

# Arbeitsbuch zur Theoretischen Physik

Repetitorium und Übungsbuch

Bearbeitet von  
Torsten Fließbach, Hans Walliser

1. Auflage 2011. Buch. xx, 681 S. Hardcover  
ISBN 978 3 8274 2832 5  
Format (B x L): 16,8 x 24 cm  
Gewicht: 1332 g

[Weitere Fachgebiete > Physik, Astronomie > Physik Allgemein](#)

Zu [Inhaltsverzeichnis](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

  
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung [beck-shop.de](http://beck-shop.de) ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

# I Mechanik

## 1 Elementare Newtonsche Mechanik

Die Newtonschen Axiome sind die Grundlage für die Messung der Masse und der Kraft. Darüber hinaus bestimmen sie die Dynamik (Zeitabhängigkeit) der Bewegung eines Massenpunkts. Aus Newtons 2. Axiom folgen die Bilanzgleichungen für den Impuls, den Drehimpuls und die Energie. Die Bewegungsgleichungen können für ein System aus  $N$  Massenpunkten verallgemeinert werden.

Die Physiker benutzen bevorzugt Inertialsysteme als Bezugssysteme. Die Newtonschen Axiome (ebenso wie andere Grundgleichungen der Physik, etwa die Maxwellgleichungen oder die Schrödingergleichung) gelten nur in Inertialsystemen. Im Rahmen der Newtonschen Mechanik vermitteln die Galileitransformationen zwischen verschiedenen Inertialsystemen. In Nicht-Inertialsystemen haben die Bewegungsgleichungen eine kompliziertere Form.

Ein *Massenpunkt* ist ein Körper, für dessen Bewegung nur sein Ort relevant oder von Interesse ist; Beispiele sind die Erde im Keplerproblem oder ein Alphateilchen bei der Rutherfordstreuung. Die Bewegung des Massenpunkts wird durch eine *Bahnkurve*

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z \quad (1.1)$$

beschrieben. Als Bezugssystem wurde hier ein kartesisches Koordinatensystem verwendet. Den Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  entsprechen Längen; eine geeignete Uhr definiert die Zeitkoordinate  $t$ . Aus der Bahnkurve folgen die *Geschwindigkeit*  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}}$  und die *Beschleunigung*  $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2 = \ddot{\mathbf{r}}$ .

Newtons 1. Axiom (auch *lex prima* genannt) bezieht sich auf die Bezugssysteme (BS):

1. Axiom: Es gibt BS, in denen die kräftefreie Bewegung durch  $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v} = \text{const.}$  beschrieben wird. (1.2)

Die so spezifizierten, bevorzugten BS heißen *Inertialsysteme* (IS). Experimentell zeichnen sich die IS durch das Fehlen von Trägheitskräften (zum Beispiel Zentrifugalkraft) aus. Inertialsysteme sind Bezugssysteme, die gegenüber dem Fixsternhimmel ruhen, oder die sich relativ zu den Fixsternen mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Eine Begründung für diesen Zusammenhang wird aber weder in der Newtonschen noch in der relativistischen Mechanik (Kapitel 9) gegeben.

Newtons 2. Axiom (auch *lex secunda* genannt) beschreibt die Bewegung unter dem Einfluss einer Kraft:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (2. \text{ Axiom}) \quad (1.3)$$

Hierdurch wird die Masse als eine dem betrachteten Körper zugeordnete Eigenschaft eingeführt. Die linke Seite kann alternativ als  $m \mathbf{a}$  oder als  $d\mathbf{p}/dt$  mit dem Impuls  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$  geschrieben werden. Newtons 2. Axiom beinhaltet (i) die Definition der Masse, (ii) die Definition der Kraft und (iii) eine physikalische Aussage über die Bewegung.

Wir erläutern die Definition der Masse und der Kraft als Messgrößen. Eine bestimmte, in ihrer Größe unbekannte Kraft wirke auf zwei Körper 1 und 2. Wir messen die Beschleunigungen  $a_1$  und  $a_2$ , die durch die Kraft hervorgerufen werden. Nach (1.3) ist das Verhältnis  $m_1/m_2$  durch  $a_2/a_1$  gegeben; damit ist  $m_1/m_2$  als Messgröße festgelegt. Wir definieren nun willkürlich die Masse eines bestimmten Körpers als 1 Masseneinheit, konkret das Kilogramm (kg). Aus (1.3) folgen dann die Messung der Kraft, und ihre Einheit, 1 Newton = 1 N = 1 kg m/s<sup>2</sup>.

Die Masse im 2. Axiom ist die *träge Masse*. Ein anderer Massenbegriff ist die *schwere Masse*, die proportional zur Stärke der Gravitationskraft auf einen Körper ist. Experimentell stellt sich aber heraus, dass das Verhältnis von träger zu schwerer Masse immer gleich groß ist (mit einer relativen Genauigkeit bis zu 10<sup>-12</sup>). Daher verzichtet man in den Gleichungen zumeist auf eine solche Unterscheidung.

Das 2. Axiom ist nicht nur eine Definitionsgleichung für die Masse und die Kraft. Vielmehr ist es auch ein physikalisches Gesetz über die Dynamik. Dieses Gesetz kann auch falsch sein, dies ist zum Beispiel für hohe Geschwindigkeiten (nahe Lichtgeschwindigkeit) der Fall.

Newtons 3. Axiom (auch *lex tertia* genannt) lautet: Der Kraft, mit der die Umgebung auf einen Massenpunkt wirkt, entspricht stets eine gleich große, entgegengesetzte Kraft, mit der der Massenpunkt auf seine Umgebung wirkt. Für die Kräfte, die zwei Massenpunkte aufeinander ausüben, bedeutet das

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (3. \text{ Axiom}) \quad (1.4)$$

Hierbei ist  $\mathbf{F}_{12}$  die Kraft, die auf den Körper 1 wirkt.

