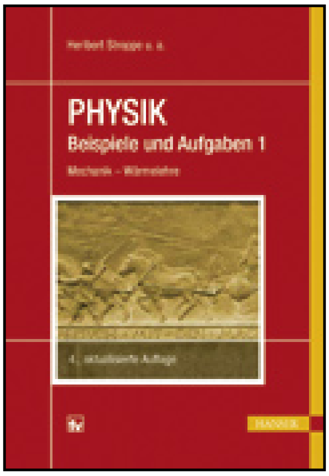
Physik - Beispiele und Aufgaben

Band 1: Mechanik - Wärmelehre

Bearbeitet von
Heribert Stroppe

4., aktualisierte Auflage 2012. Taschenbuch. 159 S. Paperback
ISBN 978 3 446 42603 0
Format (B x L): 16,7 x 24,1 cm
Gewicht: 309 g

HANSER



Leseprobe

Heribert Stroppe

Physik - Beispiele und Aufgaben

Band 1: Mechanik - Wärmelehre

ISBN: 978-3-446-42603-0

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser.de/978-3-446-42603-0

sowie im Buchhandel.

LÖSUNGEN

1 Ist s der Gesamtweg und t die Gesamtfahrzeit, so folgt a) mit $t_1 = t_2 = t/2$, $s_1 = v_1 t_1 = v_1 t/2$ und $s_2 = v_2 t_2 = v_2 t/2$ als mittlere Geschwindigkeit

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 50\ \text{km/h} \quad \text{(arithmetisches Mittel)},$$

b) mit $s_1 = s_2 = s/2$, $t_1 = s_1/v_1 = s/(2v_1)$ und $t_2 = s_2/v_2 = s/(2v_2)$:

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{2}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 48\ \text{km/h} \quad \text{(harmonisches Mittel)}.$$

2 Das Weg-Zeit-Gesetz und das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz lauten für den vorliegenden Fall einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit $s_0 = 0$:

$$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t, \qquad v = at + v_0.$$

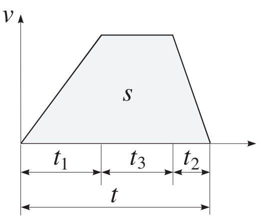
Eliminiert man die Beschleunigung a aus beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$s = \frac{(v + v_0)t}{2}.$$

Mit $v = 2v_0$ erhält man daraus $v_0 = 2s/(3t) = 10$ m/s und $v = 20$ m/s.

3 Der Anhalteweg s setzt sich zusammen aus dem während der Reaktionszeit t_1 zurückgelegten Weg $s_1 = v_0 t_1$ und dem eigentlichen Bremsweg s_2, der sich aus $v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$ mit der Endgeschwindigkeit $v = 0$ zu $s_2 = -v_0^2/(2a)$ ergibt: $s = s_1 + s_2 = v_0 t_1 - v_0^2/(2a)$. Als Lösung dieser quadratischen Gleichung für v_0 folgt $v_0 = at_1 + \sqrt{a^2 t_1^2 - 2as} = 16{,}8$ m/s $= 60{,}3$ km/h. Die Bremszeit ist $t_2 = -v_0/a = 2{,}6$ s und somit die Anhaltezeit $t = t_1 + t_2 = 3{,}4$ s.

4 (Bild) a) Es muss von einem Bewegungsablauf ausgegangen werden, wie im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellt: einer Beschleunigungsphase bis zur Maximalgeschwindigkeit v von der Dauer $t_1 = v/a_1$, einer Verzögerungsphase $t_2 = -v/a_2$ ($a_2 < 0$) und ggf. einer dazwischenliegenden Phase t_3 mit der konstanten Geschwindigkeit v. Der insgesamt zurückgelegte Weg s ergibt sich als Flächeninhalt des Trapezes im v,t-Diagramm zu $s = v(t + t_3)/2$; s ist eine Konstante, v und die Gesamtfahrzeit t sind variabel. Daraus folgt $t_3 = (2s/v) - t$. Somit wird



