Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Band 2

Differential- und Integralrechnung.

Bearbeitet von
Jochen Schwarze

13., vollständig überarbeitete Auflage. 2010. Taschenbuch. 163 S. Paperback
ISBN 978 3 482 51573 6
Gewicht: 280 g

14 Elastizitäten

14.1 Begriff der Elastizität

Bei manchen wirtschaftswissenschaftlichen Fragestellungen reicht die Bestimmung der ersten Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ nicht aus, um zu beurteilen, wie die Größe y auf Veränderungen der Größe x reagiert.

B 14.1.1 *Die Nachfragefunktion einer bestimmten Whiskysorte sei bekannt, wobei* x *die Anzahl der nachgefragten Flaschen (zu je* 0,7 ℓ*) angibt:* $x = 80.000 - 2.000p$. *Bei* $p = 20$ *werden dann z. B.* 40.000 *Flaschen nachgefragt, und eine Preiserhöhung um* $\Delta p = 1$ *führt zu einer Nachfrageänderung von* $\Delta x = -2.000$.
Für einen Kleinwagen eines bestimmten Typs sei die Nachfragefunktion $x = 4.000 - 0{,}1p$. *Bei einem Preis von z. B.* 20.000 *werden also* 2.000 *Wagen nachgefragt. Eine Preisänderung um* $\Delta p = 1$ *führt zu einer Nachfrageänderung von* $\Delta x = -0{,}1$, *und erst wenn der Preis um* 10 *erhöht wird, ist die Nachfrage um* 1 *Wagen niedriger.*
Es hat den Anschein, als wenn die Nachfrage in beiden Fällen sehr unterschiedlich auf Preiserhöhungen reagiert. Für eine realistische Beurteilung ist aber zu beachten, dass eine Preisänderung von 10 *auf* 11 *relativ oder prozentual wesentlich größer ist als von* 10.000 *auf* 10.001.
Betrachtet man nun die relativen Veränderungen von Preis und nachgefragter Menge, dann ergibt sich Folgendes:

$$\text{Whisky:}\quad \frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{20} = 0{,}05; \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{-2.000}{40.000} = -0{,}05;$$

$$\text{PKW:}\quad \frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{20.000} = 0{,}00005; \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{-0{,}1}{2.000} = -0{,}00005.$$

Setzt man die relativen Änderungen in Beziehung, so ergibt sich:

$$\text{Whisky:}\quad \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{-0{,}05}{0{,}05} = -1;$$

$$\text{PKW:}\quad \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{-0{,}00005}{0{,}00005} = -1.$$

Das Verhältnis der relativen Nachfrageänderung zu der sie auslösenden relativen Preisänderung ist also in beiden Fällen gleich. Bei Betrachtung relativer Änderungen wird die Reaktion der Nachfrage auf Preisänderungen besser erfasst, als über (meist nicht vergleichbare) absolute Änderungen.

Die Frage nach der Reaktion einer ökonomischen Größe auf Änderungen einer sie beeinflussenden ökonomischen Größe kann also, wie das Beispiel zeigt, nicht in allen Fällen sinnvoll mit dem Differentialquotienten beantwortet werden. In solchen Fällen ist es zweckmäßig mit relativen anstelle von absoluten Änderungen der Größen zu arbeiten.

Unter der relativen Änderung von x im Bereich von x bis $x + \Delta x$ versteht man die Größe $\frac{\Delta x}{\frac{x+(x+\Delta x)}{2}}$. Δx wird dabei zu dem x-Wert in der Mitte des Bereichs bzw. Intervalls von x bis $x + \Delta x$ in Beziehung gesetzt.

Ist $y = f(x)$, so bezeichnet $\frac{\Delta y}{\frac{y+(y+\Delta y)}{2}} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\frac{f(x)+f(x+\Delta x)}{2}}$ die zu der relativen Änderung von x gehörige bzw. durch sie ausgelöste relative Änderung der abhängigen Variablen y.