Für einige Ableitungen schränken wir die möglichen Kräfte durch zwei zusätzliche Bedingungen ein. Die erste Einschränkung verlangt, dass die Kräfte zwischen zwei Körpern parallel oder antiparallel zur Verbindungslinie sind:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = 0 \quad (1. \text{ Zusatz}) \quad (1.5)$$

Dies gilt zum Beispiel nicht für die magnetischen Kräfte zwischen geladenen, bewegten Teilchen. Der 2. Zusatz beinhaltet das Superpositionsprinzip der Kräfte:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (2. \text{ Zusatz}) \quad (1.6)$$

Der 2. Zusatz könnte für elektrische Kräfte in einem polarisierbaren Medium verletzt sein. Beide Zusätze sind zum Beispiel erfüllt für (Newtonsche) Gravitationskräfte im Sonnensystem.

Wenn wir uns auf Kräfte beschränken, die nur von dem Ort und der Geschwindigkeit des Teilchens und von der Zeit abhängen, dann lautet die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \quad (1.7)$$

Dies ist eine Differenzialgleichung 2. Ordnung. Ihre Lösung enthält daher für jede Koordinate zwei Integrationskonstanten. Die Integrationskonstanten können durch Anfangsbedingungen (etwa für  $\mathbf{r}(t)$  und  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ ) festgelegt werden.

Der eindimensionale Spezialfall

$$m \ddot{x}(t) = F(x(t)) \quad (1.8)$$

lässt sich leicht integrieren:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{2[E - U(x')]/m}} \quad (1.9)$$

Hierbei wurde das *Potenzial*  $U(x) = -\int dx F(x) + \text{const.}$  eingeführt. Die Integrationskonstanten sind  $x_0$  und  $E$ .

## Drehimpuls, Arbeit, Potenzial

Wenn man Newtons 2. Axiom vektoriell mit  $\mathbf{r}(t)$  multipliziert, erhält man die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = \mathbf{M} \quad (1.10)$$

für den *Drehimpuls*  $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = \mathbf{r} \times (m\dot{\mathbf{r}})$  des Teilchens. Auf der rechten Seite steht das auf das Teilchen wirkende *Drehmoment*  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Der Drehimpuls und das Drehmoment beziehen sich beide auf den Ursprung des gewählten Inertialsystems.

Für eine *Zentralkraft*  $\mathbf{F} \parallel \pm \mathbf{r}$  ist  $\boldsymbol{\ell}$  konstant. Daher können wir die  $z$ -Achse des Inertialsystems in Richtung von  $\boldsymbol{\ell}$  legen. Die Bewegung verläuft dann in der  $x$ - $y$ -Ebene, und wir können den Betrag des Drehimpulses in Polarkoordinaten ausdrücken:

$$\frac{\ell}{m} = \rho^2 \dot{\varphi} = 2 \frac{dA}{dt} = \text{const.} \quad \text{für Zentralkraft} \quad (1.11)$$

Dies ist der sogenannte *Flächensatz*: Die vom Fahrstrahl pro Zeitintervall  $dt$  überstrichene Fläche  $dA = \rho^2 d\varphi/2$  ist konstant.

Wenn ein Teilchen sich auf dem Weg  $C$  von  $\mathbf{r}_1$  nach  $\mathbf{r}_2$  unter dem Einfluss einer Kraft  $\mathbf{F}$  bewegt, dann wird an ihm die *Arbeit*

$$W = \int_C dW = \int_{\mathbf{r}_1, C}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (1.12)$$

geleistet. Die Arbeit wird in Joule ( $J = N\,m$ ) gemessen. Die Leistung  $P = dW/dt$  wird in Watt ( $W = J/s$ ) gemessen.

Kräfte, die sich in der Form

$$\mathbf{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} \quad (1.13)$$

schreiben lassen, heißen *konservativ*. Kräfte, die sich nicht so schreiben lassen, heißen *dissipativ*. Damit können wir jede Kraft so aufteilen,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{kons}} + \mathbf{F}_{\text{diss}}$ . Wir setzen diese Aufteilung in das 2. Newtonsche Axiom ein und multiplizieren die Gleichung skalar mit  $\dot{\mathbf{r}}$ . Damit erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + U(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (1.14)$$

Dies ist eine Energiebilanzgleichung mit der *kinetischen Energie*  $T = m \dot{\mathbf{r}}^2/2$  und der potenziellen Energie  $U(\mathbf{r})$ . Das Standardbeispiel für die dissipative Kraft ist die Reibungskraft  $\mathbf{F}_{\text{diss}} = -\gamma \dot{\mathbf{r}}$ . Sie führt zu einer Abnahme der Energie  $E = T + U$  des Teilchens.

Für eine konservative Kraft der Form  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad } U(\mathbf{r})$  kann das Potenzial  $U(\mathbf{r})$  aus

$$U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) = -W = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') \quad (1.15)$$

berechnet werden. Der Ausgangs- oder Bezugspunkt  $\mathbf{r}_0$  ist dabei beliebig; das Potenzial ist nur bis auf eine Konstante (hier  $U(\mathbf{r}_0)$ ) festgelegt. Der Wert des Integrals ist unabhängig vom Weg zwischen  $\mathbf{r}_0$  und  $\mathbf{r}$ .

## System von Massenpunkten

Wir betrachten ein System aus  $N$  Massenpunkten (zum Beispiel unser Sonnensystem). Für jeden Massenpunkt gilt Newtons 2. Axiom,

$$m_v \ddot{\mathbf{r}}_v(t) = \mathbf{F}_v = \mathbf{F}_v^{(a)} + \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N \mathbf{F}_{v\mu} \quad (1.16)$$

Im letzten Schritt wurden die Kräfte in *innere* und *äußere* Kräfte aufgeteilt. Die inneren Kräfte sind diejenigen, die die Massenpunkte des Systems aufeinander ausüben (etwa die Gravitationskräfte zwischen den Körpern im Sonnensystem). Die äußeren Kräfte  $\mathbf{F}_v^{(a)}$  sind diejenigen Kräfte, die von außen auf das System wirken (etwa die Gravitationskräfte, die die Milchstraße auf das Sonnensystem ausübt).

