NWB Studium Betriebswirtschaft

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Band 2

Differential- und Integralrechnung.

Bearbeitet von
Jochen Schwarze

13., vollständig überarbeitete Auflage. 2010. Taschenbuch. 163 S. Paperback
ISBN 978 3 482 51573 6
Gewicht: 280 g

10 Differentiation von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

10.1 Einführendes Beispiel

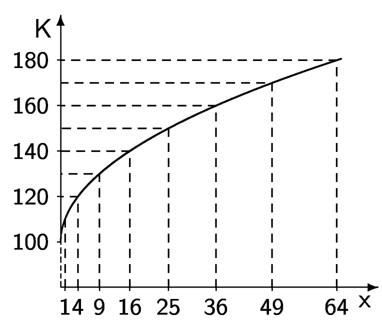
Zur Einführung in die Aufgabenstellung und Bestimmung der ersten Ableitung einer Funktion wird zunächst ein Beispiel aus den Wirtschaftswissenschaften betrachtet, an dem die Zusammenhänge anschaulich interpretiert werden können.

Ein Unternehmen produziert ein Gut. Die monatlichen Gesamtkosten K hängen von der monatlichen Produktionsmenge x ab. Der Zusammenhang zwischen Kosten und Menge wird beschrieben durch die Kostenfunktion $K = K(x)$. Man interessiert sich nun dafür, wie sich die Kosten ändern, wenn die Produktionsmenge verändert wird. Allgemein gilt: Ändert sich die Produktionsmenge von x_0 um Δx auf $x_0 + \Delta x$, so ändern sich die Kosten von $K(x_0)$ auf $K(x_0 + \Delta x)$, also um $K(x_0 + \Delta x) - K(x_0) = \Delta K$.

An einem Beispiel kann man sich leicht veranschaulichen, dass die Kostenänderung ΔK nicht nur vom Umfang der Mengenänderung Δx abhängt, sondern auch von der „Ausgangsmenge" x_0. Dazu wird folgende Kostenfunktion angenommen:

$$K = 10\sqrt{x} + 100.$$

Figur 10.1.1 zeigt den Verlauf der Kostenkurve. Aus der Tabelle sowie aus der Zeichnung ist zu ersehen, dass bei Erhöhung der Produktionsmenge um eine Einheit die Kostenerhöhung je nach Ausgangsmenge unterschiedlich ist. Ändert man die Menge von 1 auf 2, erhöhen sich die Kosten von 110 auf 114,14, also um $\Delta K = 4{,}14$. Bei einer Mengenänderung von 2 auf 3 ergibt sich $\Delta K = 3{,}18$ und von 3 auf 4 gilt $\Delta K = 2{,}68$. Ähnliches gilt, wenn man die Menge um mehr als eine Einheit erhöht. Eine Mengenänderung von 1 auf 16, also um $\Delta x = 15$, führt zu einer Kostenänderung von $\Delta K = 30$. Wird die Menge von 49 auf 64 erhöht, also ebenfalls um $\Delta x = 15$, ergibt sich eine Kostenänderung von $\Delta K = 10$. In Figur 10.1.1 ist die Kostenkurve grafisch dargestellt und in einer Tabelle sind für einige Mengen die zugehörigen Kosten angegeben.



F 10.1.1

x	$K = 10\sqrt{x} + 100$
0	100
1	110
2	114,14
3	117,32
4	120
9	130
16	140
25	150
49	170
64	180

Wird die Produktion um mehr als eine Einheit erhöht ($\Delta x > 1$), dann wird man sich nicht nur dafür interessieren, wie groß die zugehörige Kostenönderung ΔK ist, sondern auch fragen, wieviel Kosten im Durchschnitt für jede zusätzliche Mengeneinheit entstehen. Für die durchschnittlichen zusätzlichen Kosten **einer** zusätzlichen Einheit ergibt sich allgemein:

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x}.$$

Dieser so genannte **Differenzenquotient** gibt an, welche Kosten für die Produktion einer zusätzlichen Mengeneinheit im Durchschnitt entstehen, wenn die Produktion von x auf $x + \Delta x$ ausgedehnt wird.

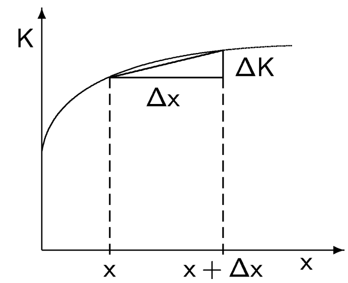
Die folgende Tabelle enthält zu einigen Mengenänderungen die zugehörigen Kostenänderungen ΔK und die durchschnittlichen Kostenänderungen pro Einheit $\Delta K/\Delta x$.

Mengenänderung				
von	auf	Δx	ΔK	$\frac{\Delta K}{\Delta x}$
1	2	1	4,14	4,14
1	3	2	7,32	3,66
1	4	3	10	3,33
1	9	8	20	2,5
1	16	15	30	2
1	64	63	70	1,11
0	9	9	30	3,33
16	25	9	10	1,11
49	64	15	10	0,67

Die (durchschnittlichen) Kostenänderungen pro Einheit hängen also von der jeweiligen Menge x, von der man ausgeht, und von der Änderung Δx ab. Um zu wissen, wie sich die Gesamtkosten ändern bzw. welche Kosten durchschnittlich für eine zusätzliche Einheit entstehen, müsste der Unternehmer ständig neu rechnen oder umfangreiche Tabellen anlegen, in der die auf eine Mengeneinheit bezogenen Kostenänderungen in Abhängigkeit von x und Δx dargestellt sind. Eine andere Möglichkeit zeigt der folgende Gedankengang, der zur ersten Ableitung einer Funktion mit einer unabhängigen Veränderlichen führt.