D 14.1.2 **Bogenelastizität**

Gegeben sei die stetige Funktion $y = f(x)$. Der Quotient der durchschnittlichen relativen Änderungen

$$\frac{\Delta y}{\frac{y+y+\Delta y}{2}} : \frac{\Delta x}{\frac{x+x+\Delta x}{2}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x + \frac{\Delta x}{2}}{y + \frac{\Delta y}{2}}$$

wird als **durchschnittliche Elastizität** oder **Bogenelastizität** der Funktion $y = f(x)$ in dem betreffenden Bereich bezeichnet.

Die Bogenelastizität sagt aus, um wieviel Prozent sich y im Durchschnitt in dem betreffenden Bereich ändert, wenn x um 1 % variiert wird. Manchmal wird anstelle des Begriffs Bogenelastizität der Ausdruck **Reagibilität** verwendet.

Anstelle der mit endlichen Größen definierten Bogenelastizität benutzt man in den Wirtschaftswissenschaften meistens deren Grenzwert für $\Delta x \to 0$. Es gilt dann mit $y = f(x)$ und $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x + \frac{\Delta x}{2}}{y + \frac{\Delta y}{2}} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{x + \frac{\Delta x}{2}}{f(x) + \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{2}} \\ &= f'(x)\frac{x}{f(x)} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

D 14.1.3 **Elastizität**

Die Funktion $y = f(x)$ sei differenzierbar, und es sei $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

$$\varepsilon_{yx} = f'(x)\frac{x}{f(x)} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}$$

heißt **Elastizität von** y **in Bezug auf** x.

Sind Missverständnisse ausgeschlossen, schreibt man anstelle von ε_{yx} auch nur ε. Bisweilen wird die Elastizität auch mit η_{xy} bezeichnet.

Im Gegensatz zur Bogenelastizität spricht man hier manchmal auch von der **Punktelastizität**.

Statt der obigen Definition der Elastizität verwendet man in den Wirtschaftswissenschaften häufig auch die Folgende:

$$\varepsilon_{yx} = \left|\frac{dy}{dx}\frac{x}{y}\right|.$$

Dadurch wird erreicht, dass die Elastizität nicht negativ wird. Diese Definition erscheint jedoch wenig zweckmäßig, denn das Vorzeichen gibt Auskunft über die Richtung der Änderungen.

Eine negative Elastizität bedeutet, dass eine relative Vermehrung (Verminderung) der einen ökonomischen Größe eine relative Verminderung (Vermehrung) der anderen Größe zur Folge hat. Eine positive Elastizität besagt, dass eine Vermehrung (Verminderung) eine Vermehrung (Verminderung) zur Folge hat.

Der Differentialquotient bzw. die erste Ableitung einer Funktion ist wieder eine Funktion von x. Das gilt auch für die Elastizität, also $\varepsilon = \varepsilon(x)$, und man spricht deshalb häufig von der **Elastizitätsfunktion**. Man muss deshalb, wie bei der ersten Ableitung, **zwischen der Elastizitätsfunktion und der Elastizität an einer bestimmten Stelle unterscheiden**.

B 14.1.4 a) $y = x^3 + x$; $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$. *Die Elastizitätsfunktion lautet:*

$$\varepsilon_{yx} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = (3x^2+1)\frac{x}{x^3+x} = \frac{3x^3+x}{x^3+x} = \frac{3x^2+1}{x^2+1}.$$

Für die Stellen $x = 1$ *bzw.* $x = 3$ *ergeben sich für die Elastizität die Werte* $\varepsilon_{yx} = 2$ *bzw.* $\varepsilon_{yx} = 2{,}8$.

b) $y = ax + b$; $\dfrac{dy}{dx} = a$; $\quad \varepsilon_{yx} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{x}{y} = a\dfrac{x}{ax+b} = \dfrac{ax}{ax+b}$.

Eine Gerade hat also eine konstante erste Ableitung (Steigung), aber eine variable Elastizität.

c) $y = x^n$; $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$; $\quad \varepsilon_{yx} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = nx^{n-1}\frac{x}{x^n} = n$.