Der Vektor  $\mathbf{R} = \sum_v m_v \mathbf{r}_v / M$  gibt die Lage des *Schwerpunkts* an. Aus (1.16) folgt

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_v^{(a)} = \mathbf{F} \quad (1.17)$$

Die inneren Kräfte sind also ohne Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts; dies liegt am 3. Axiom. Für ein abgeschlossenes System gilt Impulserhaltung,  $\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}} = \text{const.}$

Für den Drehimpuls  $\mathbf{L} = \sum_v m_v (\mathbf{r}_v \times \dot{\mathbf{r}}_v) = \sum_v \boldsymbol{\ell}_v$  erhalten wir aus (1.16)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times \mathbf{F}_v^{(a)} = \mathbf{M} \quad (1.18)$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses ist also gleich dem Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte. Für ein abgeschlossenes System gilt Drehimpulserhaltung,  $\mathbf{L} = \text{const.}$

In der Ableitung von (1.18) wurde der 1. Zusatz (1.5) verwendet. Dieser Zusatz gilt nicht für bewegte, geladene Teilchen. In diesem Fall muss der Drehimpuls des elektromagnetischen Felds in der Drehimpulsbilanz berücksichtigt werden.

Für die Energiebilanz teilen wir die Kräfte wieder in konservative und dissipative Anteile auf. Wir beschränken uns auf konservative Kräfte der Form

$$\mathbf{F}_{v, \text{kons}} = - \frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)}{\partial \mathbf{r}_v} \quad (1.19)$$

Dann lautet die Energiebilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} (T + U) = \sum_{v=1}^N \mathbf{F}_{v, \text{diss}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_v \quad (1.20)$$

Hierbei ist  $T = \sum_v m \dot{\mathbf{r}}_v^2 / 2$  die gesamte kinetische Energie. Wenn es keine dissipativen Kräfte gibt, dann ist die Energie erhalten,  $E = T + U = \text{const.}$

Für konservative Kräfte, die sich durch  $\mathbf{F}_v = -\text{grad}_v U$  ausdrücken lassen, ist eine potenzielle Energie von der Form

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{v=1}^N U_v(\mathbf{r}_v) + \sum_{v=2}^N \sum_{\mu=1}^{v-1} U_{v\mu}(|\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_\mu|) \quad (1.21)$$

## Galileitransformation

Newtons Axiome gelten nur in Inertialsystemen (IS). Dies sind Systeme, die gegenüber dem Fixsternhimmel nichtbeschleunigt sind. Von einem IS kommt man zu einem anderen IS' durch (konstante) räumliche oder zeitliche Verschiebung, durch Drehung oder durch eine Verschiebung mit einer konstanten Geschwindigkeit. Alle möglichen Inertialsysteme sind gleichwertig; dies ist die Aussage des Relativitätsprinzips.

Gleichwertigkeit heißt dabei, dass grundlegende Gesetze in allen Inertialsystemen dieselbe Form haben. In der nichtrelativistischen Mechanik geht man davon aus, dass Newtons Axiome solche grundlegenden Gesetze sind. Hieraus folgt dann die Form der Transformation zwischen verschiedenen IS. Diese so bestimmten Transformationen heißen *Galileitransformationen*.

Die allgemeine Galileitransformation zwischen IS (Koordinaten  $x_i$  und  $t$ ) und IS' (Koordinaten  $x'_i$  und  $t'$ ) lautet:

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j - v_i t - a_i, \quad t' = t - t_0 \quad (1.22)$$

Eine solche Transformation bezieht sich auf ein *Ereignis*, das in IS die Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, t$  hat, und in IS' die Koordinaten  $x'_1, x'_2, x'_3, t'$ . *Ein* bestimmtes Ereignis (etwa Zusammenstoß von zwei Teilchen) wird von *zwei* verschiedenen Standpunkten betrachtet (etwa zwei Beobachtern).

Die allgemeine Galileitransformation beinhaltet: (i) räumliche Verschiebung um  $v_i t$ , (ii) räumliche Verschiebung um  $a_i$ , (iii) Drehung ( $\alpha_{ij}$ ) und (iv) zeitliche Verschiebung um  $t_0$ . Die Galileitransformation hängt damit von 10 Parametern ab. Die Galileitransformationen bilden eine Gruppe.

Bei der Diskussion der Galileitransformation steht meist die Relativbewegung zwischen IS und IS' im Vordergrund und man kann sich dann auf spezielle Galileitransformation beschränken:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (1.23)$$

Wir haben hier *ein* Ereignis und *zwei* Inertialsysteme betrachtet (passive Transformation). Im Gegensatz dazu kann man auch *ein* Inertialsystem betrachten und *zwei* Ereignisse, deren Koordinaten durch eine Galileitransformation verbunden sind (*aktive Transformation*).

Unterwirft man ein ganzes physikalisches System einer aktiven Transformation, so laufen die Vorgänge im ursprünglichen und im transformierten System im Allgemeinen verschieden ab. Speziell für abgeschlossene Systeme lässt die aktive Galileitransformation aber die Bewegungsgleichungen invariant. Als Beispiel betrachte etwa (1.21) ohne äußere Kräfte ( $U_v = 0$ ). Mit den Abständen  $|\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_\mu|$  ist das Potenzial  $U$  dann invariant unter einer aktiven Transformation. Abgeschlossene Systeme sind invariant unter aktiven Galileitransformationen. Da dies für beliebige Systeme gilt, sind diese Invarianzen Symmetrien unserer Raum-Zeit.

Experimentell stellt man fest, dass Licht sich in allen Inertialsystemen mit derselben Geschwindigkeit ausbreitet. Dies steht im Widerspruch zur Galileitransformation. Aus (1.23) folgt nämlich  $\dot{x}' = \dot{x} - v$  für die Transformation der Geschwindigkeit. Ein Objekt, das sich in IS mit der Geschwindigkeit  $c$  bewegt, müsste danach in IS' die Geschwindigkeit  $c - v$  haben.

