^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{110}, \qquad |\vec{a}_1| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|} = \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{6}} = 4{,}282$$

■

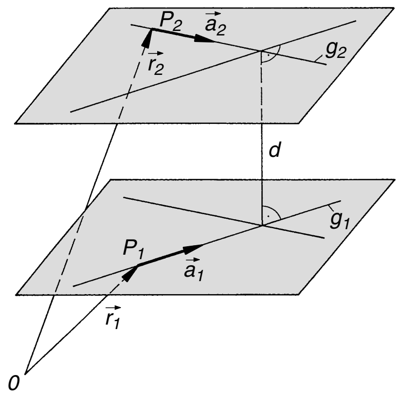
4.2.5 Abstand zweier windschiefer Geraden

Gegeben: Zwei *windschiefe* Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen

$$\vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 \quad \text{und}$$

$$\vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

$$\boxed{d = \frac{|[\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}}$$



Die Geraden g_1 und g_2 sind genau dann *windschief* (d. h. nicht parallel und kommen nicht zum Schnitt), wenn die Bedingungen $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}$ und $[\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] \neq 0$ erfüllt sind.

■ **Beispiel**

$\vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind die Gleichungen zweier *windschiefer* Geraden g_1 und g_2, deren Abstand d wir berechnen wollen:

$$[\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ (2-5) & (-1-2) & (0-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 - 3 - 27 + 18 + 3 + 3 = -8$$

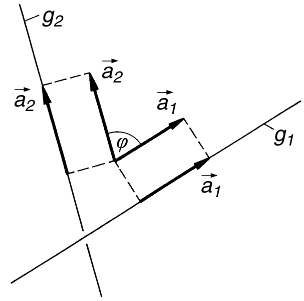
$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 9-1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{(-5)^2 + 8^2 + (-1)^2} = \sqrt{90}$$

$$d = \frac{|[\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \frac{|-8|}{\sqrt{90}} = 0{,}843$$

■

4.2.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

Unter dem Schnittwinkel φ zweier Geraden versteht man den Winkel zwischen den zugehörigen *Richtungsvektoren* (auch dann, wenn sich die Geraden *nicht* schneiden).



Gegeben: Zwei Geraden g_1 und g_2 mit den Richtungsvektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} \right)$$

Die Geraden g_1: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1$ und g_2: $\vec{r} = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$ schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn die Bedingungen

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0} \quad \text{und} \quad [\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = 0$$

erfüllt sind. Ihren Schnittpunkt S erhält man durch Gleichsetzen der beiden Ortsvektoren:

$$\vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$$

Diese Vektorgleichung führt (*komponentenweise* geschrieben) zu einem *linearen Gleichungssystem* mit drei Gleichungen und den beiden Unbekannten λ_1 und λ_2. Die (eindeutige) Lösung liefert die zum Schnittpunkt S gehörigen Parameterwerte. Den Ortsvektor $\vec{r}_S$ des gesuchten Schnittpunktes S erhält man dann durch Einsetzen des Parameterwertes λ_1 in die Gleichung der Geraden g_1 (alternativ: λ_2 in die Gleichung der Geraden g_2 einsetzen).

■ **Beispiel**

Die beiden Geraden g_1 und g_2 mit den Richtungsvektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ schneiden sich unter dem folgenden Winkel:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} \right) = \arccos \left(\frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2}} \right) = \arccos 0{,}2168 = 77{,}5°$$

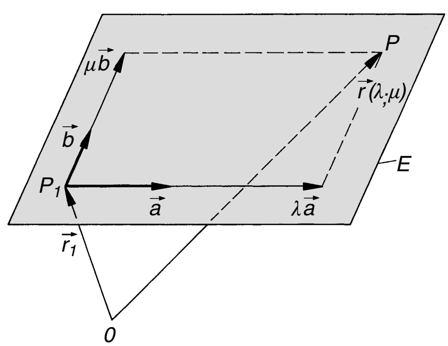
■

4.3 Vektorielle Darstellung einer Ebene

4.3.1 Punkt-Richtungs-Form

In der Parameterdarstellung

Gegeben: Ein Punkt P_1 der Ebene E mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$ und zwei *nichtkollineare* Richtungsvektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ der Ebene



$$\vec{r}(\lambda;\ \mu) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

$\lambda,\ \mu$: Parameter; $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