Die Potenzfunktion $y = x^n$ *hat für* $n \neq 1$ *eine variable erste Ableitung (Steigung), aber eine konstante Elastizität.*

Für die Bestimmung der Elastizität als Quotient von relativen Änderungen ökonomischer Größen sollte man immer beachten, was die Ursache und was die Wirkung einer Veränderung ist. Die relative Änderung einer Größe, die als Ursache anzusehen ist, sollte immer im Nenner stehen; die relative Änderung der als Wirkung anzusehenden Größe im Zähler.

Aufgaben

Ü 14.1.1 *Bestimmen Sie die zu den folgenden Funktionen gehörigen Elastizitätsfunktionen.*

a) $y = 2x^2$; **b)** $y = 10 - 2x$; **c)** $y = 2x^2 + 3x$; **d)** $y = \frac{x^2}{x-2}$; **e)** $y = e^x$; **f)** $y = a^x$; **g)** $y = x^x$.

Ü 14.1.2 *An welcher Stelle hat die Funktion* $y = 3x + 2$ *die Elastizität* $\varepsilon_{yx} = 0{,}5$?

14.2 Regeln für Elastizitäten

Für die Bestimmung der ersten Ableitung einer Funktion mit einer unabhängigen Variablen wurden in Abschnitt 10.4 Regeln und Eigenschaften der ersten Ableitung angegeben. Ähnliche Regeln und Eigenschaften existieren auch für die Elastizität.

Elastizität eines Produktes von Funktionen
Es sei $u = f(x)$ und $v = g(x)$ und $y = uv = f(x)g(x)$.
Es ist dann $\varepsilon_{ux} = \frac{du}{dx}\frac{x}{u}$ und $\varepsilon_{vx} = \frac{dv}{dx}\frac{x}{v}$. Für die Elastizität von y in Bezug auf x ergibt sich:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yx} = \varepsilon_{uv,x} \quad &= \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = \frac{d(uv)}{dx}\frac{x}{uv} = \left(\frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u\right)\frac{x}{uv} \\ &= \frac{du}{dx}v\frac{x}{uv} + \frac{dv}{dx}u\frac{x}{uv} = \frac{du}{dx}\frac{x}{u} + \frac{dv}{dx}\frac{x}{v} = \varepsilon_{ux} + \varepsilon_{vx}.\end{aligned}$$

R 14.2.1 **Produktregel für Elastizitäten**
Die Elastizität eines Produktes uv zweier Funktionen
$u = f(x)$ und $v = g(x)$ ist gleich der Summe der Elastizitäten der beiden Faktoren u und v:

$$\varepsilon_{uv,x} = \varepsilon_{ux} + \varepsilon_{vx}.$$

Einen Spezialfall dieser Produktregel, der häufig Anwendung in der Wirtschaftstheorie findet, erhält man für $u = f(x) = x$.
Wegen $\frac{du}{dx} = 1$ ist dann $\varepsilon_{ux} = \frac{du}{dx}\frac{x}{u} = 1\frac{x}{x} = 1$, und es gilt:

R 14.2.2 $$\varepsilon_{xf(x),x} = 1 + \varepsilon_{f(x),x}$$

Das bedeutet: Die Elastizität des Produktes einer Funktion mit der unabhängigen Variablen, also die Elastizität der Funktion $y = xf(x)$, ist um 1 größer als die Elastizität der Funktion $f(x)$.

B 14.2.3 *Die Beziehung zwischen dem Preis* p *eines Gutes und der von diesem Gut nachgefragten Menge* x *kann durch eine Nachfragefunktion* $x = x(p)$ *beschrieben werden.* ε_{xp} *ist dann die Elastizität der Nachfrage in Bezug auf den Preis oder die* **Preiselastizität der Nachfrage**. *Bezieht sich* $x = x(p)$ *auf ein Unternehmen und kann die nachgefragte Menge auch vollständig abgesetzt werden, dann ist* $E = px = px(p)$ *der Erlös. Es gilt dann nach* R 14.2.2:

$$\varepsilon_{Ep} = \varepsilon_{px(p),p} = 1 + \varepsilon_{xp},$$

d. h. die Preiselastizität des Erlöses ist um 1 *größer als die Preiselastizität der Nachfrage.*