## Rotierendes Bezugssystem

Die Gültigkeit der Newtonschen Axiome ist auf Inertialsysteme (IS) beschränkt. Zu den abweichenden Bewegungsgesetzen in einem beschleunigten Koordinatensystem KS' gelangt man, wenn man die Transformation zwischen dem IS und KS' in die Newtonschen Gesetze einsetzt. Die Abweichungen bestehen in zusätzlichen Trägheitskräften. Diese Kräfte heißen auch Scheinkräfte; in KS' sind dies aber durchaus reale Kräfte.

Die Transformation  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}_0 t^2/2$  mit  $t' = t$  (und  $\mathbf{a}_0 = \text{const.}$ ) führt zu einem linear beschleunigten System; denn der Ursprung von  $\text{KS}'$  ( $\mathbf{r}' = 0$ ) bewegt sich in IS gemäß  $\mathbf{r} = \mathbf{a}_0 t^2/2$ . In IS wird eine kräftefreie Bewegung durch  $\ddot{\mathbf{r}} = 0$  beschrieben. Hieraus wird in  $\text{KS}'$   $\ddot{\mathbf{r}}' = -\mathbf{a}_0$ . Im Gegensatz zu Newton tritt auf der rechten Seite die Trägheits- oder Scheinkraft  $\mathbf{F}_{\text{tr}} = -m \mathbf{a}_0$  auf.

Ein interessanter Aspekt ist die Möglichkeit, Gravitationskräfte durch Trägheitskräfte zu kompensieren. So verlaufen in einem Satellitenlabor die Vorgänge wie ohne Gravitation; von der Erde aus gesehen heben sich Gravitations- und Beschleunigungskräfte gerade auf. Voraussetzung für diese Kompensation ist die Gleichheit von schwerer und träger Masse. Dieser Aspekt ist der Ausgangspunkt, den die Allgemeine Relativitätstheorie zur Aufstellung relativistischer Gesetze mit Gravitation verwendet.

Von besonderer Bedeutung sind rotierende Bezugssysteme, weil ein Labor auf der Erdoberfläche ja mit der Erde rotiert. Die weitere Diskussion beschränkt sich auf solche rotierenden Bezugssysteme.

Das Bezugssystem  $\text{KS}'$  rotiere relativ zu IS mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\varphi}/dt$ . Bei einer Rotation um den Winkel  $d\boldsymbol{\varphi}$  ändert sich ein in  $\text{KS}'$  konstanter Vektor  $\mathbf{G}$  um  $d\mathbf{G}_{\text{rot}} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{G}$ . Die gesamte Änderung von  $\mathbf{G}$  in IS ist dann  $d\mathbf{G}_{\text{IS}} = d\mathbf{G}_{\text{KS}'} + d\mathbf{G}_{\text{rot}}$ , wobei  $d\mathbf{G}_{\text{KS}'}$  die Änderung relativ zu  $\text{KS}'$  ist. Hieraus folgt

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{IS}} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{KS}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} \quad (1.24)$$

Für den Ortsvektor  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  wird dies zu

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (1.25)$$

Hierfür wurde der Ortsvektor nach den Basisvektoren von  $\text{KS}'$  entwickelt, also  $\mathbf{r}' = \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \mathbf{e}'_i(t)$ . Der erste Term ist die Änderung des Ortsvektors relativ zu  $\text{KS}'$ , also gleich  $(d\mathbf{r}/dt)_{\text{KS}'}$ . Im zweiten Term wurde  $(d\mathbf{e}'_i/dt) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i$  verwendet.

Wir wenden (1.24) nunmehr auf die Geschwindigkeit an und erhalten damit  $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}' + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}') + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ . Für ein kräftefreies Teilchen gilt im IS das 1. Axiom  $m\ddot{\mathbf{r}} = 0$ . Hieraus folgt für ein kräftefreies Teilchen im rotierenden System:

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (1.26)$$

Die Trägheitskräfte auf der rechten Seite werden als *Corioliskraft* und *Zentrifugalkraft* bezeichnet. Die Corioliskraft ist proportional zu  $\boldsymbol{\omega}$  und zur Geschwindigkeit des betrachteten Massenpunkts. Sie steht senkrecht zur Bewegungsrichtung; auf einem Karussell ist es schwierig, geradeaus zu gehen. Die Zentrifugalkraft ist proportional zu  $\omega^2$  und zum Abstand des Massenpunkts von der Drehachse. Sie zeigt von der Drehachse weg; auf einem schnell rotierenden Karussell muss man sich festhalten, um nicht nach außen wegzugleiten.



# Aufgaben

## 1.1 Beschleunigung in Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$  ist die Bahnkurve eines Massenpunkts von der Form  $\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(t)$ . Geben Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung ebenfalls in Kugelkoordinaten an.

**Lösung:** Die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\phi$  geben die Richtungen der Änderung von  $\mathbf{r}$  bei der Änderung  $r \rightarrow r + dr$ ,  $\theta \rightarrow \theta + d\theta$  oder  $\phi \rightarrow \phi + d\phi$  an. Wir drücken sie durch die kartesischen Einheitsvektoren aus:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y\end{aligned}$$

Die kartesischen Basisvektoren sind zeitunabhängig. Daher wirken die Zeitableitungen nur auf die Vorfaktoren. In der Darstellung als Spaltenvektoren erhalten wir

$$\mathbf{e}_r := \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \longrightarrow \dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} := \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \dot{\theta} - \sin \theta \sin \phi \dot{\phi} \\ \cos \theta \sin \phi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \phi \dot{\phi} \\ -\sin \theta \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis kann durch die Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  und  $\mathbf{e}_\phi$  ausgedrückt werden. Mit den analogen Ausdrücken für  $\dot{\mathbf{e}}_\theta$  und  $\dot{\mathbf{e}}_\phi$  erhalten wir so

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \cos \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\phi = -\sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_r - \cos \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta$$

Wir leiten nun die Bahnkurve  $\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(t)$  nach der Zeit ab:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi$$

Dies erhält man auch, wenn man das Wegelement  $d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi$  in  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  einsetzt. Spätestens im nächsten Schritt benötigt man aber die Zeitableitungen der Basisvektoren.

