

Elementare Grundlagen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Bearbeitet von
Prof. Dr. Jochen Schwarze

8., vollständig überarbeitete Auflage. 2010. Taschenbuch. 140 S. Paperback
ISBN 978 3 482 56648 6
Gewicht: 257 g

Wirtschaft > Betriebswirtschaft: Theorie & Allgemeines > Wirtschaftsmathematik und -
statistik

Zu [Inhaltsverzeichnis](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

The logo for beck-shop.de features the text 'beck-shop.de' in a bold, red, sans-serif font. Above the 'i' in 'shop' are three red dots of increasing size. Below the main text, 'DIE FACHBUCHHANDLUNG' is written in a smaller, red, all-caps, sans-serif font.

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

2 Zahlen

2.1 Zahlbegriffe

Für die späteren Kapitel werden verschiedene Zahlbegriffe benötigt, die hier kurz zusammengestellt sind.

Natürliche Zahlen

Die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, die man beim Abzählen irgendwelcher Gegenstände verwendet, heißen natürliche Zahlen. Die Gesamtheit der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. (Manchmal wird zu $\mathbb{N}$ auch die Null hinzugenommen. Man schreibt dann auch $\mathbb{N}_0$.)

Die natürlichen Zahlen $2, 4, 6, 8, \dots$, die ohne Rest durch 2 teilbar sind, sind die **geraden** und $1, 3, 5, 7, \dots$ die **ungeraden** Zahlen. Ist n eine beliebige natürliche Zahl, so ist $2n$ eine gerade und $2n + 1$ eine ungerade Zahl. $2n$ bzw. $2n + 1$ werden deshalb allgemein für die Bezeichnung gerader bzw. ungerader Zahlen verwendet.

Ganze Zahlen

Die Zahlen $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ heißen ganze Zahlen. Die Gesamtheit der ganzen Zahlen wird meistens mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Zu den ganzen Zahlen gehören alle natürlichen Zahlen. Auch bei den ganzen Zahlen wird zwischen geraden und ungeraden Zahlen unterschieden.

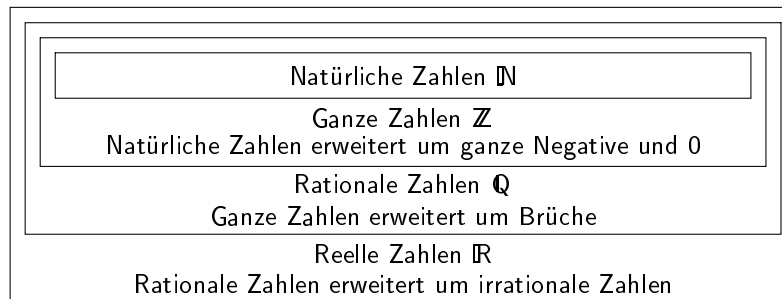
Rationale Zahlen

Die Zahlen, die sich als Quotient $\frac{p}{q}$ zweier ganzer Zahlen p und q ($q \neq 0$) darstellen lassen, heißen rationale Zahlen. Die Gesamtheit der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Alle ganzen Zahlen gehören zu den rationalen Zahlen (z. B. $\frac{4}{2} = 2$ oder $\frac{15}{3} = 5$). Rationale Zahlen können als Bruch zweier ganzer Zahlen ($\frac{p}{q}$) oder als Dezimalbruch geschrieben werden (z. B. $0,625 = \frac{5}{8}$ oder $4,25 = \frac{17}{4}$). Die Dezimalbrüche können endlich (s. o.) oder unendlich-periodisch sein. Unendlich-periodische Dezimalbrüche haben eine sich unendlich oft wiederholende Ziffernfolge (z. B. $\frac{2}{3} = 0,666\dots = 0,\overline{6}$ oder $\frac{4}{7} = 0,571428571428\dots = 0,\overline{571428}$).

Reelle Zahlen

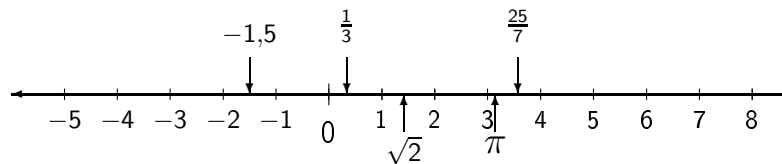
Zahlen, die sich nicht als Quotienten zweier ganzer Zahlen darstellen lassen, heißen **irrationale Zahlen**. Sie ergeben immer **unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche**. Irrationale Zahlen sind z. B. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$. Auf Einzelheiten dazu kann nicht eingegangen werden. (Vgl. dazu z. B. Band 1 der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, wo in Beispiel 3.3.13 gezeigt wird, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist.) Rationale und irrationale Zahlen zusammen ergeben die reellen Zahlen, die mit $\mathbb{R}$ bezeichnet werden.