$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{v}{a_1} - \frac{v}{a_2} + \left(\frac{2s}{v} - t\right), \qquad t = \frac{v}{2a_1} - \frac{v}{2a_2} + \frac{s}{v}. \tag{1}$$

Die kürzeste Fahrzeit ergibt sich als Extremwert der Funktion (1) $t = t(v)$ durch Nullsetzen der ersten Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{2a_1} - \frac{1}{2a_2} - \frac{s}{v^2} = 0; \qquad v = v_1 = \sqrt{\frac{2a_1 a_2 s}{a_2 - a_1}} = 41\ \text{m/s}\ \ (\approx 148\ \text{km/h}).$$

b) Aus $v = \sqrt{2as + v_0^2}$ folgt mit $v_0 = 0$ und $v = v_1$ die Beschleunigungsstrecke $s_1 = v_1^2/(2a_1) = 350$ m und mit $v_0 = v_1$ und $v = 0$ der Bremsweg $s_2 = -v_1^2/(2a_2) = 168$ m. Wie man sieht, ist $s_1 + s_2 = s$, d. h., zwischen Beschleunigungs- und Bremsvorgang liegt keine Phase mit konstanter Geschwindigkeit ($t_3 = 0$, wie aus obiger Beziehung für t_3 mit $v = v_1$ folgt). c) Die Mindestfahrzeit ist nach (1) $t = 25{,}3$ s (mit $t_1 = 17{,}1$ s, $t_2 = 8{,}2$ s und $t_3 = 0$). d) Mit $v = v_2 = (130/3{,}6)$ m/s erhält man nach (1) $t = 25{,}5$ s ($t_1 \approx 15{,}1$ s; $t_2 = 7{,}2$ s; $t_3 = 3{,}2$ s), und es ist $s_1 = a_1 t_1^2/2 = 272$ m, $s_2 = -a_2 t_2^2/2 = 130$ m und $s_3 = v_2 t_3 = 116$ m.

5 In der Zeit $t_i = i$ Sekunden wird bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung die Strecke $s_i = v_0 t_i + a t_i^2/2$ zurückgelegt, in der i-ten Sekunde also die Strecke

$$\Delta s_i = s_i - s_{i-1} = v_0 t_1 + \frac{a}{2}(t_i^2 - t_{i-1}^2)$$
$$= v_0 t_1 + \frac{a}{2}(t_i - t_{i-1})(t_i + t_{i-1}) = v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1 (t_i + t_{i-1}).$$

Für $\Delta s_6 = 6$ m und $\Delta s_{11} = 8$ m folgen somit die beiden Gleichungen

$$6\text{ m} = v_0 \cdot 1\text{ s} + \frac{a}{2} \cdot 11\text{ s}^2, \qquad 8\text{ m} = v_0 \cdot 1\text{ s} + \frac{a}{2} \cdot 21\text{ s}^2,$$

woraus man $a = 0{,}4\text{ m/s}^2$ und $v_0 = 3{,}8$ m/s erhält.

6 Die von A und B zurückgelegten Wegstrecken sind

$$s_A = \frac{a}{2}(t + \Delta t)^2 + v_{0A}(t + \Delta t), \qquad s_B = \frac{a}{2} t^2 + v_{0B} t.$$

a) Für $t = 0$ und $\Delta t = 10$ s ist $s_B = 0$ und $s_A = 45$ m. b) Die Einholbedingung lautet $s_A = s_B$, woraus als Einholzeit folgt

$$t_1 = \frac{(a/2)(\Delta t)^2 + v_{0A}\Delta t}{v_{0B} - v_{0A} - a\Delta t} = 9\text{ s}.$$

c) Es ist dann $s_A = s_B = 128{,}25$ m. d) Es muss $(v_{0B} - v_{0A} - a\Delta t) > 0$, d. h. $a < (v_{0B} - v_{0A})/\Delta t = 1\text{ m/s}^2$ sein.