Zwischen der Elastizität der Funktion $f(x)$ und der ersten Ableitung der Funktion $xf(x)$ besteht folgender Zusammenhang:
Es ist $\frac{d(xf(x))}{dx} = f(x) + x\frac{df(x)}{dx} = f(x) + f(x)\frac{x}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$.
Es gilt also:

R 14.2.4 $$\frac{d(xf(x))}{dx} = f(x)(1 + \varepsilon_{f(x),x})$$

B 14.2.5 *Es wird angeknüpft an* B 14.2.3. *Nach* R 14.2.4 *gilt*:

$\frac{dE}{dp} = \frac{d(px(p))}{dp} = x(1 + \varepsilon_{xp})$, *d. h. der Grenzerlös in Bezug auf den Preis ist gleich dem Produkt aus Menge und der um* 1 *vermehrten Preiselastizität der Nachfrage.*

Elastizität eines Quotienten von Funktionen
Es sei wieder $u = f(x)$ und $v = g(x)$ sowie $y = \frac{u}{v}$. Für die Elastizität von y in Bezug auf x erhält man dann:

$$\varepsilon_{yx} = \varepsilon_{\frac{u}{v},x} = \frac{d(\frac{u}{v})}{dx}\frac{x}{\frac{u}{v}} = \frac{\frac{du}{dx}v - \frac{dv}{dx}u}{v^2}\frac{xv}{u}$$
$$= \frac{du}{dx}v\frac{xv}{v^2u} - \frac{dv}{dx}u\frac{xv}{v^2u} = \frac{du}{dx}\frac{x}{u} - \frac{dv}{dx}\frac{x}{v} = \varepsilon_{ux} - \varepsilon_{vx}.$$

R 14.2.6 **Quotientenregel für Elastizitäten**
Die Elastizität eines Quotienten von Funktionen ergibt sich aus der Differenz der Elastizität der Funktion im Zähler und der Elastizität der Funktion im Nenner:
$$\varepsilon_{\frac{u}{v},x} = \varepsilon_{ux} - \varepsilon_{vx}.$$

Aus der Quotientenregel folgt für den Spezialfall $v = g(x) = x$ eine Beziehung für die Elastizität einer Durchschnittsfunktion. Die Durchschnittsfunktion der Funktion $y = f(x)$ ist definiert als $\overline{y} = \frac{f(x)}{x}$. Aus R 14.2.6 folgt dann:

R 14.2.7 **Elastizität einer Durchschnittsfunktion**
Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$ und ihre Durchschnittsfunktion $\overline{y} = \frac{f(x)}{x}$.
Dann gilt:
$$\varepsilon_{\overline{y}x} = \varepsilon_{yx} - 1.$$

Die Elastizität der Durchschnittsfunktion $\overline{y} = \frac{f(x)}{x}$ einer Funktion $y = f(x)$ ist um 1 kleiner als die Elastizität ε_{yx} der Funktion $f(x)$.

B 14.2.8 *Es sei* $K = K(x)$ *die Kostenfunktion einer Unternehmung und* $k = \frac{K(x)}{x}$ *die Durchschnittskostenfunktion. Dann gilt nach* R 14.2.7: $\varepsilon_{kx} = \varepsilon_{Kx} - 1$, *d. h. die Elastizität der Durchschnittskosten in Bezug auf die Menge ist um* 1 *kleiner als die Elastizität der Gesamtkosten.*

Elastizität der Umkehrfunktion
Es sei $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion und $x = g(y)$ die Umkehrfunktion dazu. Dann gilt bekanntlich:
$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dg(y)}{dy}}.$$
Für die Elastizitäten folgt unter Verwendung dieser Beziehung:
$$\varepsilon_{yx} = \frac{df(x)}{dx}\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dg(y)}{dy}}\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{dg(y)}{dy}}\frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\frac{dg(y)}{dy}\frac{y}{x}} = \frac{1}{\varepsilon_{xy}}.$$