Die Differenziation der Geschwindigkeit ergibt die Beschleunigung

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (r \sin \theta \ddot{\phi} + 2 \sin \theta \dot{r} \dot{\phi} + 2 r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

Mit den Lagrangegleichungen 2. Art (Kapitel 2) kann man diese Ergebnisse *wesentlich* einfacher erhalten.

## 1.2 Abstürzender Satellit

Ein Erdsatellit (Masse  $m$ ) bewegt sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft und einer Reibungskraft:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{grav}} + \mathbf{F}_{\text{diss}} = -m \frac{\alpha}{r^2} \mathbf{e}_r - m \gamma(r) \mathbf{v}$$

Dabei ist  $r$  der Abstand zum Erdmittelpunkt,  $\alpha = GM$  mit der Erdmasse  $M$  und  $\gamma(r) > 0$ . Stellen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 1.1 die Bewegungsgleichungen in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$  auf. Wie müssen  $\gamma(r)$ ,  $\beta$  und  $\epsilon$  gewählt werden, damit

$$r(t) = r_0 (1 - \beta t)^{2/3}, \quad \theta(t) = -\frac{1}{\epsilon} \ln(1 - \beta t)^{2/3}, \quad \phi(t) = \text{const.} \quad (1.27)$$

die Bewegungsgleichungen löst? Welche Form hat die Bahnkurve? Bestimmen Sie den Betrag der Geschwindigkeit  $|\mathbf{v}|$  als Funktion von  $r$ .

**Lösung:** In Aufgabe 1.1 wurden die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  und die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in Kugelkoordinaten angegeben. Hiermit wird  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$  zu

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta &= -\frac{\alpha}{r^2} - \gamma(r)\dot{r} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta &= -\gamma(r)r\dot{\theta} \\ r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta &= -\gamma(r)r\dot{\phi} \sin \theta \end{aligned}$$

Für (1.27) ist die dritte Gleichung trivialerweise erfüllt, und in den anderen Gleichungen fallen die  $\dot{\phi}^2$ -Terme weg. Wir berechnen nun die Zeitableitungen von  $r$  und  $\theta$  für (1.27):

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{2\beta}{3} r_0 (1 - \beta t)^{-1/3} = -\frac{2\beta}{3} r_0 \sqrt{\frac{r_0}{r}}, & \dot{\theta} &= \frac{2\beta}{3\epsilon} (1 - \beta t)^{-1} = \frac{2\beta}{3\epsilon} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3/2} \\ \ddot{r} &= -\frac{2\beta^2}{9} r_0 (1 - \beta t)^{-4/3} = -\frac{2\beta^2}{9} \frac{r_0^3}{r^2}, & \ddot{\theta} &= \frac{2\beta^2}{3\epsilon} (1 - \beta t)^{-2} = \frac{2\beta^2}{3\epsilon} \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \end{aligned}$$

und setzen sie in die ersten beiden Gleichungen ein. Die resultierenden Gleichungen können nach  $\gamma$  und  $\beta$  aufgelöst werden:

$$\gamma(r) = \frac{\beta}{3} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3/2}, \quad \beta = \frac{3\epsilon}{2r_0} \sqrt{\frac{\alpha}{r_0(1 + \epsilon^2)}}$$

Der Ansatz für  $\mathbf{F}_{\text{diss}}$  macht nur für  $\gamma(r) > 0$  Sinn, also für  $\beta > 0$  und  $\epsilon > 0$ . Es gibt einen freien, positiven Parameter  $\epsilon$ , der  $\beta$ ,  $\gamma(r)$  und damit die Lösung festlegt. Die Bahnkurve (1.27) ist eine *logarithmische Spirale*

$$r(\theta) = r_0 \exp(-\epsilon \theta)$$

Für das Quadrat der Geschwindigkeit gilt

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{4\beta^2}{9} \left(1 + \frac{1}{\epsilon^2}\right) \frac{r_0^3}{r} = \frac{\alpha}{r}$$

Trotz Reibung nimmt die Geschwindigkeit  $v = \sqrt{\alpha/r}$  bei Annäherung an die Erdoberfläche immer weiter zu. Anstelle der hier verwendeten Reibungskraft wäre  $F_{\text{diss}} \propto \rho v^2$  mit der Luftdichte  $\rho(r)$  ein realistischerer Ansatz.

### 1.3 Regentropfen im Schwerfeld

Ein kugelförmiger Wassertropfen (Radius  $R$ , Volumen  $V$ , Masse  $m$ ) fällt in der mit Wasserdampf gesättigten Atmosphäre senkrecht nach unten. Auf ihn wirken die Schwerkraft und eine Reibungskraft,

$$F = F_{\text{grav}} + F_{\text{diss}} = m g - \lambda R^2 v \quad (\lambda > 0)$$

Der Wassertropfen startet mit der Geschwindigkeit  $v(0) = 0$ . Durch Kondensation wächst das Volumen des Wassertropfens proportional zu seiner Oberfläche an; Radius und Masse des Tropfens sind also zeitabhängig. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf, und integrieren Sie sie, indem Sie  $R$  anstelle der Zeit  $t$  als unabhängige Variable einführen.