7 a) Die mittlere Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 ist

$$\overline{v} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{B(t_2 - t_1) + C(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} = B + C(t_2 + t_1).$$

Für $t_1 = 0$ und $t_2 = 1$ s wird $\overline{v}_1 = 3$ m/s, für $t_1 = 1$ s und $t_2 = 2$ s ist $\overline{v}_2 = 5$ m/s, und zwischen der zweiten und dritten Sekunde ist $\overline{v}_3 = 7$ m/s.
b) Die Momentangeschwindigkeit ist $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = B + 2Ct$. Damit wird die mittlere Beschleunigung zwischen t_1 und t_2:

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{2C(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 2C = 2\text{ m/s}^2 \quad \text{(gleichmäßig beschleunigte Bewegung).}$$

8 a) Als Beschleunigung bzw. Verzögerung erhält man mit der momentanen Stauchung $x = x(t)$ und der momentanen Geschwindigkeit $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} v.$$

Mit $a = -\beta x$ folgt durch Trennung der Veränderlichen v und x

$$v\,\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}x = -\beta x\,\mathrm{d}x; \qquad \int_{v_0}^{0} v\,\mathrm{d}v = -\beta \int_0^{x_1} x\,\mathrm{d}x$$

und nach Ausführung der Integration mit $v_0 = 4{,}5$ m/s: $-v_0^2/2 = -\beta x_1^2/2$, $x_1 = v_0/\sqrt{\beta} = 10$ cm.
b) Mit $a_0 = 0$ und $a_1 = -\beta x_1 = -v_0\sqrt{\beta}$ wird

$$\overline{a} = \frac{a_0 + a_1}{2} = -\frac{1}{2} v_0 \sqrt{\beta} = -100{,}6\text{ m/s}^2.$$

9 a) Es ist $a = -kv^2 = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}v/v^2 = -k\,\mathrm{d}t$,

$$\int_{v_0}^{v_1} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -\int_0^{t_1} k\,\mathrm{d}t, \quad \left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v_1} = -\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) = -kt_1, \quad t_1 = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{v_0 - v_1}{k v_0 v_1}.$$

Mit $v_0 = 50$ m/s und $v_1 = 1$ m/s erhält man $t_1 = 24{,}5$ s.

b) Aus $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$ folgt mit a) $v_1 = v_0/(1 + kv_0t_1)$ bzw. allgemein $v = v_0/(1 + kv_0t)$:

$$s_1 = \int_0^{t_1} v\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_1} \frac{v_0}{1 + kv_0t}\mathrm{d}t. \quad \text{Substitution } z = 1 + kv_0t;\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = kv_0,\ \mathrm{d}t = \frac{1}{kv_0}\,\mathrm{d}z:$$

$$s_1 = \frac{1}{k}\int_{z_0}^{z_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \quad \text{mit } z_0 = 1 \text{ (entsprechend } t = 0) \text{ und } z_1 = 1 + kv_0t_1;$$

$$s_1 = \frac{1}{k}\left[\ln z\right]_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{k}(\ln z_1 - \ln z_0) = \frac{1}{k}\ln\frac{z_1}{z_0} = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0t_1) = \frac{1}{k}\ln\frac{v_0}{v_1}.$$

Für $v_1 = 1$ m/s folgt ein Bremsweg von $s_1 \approx 98$ m. In Wirklichkeit wird das Flugzeug nach dem Aufsetzen zusätzlich über das Fahrwerk gebremst.

10 a) 3 min; b) 3,6 km.

11 $1{,}2 \cdot 10^5$ m/s^2.

12 a) 0,13 m/s^2; b) 3,6 min.

13 a) 1,4 m/s^2; b) 17,0 m/s (61,2 km/h).

14 a) -3 m/s^2; b) 6,5 m.

15 a) 10 m/s^2; b) 432 km/h; c) 5 m, 115 m.