$\vec{a} \times \vec{b}$: Normalenvektor der Ebene

■ **Beispiel**

Eine Ebene E enthalte den Punkt $P_1 = (1;\ 3;\ 5)$ und besitze die beiden Richtungsvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ihre Vektorgleichung lautet dann:

$$\vec{r}(\lambda;\ \mu) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 8\lambda + \mu \\ 3 + \lambda - 2\mu \\ 5 + 3\lambda + 4\mu \end{pmatrix} \qquad (\lambda,\ \mu \in \mathbb{R})$$

■

In der Determinantenschreibweise

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$\left.\begin{array}{l} a_x,\ a_y,\ a_z: \\ b_x,\ b_y,\ b_z: \end{array}\right\}$ *Skalare* Vektorkomponenten der Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

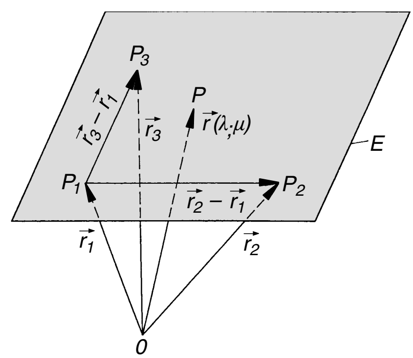
$x_1,\ y_1,\ z_1$: Koordinaten des festen Punktes P_1 der Ebene

$x,\ y,\ z$: Koordinaten des *laufenden* Punktes P der Ebene

4.3.2 Drei-Punkte-Form

In der Parameterdarstellung

Gegeben: Drei *verschiedene* Punkte P_1, P_2 und P_3 der Ebene E mit den Ortsvektoren $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$



$$\vec{r}(\lambda;\ \mu) = \vec{r}_1 + \lambda\overrightarrow{P_1P_2} + \mu\overrightarrow{P_1P_3} = \\ = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \mu(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$$

$\lambda,\ \mu$: Parameter; $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

Die Ebene ist *eindeutig* bestimmt, wenn die drei Punkte *nicht* in einer Geraden liegen. Dies ist der Fall, wenn $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \neq \vec{0}$ ist. Die Vektoren $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ sind *Richtungsvektoren*, ihr Vektorprodukt somit ein *Normalenvektor* der Ebene.

■ **Beispiel**

Die Gleichung der Ebene durch die drei Punkte $P_1 = (1;\ 1;\ 2)$, $P_2 = (0;\ 4;\ -5)$ und $P_3 = (-3;\ 4;\ 9)$ lautet wie folgt:

$$\vec{r}(\lambda;\ \mu) = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \mu(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 4 - 1 \\ -5 - 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -3 - 1 \\ 4 - 1 \\ 9 - 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda - 4\mu \\ 1 + 3\lambda + 3\mu \\ 2 - 7\lambda + 7\mu \end{pmatrix} \qquad (\lambda,\ \mu \in \mathbb{R})$$

■

In der Determinantenschreibweise

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

$x_i,\ y_i,\ z_i$: Koordinaten des festen Punktes P_i der Ebene $(i = 1,\ 2,\ 3)$
$x,\ y,\ z$: Koordinaten des *laufenden* Punktes der Ebene

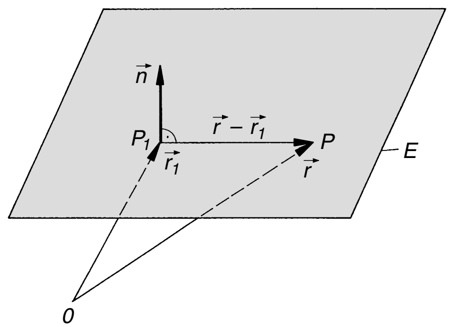
4.3.3 Ebene senkrecht zu einem Vektor

Gegeben: Ein Punkt P_1 der Ebene E mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$ und ein *Normalenvektor* $\vec{n}$ der Ebene (steht *senkrecht* auf der Ebene)

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r}_1$$

Koordinatendarstellung der Ebene:

$$a x + b y + c z + d = 0$$



■ **Beispiel**

Die Gleichung einer Ebene durch den Punkt $P_1 = (10;\ -3;\ 2)$ und *senkrecht* zum Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (*Normalenvektor*) lautet wie folgt:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 10 \\ y + 3 \\ z - 2 \end{pmatrix} = 2(x - 10) + 1(y + 3) + 5(z - 2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2x + y + 5z = 27$$