**Lösung:** Die Volumenänderung  $dV/dt$  soll proportional zur Oberfläche  $4\pi R^2$  sein:

$$\frac{dV(t)}{dt} = 4\pi R(t)^2 \dot{R}(t) = \alpha (4\pi R(t)^2) \implies R(t) = R_0 + \alpha t$$

Hierbei ist  $\alpha$  die Proportionalitätskonstante zwischen der Volumenänderung und der Oberfläche, und  $R_0 = R(0)$ . Die Dichte  $\rho$  von Wasser ist (unter den gegebenen Bedingungen) konstant. Für die Änderung der Masse des Regentropfens gilt dann

$$\dot{m} = 4\pi \rho R^2 \dot{R} = \frac{3m}{R} \dot{R} = \frac{3m\alpha}{R(t)}$$

In der Bewegungsgleichung ist zu berücksichtigen, dass die Masse zeitabhängig ist:

$$\frac{d}{dt} [m(t) v(t)] = m \dot{v} + \dot{m} v = F_{\text{grav}} + F_{\text{diss}} = m g - \lambda R^2 v$$

Mit der Abkürzung  $\gamma = 3\lambda/(4\pi\rho\alpha)$  ergeben die letzten beiden Gleichungen

$$\dot{v}(t) + \frac{3\alpha}{R(t)} v(t) = g - \frac{\alpha\gamma}{R(t)} v(t)$$

Wir betrachten nun  $R$  als unabhängige Variable. Dann gilt  $\dot{v}(t) = v'(R) \dot{R}(t) = \alpha v'(R)$  und die Differenzialgleichung wird zu

$$v'(R) + \frac{3+\gamma}{R} v(R) = \frac{g}{\alpha} \quad (1.28)$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Differenzialgleichung setzt sich zusammen aus der allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$v'_{\text{hom}}(R) + \frac{3+\gamma}{R} v_{\text{hom}}(R) = 0$$

und irgendeiner speziellen (partikulären) Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (1.28). Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet  $v_{\text{hom}}(R) = c/R^{3+\gamma}$  mit der Integrationskonstanten  $c$ . Für eine partikuläre Lösung führt der Ansatz  $v_{\text{part}}(R) = a R$  mit  $a = (g/\alpha)/(4+\gamma)$  zum Ziel. Damit lautet die allgemeine Lösung:

$$v(R) = v_{\text{hom}}(R) + v_{\text{part}}(R) = \frac{c}{R^{3+\gamma}} + \frac{g}{\alpha(4+\gamma)} R$$

Die Anfangsbedingung  $v(R_0) = 0$  legt die Integrationskonstante  $c = -(g/\alpha) R_0^{4+\gamma}/(4+\gamma)$  fest. In diese Lösung setzen wir noch  $R(t) = \alpha t + R_0$  ein:

$$v = \frac{g R_0}{\alpha(4+\gamma)} \left[ \frac{R}{R_0} - \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3+\gamma} \right] = \frac{g R_0}{\alpha(4+\gamma)} \left[ \left(1 + \frac{\alpha t}{R_0}\right) - \left(1 + \frac{\alpha t}{R_0}\right)^{-(3+\gamma)} \right]$$

Wir diskutieren die Grenzfälle

$$v(t) = \begin{cases} gt & (\alpha t \ll R_0) \\ gt/(4+\gamma) & (\alpha t \gg R_0) \end{cases}$$

Anfangs fällt der Wassertropfen praktisch frei; die Geschwindigkeit ist noch so klein, dass die Impulsänderung aufgrund der Massenzunahme und die Reibungskraft wenig Einfluss haben. Für große Zeiten wird die Beschleunigung durch die beiden Effekte von  $g$  auf  $g/(4+\gamma)$  reduziert. Im Gegensatz dazu geht die Beschleunigung bei konstanter Masse gegen null, und es wird eine Grenzgeschwindigkeit  $v_\infty = mg/(\lambda R^2)$  erreicht (Aufgabe 1.8). Aus der berechneten Lösung kann dieser Fall im Limes  $\alpha \rightarrow 0$  gewonnen werden. Dabei sind die Darstellungen der Exponentialfunktion  $\exp(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} (1 + x/a)^a$  oder  $\exp(-x) = \lim_{a \rightarrow \infty} (1 + x/a)^{-a}$  zu verwenden.

### 1.4 Schwingungsperiode eines anharmonischen Oszillators

Ein Körper der Masse  $m$  bewege sich im Potenzial

$$U(x) = \frac{f}{2} x^2 + \alpha x^4$$

Berechnen Sie die Periode  $T$  der Schwingung für den leicht anharmonischen Fall (für  $\alpha E \ll f^2$ , wobei  $E$  die Energie ist).

Anleitung: Verwenden Sie die Substitution  $\sin^2 \varphi = U(x)/E$  und drücken Sie  $x$  und  $dx$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  bis zur 1. Ordnung in  $\alpha$  aus.

**Lösung:** Aus (1.9) folgt für die Schwingungsdauer

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2[E - U(x)]/m}} = \sqrt{\frac{2m}{E}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1 - U(x)/E}} \quad (1.29)$$

Hierbei sind  $x_1$  und  $x_2$  die Umkehrpunkte, bei denen  $E = U(x_i)$  gilt. Die Substitution  $\sin^2 \varphi = U(x)/E$  bedeutet

$$\alpha x^4 + f x^2/2 - E \sin^2 \varphi = 0 \quad (1.30)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für  $x^2$  mit der Lösung

$$x^2 = \frac{f}{4\alpha} \left( -1 \pm \sqrt{(1 + 16\alpha E \sin^2 \varphi/f^2)} \right) \approx \frac{2E}{f} \sin^2 \varphi \left( 1 - \frac{4\alpha E}{f^2} \sin^2 \varphi \right)$$

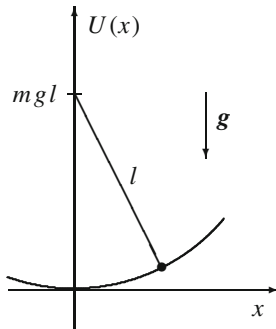
Wegen  $x^2 \geq 0$  macht nur das Pluszeichen vor der Wurzel Sinn. Im letzten Ausdruck wurde die Bedingung  $\alpha E \ll f^2$  benutzt. Für die Variable  $x$  erhalten wir damit die Substitutionsgleichungen

$$x \approx \sqrt{\frac{2E}{f}} \sin \varphi \left( 1 - \frac{2\alpha E}{f^2} \sin^2 \varphi \right) \quad \text{und} \quad dx \approx \sqrt{\frac{2E}{f}} \cos \varphi d\varphi \left( 1 - \frac{6\alpha E}{f^2} \sin^2 \varphi \right)$$