16 a) $t_1 = 12$ s; b) $\overline{a} = (v_1 - v_0)/t_1 = 2C + 3Dt_1 = 0{,}64$ m/s^2.

17 $a = kt$ mit $k = 6 \cdot 10^{-3}$ m/s^3; $v = kt_1^2/2 = 108$ km/h, $s = kt_1^3/6 = 1$ km.

18 Die Fallzeit der n-ten Kugel beträgt mit $n = 1, 2, \ldots$ (von unten gezählt): $t_n = n\,\Delta t$. Somit gilt für die jeweilige Fallhöhe $h_n = gt_n^2/2 = n^2g(\Delta t)^2/2 = n^2h_1$. Die Abstände benachbarter Kugeln $h_{n+1} - h_n = (n+1)^2h_1 - n^2h_1 = (2n+1)h_1$, also $(h_1), 3h_1, 5h_1, 7h_1, \ldots$, bilden hiernach in Einheiten von h_1 (von unten nach oben) die Folge der ungeraden Zahlen.

19 Ist $h = (g/2)t^2$ die Fallhöhe über dem oberen Messpunkt, so ist mit $\Delta h = 10{,}0$ m und $\Delta t = 0{,}7$ s die Fallhöhe über dem unteren Messpunkt $h + \Delta h = (g/2)(t + \Delta t)^2$. Daraus folgt

$$\Delta h = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{g}{2}t^2; \qquad t = \frac{\Delta h}{g\,\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} = 1{,}106 \text{ s}.$$

Somit wird $h = 6{,}0$ m; $v_1 = \sqrt{2gh} = 10{,}85$ m/s; $v_2 = \sqrt{2g(h + \Delta h)} = 17{,}72$ m/s.

20 Höhe h und Geschwindigkeit v der Rakete (Wurfgeschoss) zum Zeitpunkt t nach dem Start mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 sind gegeben durch

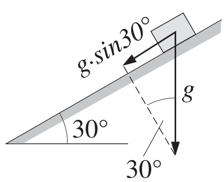
$$h = v_0t - \frac{g}{2}t^2, \qquad v = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v_0 - gt.$$

a) Im höchsten Punkt (Umkehrpunkt) ist $v = 0$, woraus als Steigzeit folgt $t_S = v_0/g = 50$ s.
b) Mit t_S erhält man die maximale Steighöhe $h_{\max} = 12\,237$ m. c) Für $t_1 = 40$ s und $t_2 = 60$ s sind die Momentangeschwindigkeiten $v_1 \approx 98$ m/s (Aufwärtsbewegung) und $v_2 \approx -98$ m/s (Abwärtsbewegung). d) Für $h = 7840$ m folgen aus obiger Beziehung für die Steig- bzw. Fallhöhe die Flugzeiten

$$t_{3,4} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{2h}{g}}; \qquad t_3 = 20 \text{ s}, \qquad t_4 = 80 \text{ s}.$$

Ebenso wie t_1 und t_2 liegen t_3 und t_4 symmetrisch zur Steigzeit $t_S = 50$ s.

21 a) Für die Endgeschwindigkeit bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung gilt allgemein $v = \sqrt{2as + v_0^2}$. Bei der Aufwärtsbewegung auf der schiefen Ebene (Bild) ist die Beschleunigung a gleich der Hangabtriebskomponente der Fallbeschleunigung g, welche hier als Verzögerung wirkt, also $a = -g\sin 30°$ $= -g/2$. Im obersten erreichten Punkt ist $v = 0$. Somit ist die zurückgelegte Wegstrecke $s = v_0^2/g = 40{,}8$ m. b) Aus $v = at + v_0$ erhält man als Steigzeit $t = (v - v_0)/a = 2v_0/g = 4$ s.



22 $h = 5{,}1$ m.