■

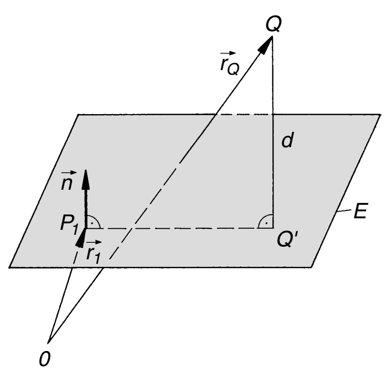
4.3.4 Abstand eines Punktes von einer Ebene

Gegeben: Eine Ebene E mit der Gleichung $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$ und ein Punkt Q mit dem Ortsvektor $\vec{r}_Q$

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

Q': Fußpunkt des Lotes von Q auf die Ebene E

$d = 0 \quad \Rightarrow \quad Q$ liegt in der Ebene.



■ **Beispiel**

Eine Ebene verläuft durch den Punkt $P_1 = (3;\ 1;\ 8)$ und steht *senkrecht* zum Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wir berechnen den Abstand d des Punktes $Q = (1;\ 2;\ 0)$ von dieser Ebene:

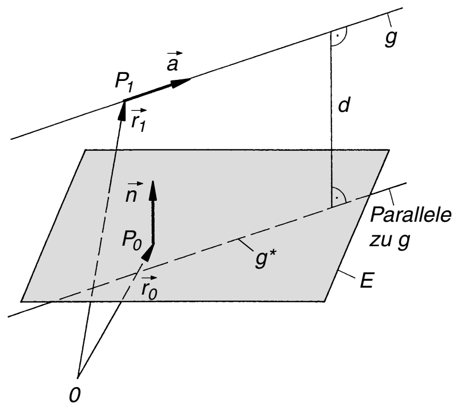
$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-1 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 + 5 - 24 = -17$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{35}\,, \qquad d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|} = \frac{|-17|}{\sqrt{35}} = 2{,}874$$

■

4.3.5 Abstand einer Geraden von einer Ebene

Gegeben: Eine Ebene E mit der Gleichung $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ und eine zu dieser Ebene *parallele* Gerade g mit der Gleichung $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a}$



$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}$$

Eine Gerade mit dem Richtungsvektor $\vec{a}$ verläuft genau dann *parallel* zu einer Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n}$, wenn das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{n}$ *verschwindet*. Die Gerade g^* liegt in der Ebene E und verläuft *parallel* zur Geraden g.

$d = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Gerade g liegt in der Ebene E.

■ **Beispiel**

Die Ebene E verlaufe durch den Punkt $P_0 = (1;\ 3;\ 2)$ und *senkrecht* zum Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, die Gerade g gehe durch den Punkt $P_1 = (0;\ 7;\ -3)$ und besitze den Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wegen

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 + 1 - 5 = 0$$

gilt $g \parallel E$. Wir berechnen den Abstand d zwischen Gerade und Ebene:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0-1 \\ 7-3 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = -2 - 4 - 25 = -31$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{30}\,, \qquad d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|} = \frac{|-31|}{\sqrt{30}} = 5{,}660$$

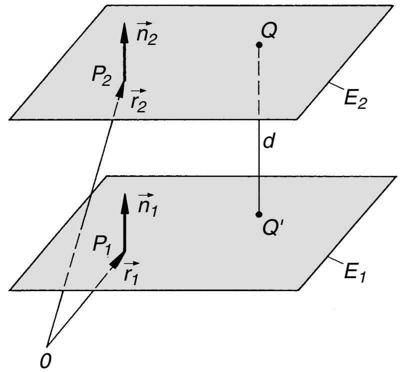
■

4.3.6 Abstand zweier paralleler Ebenen

Gegeben: Zwei *parallele* Ebenen E_1 und E_2 mit den Gleichungen

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \text{und}$$

$$\vec{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$$



$$d = \frac{|\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}_1|} = \frac{|\vec{n}_2 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}_2|}$$

Q : Beliebiger Punkt der Ebene E_2

Q': Fußpunkt des Lotes von Q auf die zweite Ebene E_1

Zwei Ebenen sind genau dann *parallel*, wenn ihre Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ *kollinear* sind, d. h. $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$ ist.

$d = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Die beiden Ebenen fallen zusammen.