Den hierarchischen Zusammenhang der Zahlenbegriffe verdeutlicht die folgende Figur 2.1.1.



F 2.1.1 Zahlbegriffe

Die reellen Zahlen können zeichnerisch auf der so genannten **Zahlengeraden** veranschaulicht werden (Figur 2.1.2). Die ganzen Zahlen entsprechen den Strichen der Skaleneinteilung. Rationale und irrationale Zahlen entsprechen Punkten auf der Zahlengeraden.



F 2.1.2 Zahlengerade

2.2 Zahlenarten

Zahlen wie 3; 2,7; $\frac{12}{7}$; $\sqrt{2}$ heißen **bestimmte Zahlen**. Vielfach beziehen sich mathematische Rechenoperationen aber auf **allgemeine Zahlensymbole** oder **allgemeine Zahlen**. Dafür werden meistens kleine Buchstaben des lateinischen Alphabets verwendet: a, b, c usw.

Zahlen sind häufig bestimmten Sachverhalten zugeordnet. Sie heißen dann **benannte Zahlen**. Zu solchen Zahlen gehört die Angabe einer **Dimension**.

- B 2.2.1** a) *Gewicht eines Paketes: 3,7 kg.*
 b) *Einkommen eines Arbeiters: 3.580 €/Monat.*

Sind Missverständnisse ausgeschlossen, verzichtet man auf die Angabe der Dimension.

Zahlen, denen nicht irgendein Sachverhalt zugeordnet ist, heißen **unbenannte Zahlen**.

2.3 Zahlensysteme

Heute werden üblicherweise zum Rechnen Zahlen des so genannten Dezimal- oder Zehner-systems verwendet. Es gibt jedoch auch andere Zahlensysteme, auf die hier kurz eingegan-gen wird. Zunächst wird der Aufbau des Dezimalsystems betrachtet.

Dezimalsystem

Bei den Zahlen des Dezimalsystems werden 10 Ziffern verwendet, und zwar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Bei der Darstellung einer Zahl spielen die Ziffern und die Stelle, an der eine Ziffer steht, eine Rolle, wobei die Stellen von rechts nach links gezählt werden. Man unterscheidet deshalb:

- **Nennwert**

Das ist der „eigentliche“ Wert der Ziffer, also 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- **Stellenwert**

Das ist der Wert der Stelle, an der die Ziffer steht.

Beim Dezimalsystem sind die Stellenwerte Potenzen von Zehn. Es gilt:

Stelle:	n-te	...	6	5	4	3	2	1
Stellenwert:	$10^{(n-1)}$	...	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Stellen- bezeichnung		...	hundert- tausend	zehn- tausend	tausend	hundert	zehn	eins

Der Wert einer Ziffer innerhalb einer Zahl ergibt sich als:

Ziffernwert = Nennwert $\times$ Stellenwert.

Der Zahlenwert ergibt sich als Summe der Ziffernwerte:

Zahlenwert = Summe der Ziffernwerte = Summe (Nennwert $\times$ Stellenwert).

Das folgende Beispiel verdeutlicht die Zusammenhänge.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{B 2.3.1} \quad 20.834 & = & 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \\
 & = & 20.000 \\
 & + & 800 \\
 & + & 30 \\
 & + & 4
 \end{array}$$

Zahlensysteme wie das beschriebene Dezimalsystem nennt man Stellenwertsysteme.