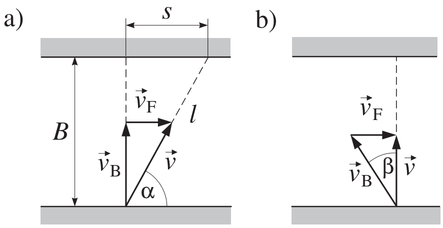
23 Nach 4 s in 721,5 m Höhe.

24 a) 7,33 s; b) 8,35 s.

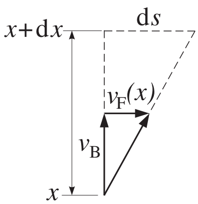
25 a) 14,0 m/s (50,4 km/h); b) 2,86 s.

26 $v = 29{,}62$ m/s (106,6 km/h); $h = 39{,}62$ m.

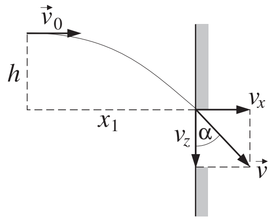
27 a) Im Bild (a) ist $\boldsymbol{v}_\mathrm{F}$ der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit des Flusses (gegenüber dem Ufer), $\boldsymbol{v}_\mathrm{B}$ der Vektor der Geschwindigkeit des Bootes (gegenüber dem Fluss), $\boldsymbol{v}$ der Vektor der resultierenden Geschwindigkeit des Bootes (gegenüber dem Ufer), B die Breite des Flusses, l die Länge des vom Boot zurückgelegten Weges über den Fluss und s die Abdrift. Es gilt $v_\mathrm{B} : v_\mathrm{F} = B : s$; $v_\mathrm{F} = v_\mathrm{B} s/B = 0{,}6$ m/s, $v = \sqrt{v_\mathrm{B}^2 + v_\mathrm{F}^2} = 2{,}09$ m/s; $\tan\alpha = v_\mathrm{B}/v_\mathrm{F}$, $\alpha = 73{,}3°$; die Zeit zum Übersetzen ist $t = B/v_\mathrm{B} = 105$ s. b) $\boldsymbol{v}$ muss senkrecht zum Ufer verlaufen. Nach Bild (b) ist $\sin\beta = v_\mathrm{F}/v_\mathrm{B}$, $\beta = 17{,}5°$. Aus $v = B/t$ folgt mit $v = v_\mathrm{B}\cos\beta$: $t = B/(v_\mathrm{B}\cos\beta) = 110$ s. c) Es muss wie bei a) immer senkrecht zum Ufer gesteuert werden. Nach dem Prinzip der ungestörten Überlagerung der Teilbewegungen hat die Strömungsgeschwindigkeit und damit die Abdrift auf die Dauer der Überfahrt keinen Einfluss; denn es gilt nach Bild (a) für die Fahrzeit $t = l/v = B/v_\mathrm{B} = 105$ s (Strahlensatz).



Aufgabe 27



Aufgabe 28



Aufgabe 29

28 (Bild) Ist ds der Abtrieb, den das Boot bei der Fahrt senkrecht zur Strömung von x nach $x + \mathrm{d}x$ erfährt, so gilt $v_\mathrm{F}(x) : v_\mathrm{B} = \mathrm{d}s : \mathrm{d}x$, d. h., es ist

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{v_\mathrm{B}} v_\mathrm{F}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{v_\mathrm{m}}{v_\mathrm{B}}\left(1 - \frac{4x^2}{B^2}\right)\mathrm{d}x;$$

$$s = \frac{v_\mathrm{m}}{v_\mathrm{B}} \int\limits_{-B/2}^{+B/2} \left(1 - \frac{4x^2}{B^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{v_\mathrm{m}}{v_\mathrm{B}}\left[x - \frac{4x^3}{3B^2}\right]_{-B/2}^{+B/2} = \frac{2}{3} B \frac{v_\mathrm{m}}{v_\mathrm{B}} = 42 \text{ m.}$$