■ **Beispiel**

Gegeben sind zwei Ebenen E_1 und E_2 mit den folgenden Eigenschaften:

Ebene E_1: $P_1 = (3;\ 1;\ -2)$, Normalenvektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ebene E_2: $P_2 = (-4;\ 3;\ 0)$, Normalenvektor $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

Die Ebenen sind *parallel*, da $\vec{n}_2 = -2\vec{n}_1$ und somit $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$ ist:

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = -2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{n}_1} = -2\vec{n}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times (-2\vec{n}_1) = -2\underbrace{(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

Wir berechnen den Abstand d der Ebenen:

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+4 \\ 1-3 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 14 + 2 - 8 = 8$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$d = \frac{|\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}_1|} = \frac{8}{\sqrt{21}} = 1{,}746$$

■

4.3.7 Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene

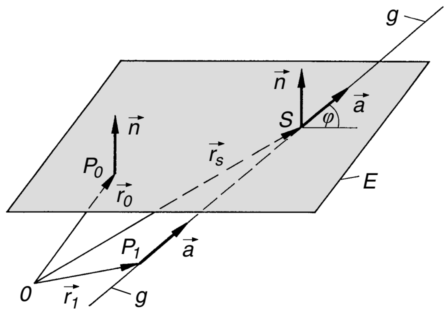
Gegeben: Eine Gerade g mit der Gleichung $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}$ und eine Ebene E mit der Gleichung $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

Ortsvektor des Schnittpunktes S:

$$\vec{r}_S = \vec{r}_1 + \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}}\,\vec{a}$$

Schnittwinkel φ:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}\right)$$



Eine Gerade mit dem Richtungsvektor $\vec{a}$ und eine Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ kommen genau dann zum *Schnitt*, wenn $\vec{n} \cdot \vec{a} \neq 0$ ist.

■ **Beispiel**

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene E:

$$g: \quad \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad E: \quad \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0$$

Wir berechnen den *Schnittpunkt* S sowie den *Schnittwinkel* φ.

Schnittpunkt S:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-0 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -2 + 1 - 3 = -4$$

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 4 - 1 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Gerade und Ebene schneiden sich}$$

$$\vec{r}_S = \vec{r}_1 + \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}}\,\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{-4}{1}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-12 \\ 0+16 \\ 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S = (-10;\ 16;\ 9)$$

Schnittwinkel φ:

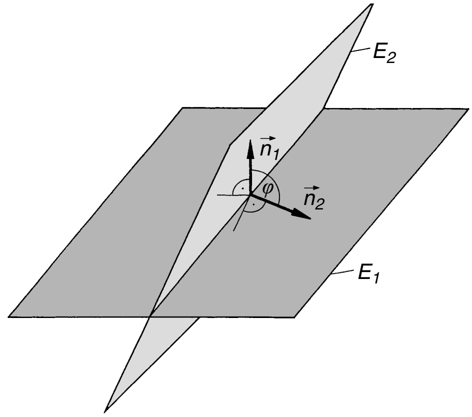
$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{26}}\right) = \arcsin 0{,}0801 = 4{,}6°$$

■

4.3.8 Schnittwinkel zweier Ebenen

Unter dem Schnittwinkel φ zweier Ebenen versteht man den Winkel zwischen den zugehörigen *Normalenvektoren* der beiden Ebenen.



Gegeben: Zwei Ebenen E_1 und E_2 mit den Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right)$$

Voraussetzung: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$

■ **Beispiel**

Wir bestimmen den Schnittwinkel φ zweier Ebenen E_1 und E_2 mit den Normalenvektoren

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}:$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 2 - 3 = 1$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{22}, \qquad |\vec{n}_2| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right) = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{6}} \right) = \arccos 0{,}0870 = 85{,}0^\circ$$

■

4.3.9 Schnittgerade zweier Ebenen

Gegeben: Zwei Ebenen E_1 und E_2 mit den Vektorgleichungen $\vec{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$ und $\vec{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$

Gleichung der Schnittgeraden g:

$$r(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Richtungsvektor der Schnittgeraden: $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

Der *Ortsvektor* $\vec{r}_0$ eines (noch unbekannten) Punktes $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$ der Schnittgeraden g wird aus dem linearen Gleichungssystem

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = 0, \qquad \vec{n}_2 \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_2) = 0$$

bestimmt, wobei eine der drei Unbekannten x_0, y_0, z_0 *frei wählbar* ist (z. B. $x_0 = 0$ setzen).

Voraussetzung: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$

http://www.springer.com/978-3-658-16194-1

Mathematische Formelsammlung
Für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Papula, L.
2017, XXX, 546 S. 400 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-16194-1