Der Cosinus in  $dx$  kürzt sich im Integral (1.29) gegen  $\sqrt{1 - U/E}$ . Die Umkehrpunkte  $x_i$  sind durch  $E = U(x_i)$  oder  $\sin^2 \varphi_i = 1$  gegeben; sie liegen demnach bei  $\varphi_i = \pm \pi/2$ . Damit erhalten wir

$$T = 2 \sqrt{\frac{m}{f}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \left( 1 - \frac{6\alpha E}{f^2} \sin^2 \varphi \right) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{f}} \left( 1 - \frac{3\alpha E}{f^2} \right)$$

Für  $\alpha = 0$  ist dies das bekannte Ergebnis des harmonischen Oszillators. Für  $\alpha > 0$  ist das Potenzial steiler, und  $T$  ist kleiner. Für  $\alpha < 0$  ist das Potenzial flacher, und  $T$  ist größer. Wegen  $E \approx f x_1^2/2$  kann der Korrekturterm auch durch die Amplitude  $x_1$  ausgedrückt werden. Die Bedingung  $\alpha E \ll f^2$  bedeutet daher eine Beschränkung auf *kleine* Auslenkungen.



Als Beispiel für anharmonische Korrekturen betrachten wir ein Fadenpendel. Für die potentielle Energie gilt

$$U(x) = mgl \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \right) \approx \frac{mg}{2l} x^2 + \frac{mg}{8l^3} x^4$$

Mit  $f = mg/l$  und  $\alpha = mg/(8l^3)$  führt das zur Aufgabenstellung. Damit ist die Schwingungsperiode

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 - \frac{3x_1^2}{16l^2} \right)$$

Für  $l = 1$  m führt die relativ große maximale Auslenkung  $x_1 = 0.5$  m zu einer Korrektur von 4.7%.

## 1.5 Einfluss der Zeitdefinition auf die Bewegungsgleichung

In einem Inertialsystem werde durch eine ungenaue Uhr die Zeit  $T$  definiert; für  $T$  setze man einen bestimmten Zusammenhang  $T = T(t)$  zur (wahren) IS-Zeit  $t$  an. Mit dieser Uhr misst man für die kräftefreie, eindimensionale Bewegung eines Körpers  $d^2x/dT^2 = a_0 = F/m$  im Gegensatz zu Newtons Axiomen. Dies demonstriert die Abhängigkeit physikalischer Gesetze von der Zeitdefinition.

Bestimmen Sie die scheinbare Kraft  $F$ . Für eine konkrete Uhr mit schwächer werdender Feder gelte speziell  $T(t) = \lambda^{-1} \ln(1 + \lambda t)$ . Was ergibt sich dann für die scheinbare Kraft  $F$ ?

**Lösung:** Aus der (tatsächlichen) Geschwindigkeit

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dT} \frac{dT}{dt}$$

folgt die (tatsächliche) Beschleunigung, die im kräftefreien Fall verschwindet:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dT^2} \left( \frac{dT}{dt} \right)^2 + \frac{dx}{dT} \frac{d^2T}{dt^2} = \frac{d^2x}{dT^2} \left( \frac{dT}{dt} \right)^2 + \frac{v d^2T/dt^2}{dT/dt} = 0$$

Hieraus folgt die (scheinbare) Kraft

$$F = m \frac{d^2 x}{dT^2} = -\frac{m v d^2 T/dt^2}{(dT/dt)^3}$$

Für  $T(t) = \lambda^{-1} \ln(1 + \lambda t)$  gelten dann  $dT/dt = 1/(1 + \lambda t)$ ,  $d^2 T/dt^2 = -\lambda/(1 + \lambda t)^2$  und

$$F = m v \lambda (1 + \lambda t)$$

## 1.6 Erzwungene Schwingungen

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des angetriebenen, gedämpften Oszillators

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda \dot{x} = f \cos(\omega t) \quad (1.31)$$

mit  $0 < \lambda < \omega_0$ . Betrachten Sie die Lösung speziell für große Zeiten, und berechnen Sie die zeitlich gemittelte Leistung  $P$ , die durch die Reibung verloren geht. Drücken Sie  $P$  im Fall  $\epsilon = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$  und  $\lambda \ll \omega_0$  durch  $f$ ,  $\epsilon$  und  $\lambda$  aus.

**Lösung:** Alle Größen in (1.31) sind reell. Daher ist der Realteil (Re) von

$$\ddot{X} + 2\lambda \dot{X} + \omega_0^2 X = f \exp(i\omega t) \quad (1.32)$$

identisch mit (1.31), wenn wir  $x(t) = \text{Re}(X(t))$  setzen. Der Weg über (1.32) ist etwas bequemer.

Die allgemeine Lösung einer linearen Differenzialgleichung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung  $X_{\text{hom}}(t)$  der homogenen Gleichung

$$\ddot{X}_{\text{hom}} + 2\lambda \dot{X}_{\text{hom}} + \omega_0^2 X_{\text{hom}} = 0 \quad (1.33)$$

und irgendeiner speziellen (partikulären) Lösung  $X_{\text{part}}(t)$  der vollen (inhomogenen) Differenzialgleichung. Wir setzen  $X_{\text{hom}}(t) = C \exp(-i\nu t)$  mit einer komplexen Amplitude  $C$  in (1.33) ein und erhalten

$$-\nu^2 - 2i\lambda\nu + \omega_0^2 = 0, \quad \nu_{1,2} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} - i\lambda = \pm w_0 - i\lambda$$

Dabei haben wir  $w_0 = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}$  eingeführt. Für  $\omega_0 > \lambda$  ist  $w_0$  reell, und die Lösung  $x(t)$  lautet  $x_{\text{hom}}(t) = \text{Re}(C \exp(-\lambda t \mp i w_0 t))$ . Mit reellen Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  in  $C = A_1 + i A_2$  wird dies zu

$$x_{\text{hom}}(t) = A_1 \cos(w_0 t) \exp(-\lambda t) + A_2 \sin(w_0 t) \exp(-\lambda t)$$

Das Vorzeichen in  $\sin(\pm w_0 t) = \pm \sin(w_0 t)$  wird in die Konstante  $A_2$  absorbiert. Anstelle der Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  können wir auch eine Amplitude  $A$  und eine Phase  $\delta_0$  verwenden:

$$x_{\text{hom}}(t) = A_0 \exp(-\lambda t) \cos(w_0 t + \delta_0)$$

Diese Lösung beschreibt eine gedämpfte, periodische Bewegung.