29 (Bild) Gegeben sind h und x_1. a) Die Dauer zwischen dem Austritt eines Flüssigkeitsteilchens aus der Rohröffnung und seinem Auftreffen auf die Wand ist gleich der Zeit t_1, die es auch für den freien Fall aus der Höhe h benötigen würde, also $t_1 = \sqrt{2h/g} = 0{,}64$ s (folgt aus $h = gt^2/2$). Horizontale und vertikale Geschwindigkeitskomponente v_x und v_z sind unabhängig voneinander. v_x bleibt konstant gleich v_0; es ist daher $v_x = v_0 = x_1/t_1 = 6{,}26$ m/s. b) Die Vertikalkomponente ist wie im freien Fall $v_z = \sqrt{2gh} = 6{,}26$ m/s. Damit wird $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = 8{,}86$ m/s; $\tan\alpha = v_x/v_z$, $\alpha = 45°$.

30 Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist (s. Bild vorn) $v_{0x} = v_0\cos\alpha_0$, $v_{0z} = v_0\sin\alpha_0$. Für einen beliebig späteren Zeitpunkt t gilt

$$v_x = v_{0x} = v_0\cos\alpha_0, \qquad v_z = v_{0z} - gt = v_0\sin\alpha_0 - gt.$$

Wegen $v_x = x/t = \text{const}$ und $v_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ folgen hieraus die Weg-Zeit-Gesetze

$$x(t) = v_x t = v_0 t\cos\alpha_0, \qquad z(t) = \int\limits_0^t v_z\,\mathrm{d}t = v_0 t\sin\alpha_0 - \frac{g}{2}t^2.$$

Einsetzen von $t = x/(v_0\cos\alpha_0)$ in $z(t)$ ergibt die Gleichung der Wurfparabel

$$z(x) = x\tan\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2.$$

31 a) Aus der Bahngleichung (s. obige Aufgabe 30) folgt für $z = 0$ die Reichweite

$$x_W = \frac{2v_0^2}{g} \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha_0$$

mit dem Maximalwert $x_{max} = v_0^2/g$ für $\alpha_0 = 45°$. Mit $x_{max} = 8000$ km erhält man daraus als Startgeschwindigkeit $v_0 = 8{,}86$ km/s. Ihre Horizontalkomponente ist $v_{0x} = v_0 \cos 45° = 6{,}26$ km/s; sie bleibt während des gesamten Fluges konstant. Im Gipfelpunkt der Bahn ist sie wegen $v_z = 0$ gleich der Raketengeschwindigkeit. b) Aus $v_{0x} = x_{max}/t_1 = 6{,}26$ km/s folgt als Gesamtflugdauer $t_1 = 1277$ s, die Vorwarnzeit beträgt also $t_1/2 = 10$ min 38 s. c) Die Zielgeschwindigkeit ist $v_0 = 8{,}86$ km/s, vgl. a). d) Die maximale Höhe z_{max} erhält man aus dem Fallgesetz $z = gt^2/2$ für $t = t_1/2 = 638$ s, vgl. b), zu $z_{max} = 2000$ km.

32 a) Die Gleichung für die Geschossbahn (Wurfparabel) lautet (vgl. Lösung zu Aufgabe 30)

$$z(x) = x \tan\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} x^2. \tag{1}$$

Mit der angegebenen Umformung für $1/\cos^2\alpha_0$ folgt durch Lösung der quadratischen Gleichung für $\tan\alpha_0$:

$$\tan\alpha_0 = \frac{v_0^2}{gx} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2 - \frac{2v_0^2 z}{gx^2} - 1}. \tag{2}$$

Durch Einsetzen der Zielkoordinaten (x_1, z_1) folgen hieraus die beiden möglichen Abschusswinkel $\alpha_{0,1}$ und $\alpha_{0,2}$. b) Reelle Werte für $\tan\alpha_0$ ergeben sich nur, wenn in (2) für die Diskriminante gilt

$$\left(\frac{v_0^2}{gx_1}\right)^2 - \frac{2v_0^2 z_1}{gx_1^2} - 1 \geq 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{v_0^2}{g} \geq z_1 + \sqrt{x_1^2 + z_1^2}. \tag{3}$$