D 2.3.2

Aufbau eines Stellenwertsystems:

Es stehen N Ziffern (0, 1, 2, 3, ..., $N-1$) zur Verfügung. a_i bezeichne die an i -ter Stelle stehende Ziffer. Dann ist der Nennwert a_i und der Stellenwert N^{i-1} . Für den Ziffernwert z_i gilt dann

$$z_i = a_i N^{i-1}$$

Der Wert einer n -stelligen Zahl a mit den Ziffern $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ beträgt dann

$$a = \sum_{i=1}^n a_i N^{i-1}.$$

Dualsystem

Das Dualsystem verwendet nur die Ziffern 0 und 1. Die Stellenwerte ergeben sich als Potenzen von 2. Beim Dualsystem ergeben sich folgende Stellenwerte:

Stelle:	n-te	...	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Stellenwert:	$2^{(n-1)}$	...	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Stellenwert als Dezimalzahl:		...	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Die folgenden Beispiele zeigen Dualzahlen und ihren Wert im Dezimalsystem und wie Dual- in Dezimalzahlen umgewandelt werden können.

B 2.3.3 a) $1100011 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 32 + 2 + 1 = 99$

b) $101111 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 8 + 4 + 2 + 1 = 47$

Ü 2.3.4 Welchen Wert haben die folgenden Dualzahlen im Dezimalsystem?

a) 1010101, **b)** 1111010, **c)** 1110011.

Um die zu einer Dezimalzahl gehörige Dualzahl zu bestimmen, wird so oft wie möglich durch 2 dividiert. Die Reste dieser Divisionen ergeben dann die Ziffern der Dualzahl, wobei die Ziffern entgegengesetzt zu der Reihenfolge geschrieben werden, in der sie bestimmt wurden.

B 2.3.5

137	:	2	=	68	Rest	1
68	:	2	=	34	Rest	0
34	:	2	=	17	Rest	0
17	:	2	=	8	Rest	1
8	:	2	=	4	Rest	0
4	:	2	=	2	Rest	0
2	:	2	=	1	Rest	0
1	:	2	=	0	Rest	1

Dezimalzahl 137, Dualzahl 10001001.

Ü 2.3.6 Die folgenden Dezimalzahlen sind in Dualzahlen umzuwandeln.

a) 37, **b)** 286, **c)** 111.

Mit Dualzahlen kann im Prinzip genauso gerechnet werden wie mit Dezimalzahlen. Darauf wird hier jedoch nicht weiter eingegangen.

In Computern werden Zeichen (Zahlen, Buchstaben usw.) über das Dualsystem verschlüsselt. Das hat zur Folge, dass bei Geräten zur Informationsverarbeitung, -speicherung und -übertragung Maßangaben häufig Zahlenwerte haben, die Potenzen von 2 sind oder sich daraus zusammensetzen, z. B. 256, 512 oder 640 (= 512 + 128).

Hexadezimalsystem

Ein weiteres Stellenwertsystem, das bei der computerinternen Zeichendarstellung eine Rolle spielt, ist das Hexadezimalsystem. Es verwendet 16 Ziffern und als Stellenwerte Potenzen

von 16. Als Ziffern verwendet man die 10 Ziffern des Dezimalsystems 0, 1, ..., 9 und die ersten 6 großen Buchstaben des lateinischen Alphabets:

Ziffer:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Dezimal-Wert:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Additionssysteme

Neben Stellenwertsystemen gibt es andere Systeme, z. B. Additionssysteme, bei denen jede Ziffer einen bestimmten Wert ausdrückt, unabhängig von der Stelle, an der diese Ziffer steht. Am bekanntesten ist das System der Römischen Zahlen. Dieses System verwendet folgende „Ziffern“:

M	für den Dezimalwert	1.000
D	für den Dezimalwert	500
C	für den Dezimalwert	100
L	für den Dezimalwert	50
X	für den Dezimalwert	10
V	für den Dezimalwert	5
I	für den Dezimalwert	1

Bei den römischen Zahlen ist zu beachten, dass die Ziffern prinzipiell nach absteigendem Wert geordnet werden. Steht eine Ziffer abweichend von dieser Regel, erhält sie einen negativen Wert.

- B 2.3.7 a)** Die römische Zahl MCDXXIX hat den Wert
 $1.000 - 100 + 500 + 10 + 10 - 1 + 10 = 1.429$ im Dezimalsystem.
b) Die Dezimalzahl 1.848 lautet als römische Zahl MDCCCXLVIII

- Ü 2.3.8** Die folgenden römischen Zahlen sind in Dezimalzahlen umzuwandeln.
a) MDCXCIII **b)** MCMXXXVII, **c)** MDCCXLVI.

- Ü 2.3.9** Die folgenden Dezimalzahlen sind in römische Zahlen umzuwandeln.
a) 137, **b)** 1.286, **c)** 691.