Wird die Menge von 1 auf 2 erhöht, dann steigen die Kosten von 110 auf 114,14, also um 4,14 an. Die Kosten bzw. die Funktion haben einen durchschnittlichen **Anstieg** von $\Delta K/\Delta x = 4{,}14$.

Bei einer Mengenänderung von 1 auf 16 steigen die Kosten von 110 auf 140, also um $\Delta K = 30$ an. Bezogen auf eine Mengeneinheit beträgt dann der **durchschnittliche Anstieg** der Kosten bzw. der Kostenfunktion $\Delta K/\Delta x = 30/15 = 2$. Der **Differenzenquotient** $\Delta K/\Delta x$ gibt den durchschnittlichen Anstieg der Kostenfunktion bezogen auf eine Mengeneinheit an, wenn die Menge von einem bestimmten x an um Δx verändert wird. Dieser durchschnittliche Anstieg der Funktion entspricht der Steigung der Verbindungsgeraden der beiden Kurvenpunkte an den Stellen x und $x + \Delta x$ (vgl. dazu Figur 10.1.2).



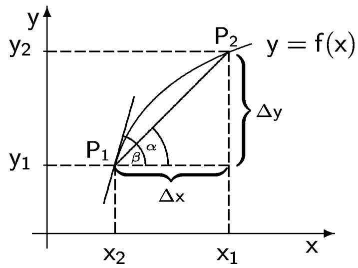
F 10.1.2

Um zu einer Aussage über die Kosten der zusätzlichen Produktion einer Mengeneinheit zu gelangen, die unabhängig von der Größe der Produktionsänderung Δx ist, lässt man Δx gegen 0 gehen ($\Delta x \to 0$).

Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{dK}{dx}$ gibt dann das Verhältnis der Kostenänderung zur infinitesimalen (unendlich kleinen) Mengenänderung an der Stelle x an. Dieser Grenzwert wird in der Wirtschaftstheorie als **Grenzkosten** bezeichnet und entspricht der Steigung der Tangente an die Kostenfunktion an der Stelle x. Die Bestimmung dieses Grenzwertes ist die Grundaufgabe der Differentialrechnung, die im Folgenden in allgemeiner Form kurz beschrieben ist. Dabei wird sich zeigen, dass die Grenzkosten (bzw. allgemein der Grenzwert des Differenzenquotienten $\Delta K/\Delta x$ für $\Delta x \to 0$) einen von x abhängigen Ausdruck ergeben. Als Grenzkosten erhält man also eine Funktion mit x als unabhängiger Variablen. In Figur 10.1.2 kann man das leicht daran erkennen, dass die (gekrümmte) Kurve in jedem Punkt eine andere Steigung hat.

10.2 Die erste Ableitung einer Funktion

Es sei $y = f(x)$ eine stetige Funktion. Es werden zwei Stellen x_1 und x_2 betrachtet, mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. $\Delta x = x_2 - x_1$ heißt **Differenz der unabhängigen Variablen**. Die zu Δx gehörige Differenz $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ heißt **Differenz der Funktion**, des Funktionswertes oder der abhängigen Variablen. Ändert man von der Stelle x_1 aus den Wert der unabhängigen Variablen um Δx auf x_2, dann ändert sich der Funktionswert um Δy (vgl. Figur 10.2.1). Verbindet man die beiden Punkte P_1 (mit den Koordinaten x_1 und y_1) und P_2 (mit den Koordinaten x_2 und y_2) durch eine Gerade, dann kann man die Steigung dieser Geraden, wie anhand von Figur 10.2.1 zu ersehen ist, als die durchschnittliche **Steigung** der Funktion von x_1 bis x_2 interpretieren.



F 10.2.1

Diese durchschnittliche Steigung entspricht $\tan\alpha$, denn es gilt:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

D 10.2.2 **Differenzenquotient**

Ist $y = f(x)$ eine stetige Funktion und Δy die Änderung des Funktionswertes, die zur Änderung Δx der unabhängigen Variablen gehört, dann heißt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Differenzenquotient der Funktion.

Der Differenzenquotient gibt die durchschnittliche Änderung oder durchschnittliche Steigung der Funktion im Bereich von x bis $x + \Delta x$ an. Er hängt, wie Figur 10.2.1 verdeutlicht, von x und von Δx ab.

Verschiebt man den Punkt P_2 auf der Kurve immer näher an den Punkt P_1, d. h. lässt man Δx immer kleiner werden, dann nähert sich die Verbindungsgerade der beiden Punkte immer mehr der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt P_1. Die Steigung der Verbindungsgeraden nähert sich dabei der Steigung der Tangente. Diese Steigung der Tangente, die $\tan\beta$ entspricht, bezeichnet man auch als **Steigung der Funktion** an der Stelle x_1.

Der Grenzwert des Differenzenquotienten $\Delta y/\Delta x$ für Δx gegen 0 entspricht dem Verhältnis der Änderungen von y und x in einem infinitesimalen (unendlich kleinen) Bereich.

D 10.2.3 **Differentialquotient oder erste Ableitung**

Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$ mit dem Definitionsbereich $D(f)$. Existiert für $x \in D(f)$ der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

so heißt dieser Grenzwert **Differentialquotient** oder **erste Ableitung** der Funktion $f(x)$ an der Stelle x. Er wird bezeichnet mit

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad f'(x) \quad \text{oder} \quad y'$$

(gelesen: „dy nach dx“, „df(x) nach dx“, „f Strich von x“, „y Strich“).
Existiert der Grenzwert für alle x aus dem Definitionsbereich, so heißt die Funktion **differenzierbar**.