Diese Bedingung ist für die angegebenen Koordinaten nicht erfüllt; v_0 ist zu klein.
c) Nach (3) beträgt die Mindest-Anfangsgeschwindigkeit $v_{0\,min} = 123$ m/s. Damit folgt aus Gleichung (2), in der jetzt der Wurzelausdruck verschwindet, $\alpha_0 = 57{,}2°$. Der Anstieg der Tangente an die Flugbahn im Zielpunkt (x_1, z_1) ist

$$\tan\alpha_1 = \left.\frac{dz(x)}{dx}\right|_{x=x_1} = \tan\alpha_0 - \frac{gx_1}{v_0^2\cos^2\alpha_0} = -0{,}645,$$

d. h., der Zielpunkt liegt auf dem fallenden Ast der Flugbahn.

33 Legt man das Höhenniveau des Auftreffpunktes der Kugel auf dem Erdboden mit $z = 0$ fest, dann lautet die Gleichung der Wurfparabel (vgl. Lösung zu Aufgabe 30):

$$z(x) = h + x\tan\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0} x^2.$$

Im Auftreffpunkt ist $z = 0$ und $x = x_W$ (Wurfweite), d. h., es gilt:

$$0 = h + x_W \tan\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2} \frac{x_W^2}{\cos^2\alpha_0}. \tag{1}$$

Dies ist eine implizite Darstellung der Funktion $x_W = x_W(\alpha_0)$. Gliedweises Differenzieren von (1) nach α_0 (Anwendung der Produkten- und Quotientenregel sowie der Kettenregel) ergibt

$$0 = \frac{dx_W}{d\alpha_0}\tan\alpha_0 + \frac{x_W}{\cos^2\alpha_0} - \frac{g}{2v_0^2}\left[2x_W\frac{dx_W}{d\alpha_0}\cos^2\alpha_0 - 2\cos\alpha_0(-\sin\alpha_0)x_W^2\right]\frac{1}{\cos^4\alpha_0}.$$

Mit $dx_W/d\alpha_0 = 0$ (Extremwertbedingung) folgt hieraus für die maximale Wurfweite $x_{W,max}$:

$$0 = \frac{x_{W,max}}{\cos^2\alpha_0} - \frac{g\sin\alpha_0}{v_0^2\cos^3\alpha_0}x_{W,max}^2$$

bzw. $x_{W,max} = v_0^2/(g\tan\alpha_0)$. Dies für x_W in (1) eingesetzt, ergibt mit $h = 1{,}70$ m

$$\sin\alpha_0 = \frac{v_0}{\sqrt{2(v_0^2 + gh)}} = 0{,}6768; \qquad \alpha_0 = 42{,}6°; \qquad x_{W,max} = 20{,}21 \text{ m}.$$

34 a) 34,1 min; b) 30,2 min; c) 26,8 min.

35 $v(x) = kx$ mit $k = 0{,}02\,\mathrm{s}^{-1}$. Abdrift: $\mathrm{d}s = \dfrac{v(x)}{v_\mathrm{B}}\,\mathrm{d}x$; $s = \dfrac{kx^2}{2v_\mathrm{B}}$. a) $s_1 = 6{,}4$ m; $s_2 = 10{,}0$ m.
b) $t_1 = 16$ s; $t_2 = 20$ s.

36 a) 1000 m; b) 250 m/s (900 km/h); c) 286,6 m/s; d) 29,3°; e) genau über dem Auftreffpunkt.

37 a) 3,15 s (Steigzeit + Fallzeit); b) 40,9 m; c) 26,7 m/s; d) 60,9°.

38 Die Punktmasse erfährt die Beschleunigung $a = g\sin\alpha = gh/s$. Damit beträgt die Zeit für das Hinabgleiten $t = \sqrt{2s/a} = \sqrt{2s^2/(gh)}$ bzw. mit $s = \sqrt{h^2 + d^2}$: $t = \sqrt{2/g} \cdot (h + d^2/h)^{1/2}$. Aus der Extremwertbedingung $\mathrm{d}t/\mathrm{d}h = \sqrt{2/g} \cdot (1/2) \cdot (h + d^2/h)^{-1/2} \cdot (1 - d^2/h^2) = 0$ folgt $h = d$. Der Neigungswinkel der schiefen Ebene muss also $\alpha = 45°$ sein.

39 a) 82 cm; b) $\approx 60°$.

40 Bogenmaß von φ:

$$\varphi = \frac{\text{Kreisbogenlänge } s}{\text{Radius des Kreises } R} = \frac{0{,}20\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}} = 0{,}20\ \mathrm{rad} \equiv 0{,}20$$

mit der Einheit $[\varphi] = 1\ \mathrm{m}/1\ \mathrm{m} = 1$ rad (Radiant), d. h. dimensionslos. Der Vollwinkel 360° hat demnach das Bogenmaß $2\pi R/R = 2\pi$ rad $\equiv 2\pi$, womit für die Umrechnung in das Gradmaß $\varphi(°)$ wegen der Proportionalität $\varphi(°) : 360° = \varphi : 2\pi$ gilt:

$$\varphi(°) = \frac{180°}{\pi}\varphi = 57{,}3°\,\varphi.$$

Dem Winkel $\varphi = 0{,}20$ rad entsprechen also $11{,}46° = 11°\,27'\,33''$.

41 Gegeben ist der Drehwinkel 15°, entsprechend $\varphi = 15°\pi/180° = 0{,}2618$ rad im Bogenmaß, die Drehzahl $n = (1600/60)\,\mathrm{s}^{-1}$ sowie der Geschossweg $s = 0{,}50$ m. Die Winkelgeschwindigkeit der Scheiben ist $\omega = 2\pi n = \varphi/t$. Daraus folgt für die Flugdauer des Geschosses zwischen den beiden Scheiben $t = \varphi/(2\pi n)$ und somit als Geschossgeschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi n s}{\varphi} = 320\ \mathrm{m/s}.$$

42 Mit der Umlaufzeit des großen Zeigers $T_1 = 1\ \mathrm{h} = 3600$ s beträgt dessen Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 2\pi/T_1$, die des kleinen Zeigers $\omega_2 = \omega_1/12 = 2\pi/(12T_1)$. Ist t die Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden Deckungen der Zeiger und φ_2 der Winkel, um den sich in dieser Zeit der kleine Zeiger weiterdreht, so beträgt der Drehwinkel des großen Zeigers in der gleichen Zeit $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi$. Es gilt also wegen $\omega = \varphi/t$:

$$t = \frac{\varphi_2}{\omega_2} = \frac{\varphi_1}{\omega_1} = \frac{\varphi_2 + 2\pi}{\omega_1}; \qquad \varphi_2 = \frac{2\pi}{(\omega_1/\omega_2) - 1} = \frac{2\pi}{11}.$$

Damit wird

$$t = \frac{\varphi_2}{\omega_2} = \frac{2\pi}{11} \cdot \frac{12\,T_1}{2\pi} = \frac{12}{11}T_1 = 3927{,}3\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ \ 5\ \mathrm{min}\ \ 27{,}3\ \mathrm{s}.$$

43 Die Geschwindigkeit des Treibriemens ist $v = \omega R = 2\pi n R = \pi n D$. Damit wird

$$v_1 - v_2 = \pi n(D_1 - D_2) = \pi n\,\Delta D; \qquad v_2 = v_1 - \pi n\,\Delta D.$$

Mit der Drehzahl $n = (382/60)\,\mathrm{s}^{-1}$ wird $v_2 = 5$ m/s, $D_2 = v_2/(\pi n) = 25$ cm und $D_1 = D_2 + \Delta D = 40$ cm.