Für die partikuläre Lösung setzt man  $X_{\text{part}}(t) \propto \exp(i\omega t)$  an und erhält aus (1.32)

$$X_{\text{part}}(t) = \frac{f \exp(i\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega} \quad (1.34)$$

Wir führen die Realteilbildung aus und schreiben

$$x_{\text{part}}(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \delta(\omega)) \quad (1.35)$$

mit der reellen *Amplitude*  $A(\omega)$  und der reellen *Phase*  $\delta(\omega)$

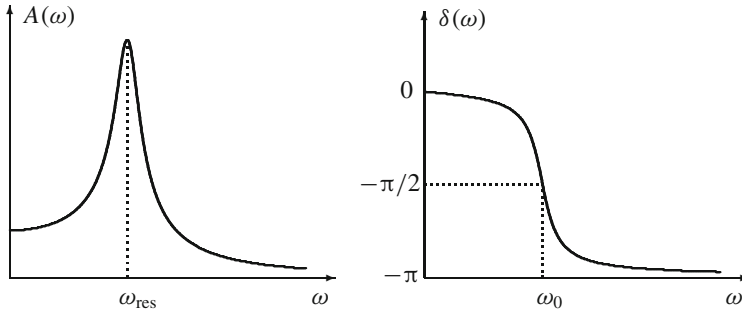
$$A(\omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2}}, \quad \tan \delta(\omega) = \frac{2\lambda \omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (1.36)$$

Die allgemeine Lösung

$$x(t) = x_{\text{hom}} + x_{\text{part}} = A_0 \exp(-\lambda t) \cos(\omega_0 t + \delta_0) + A(\omega) \cos(\omega t + \delta(\omega)) \quad (1.37)$$

enthält zwei Integrationskonstanten,  $A_0$  und  $\delta_0$ .

Für große Zeiten bleibt nur die partikuläre Lösung übrig,  $x(t) = x_{\text{part}}(t)$ . Diese *erzwungene Schwingung* wird durch die Frequenzabhängigkeit der Amplitude  $A(\omega)$  und der Phase  $\delta(\omega)$  bestimmt:



Das Maximum der Amplitude  $A(\omega)$  liegt bei

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \quad (1.38)$$

Für  $\lambda \ll \omega_0$  liegt diese *Resonanzfrequenz* dicht unterhalb der Eigenfrequenz,  $\omega_{\text{res}} \approx \omega_0 - \lambda^2/\omega_0$ . Die Breite der Resonanzkurve ist proportional zu  $\lambda$ , die Höhe des Maximums proportional zu  $1/\lambda$ .

Je schwächer die Dämpfung ist, desto höher und schmaler ist die Resonanzkurve; für die Abbildung wurde  $\omega_0/\lambda = 10$  gewählt. Für kleine Frequenzen schwingt der Oszillator in Phase mit der anregenden Kraft ( $\delta \approx 0$ ), für große Frequenzen gegenläufig ( $\delta \approx -\pi$ ); der Übergang erfolgt im Bereich  $\omega \sim \omega_0 \pm \lambda$ .

Im statischen Fall ( $\omega = 0$ ) ist die Auslenkung  $A(0) = f/\omega_0^2$ . Die Auslenkung erfolgt in Richtung der Kraft; die Phase ist null. Für  $\omega > 0$  ist die Phase immer negativ, das heißt die Auslenkung bleibt hinter der auslenkenden Kraft zurück.

Die durch die Reibung absorbierte Leistung (Energie/Zeit) ist

$$P(\omega) = -\overline{F_{\text{diss}} \dot{x}} = 2\lambda m \overline{\dot{x}^2} = 2\lambda m A(\omega)^2 \omega^2 \overline{\sin^2(\omega t + \delta)} = \lambda m A(\omega)^2 \omega^2$$

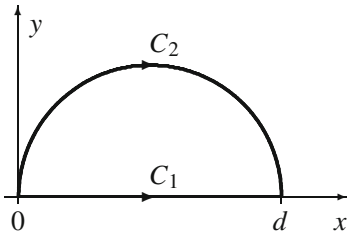
Die Mittelung wurde durch einen Balken über der zu mittelnden Größe angezeigt; das gemittelte Quadrat einer Sinusfunktion ergibt den Faktor  $1/2$ . Die Energieabsorption erfolgt vorwiegend im Frequenzbereich  $\omega \approx \omega_0 \pm \lambda$ . Das Ergebnis für  $P$  ist leicht zu verstehen:

$1/\lambda$  ist die Zeit, in der die Amplitude des freien Oszillators wesentlich gedämpft wird, und  $E = m\omega^2 A^2/2$  ist die Energie eines ungedämpften Oszillators, der mit der Amplitude  $A$  schwingt.

Wir setzen nun (1.36) in  $P(\omega)$  ein und verwenden  $\epsilon = \omega - \omega_0$ ; dann ist  $\omega^2 - \omega_0^2 = \epsilon(\omega + \omega_0) \approx 2\epsilon\omega$ . Für  $\lambda \ll \omega_0$  gilt  $\omega = \omega_0 + \mathcal{O}(\lambda)$  für die effektiv relevanten Frequenzen. In der führenden Ordnung in den kleinen Größen  $\epsilon$  und  $\lambda$  erhalten wir so

$$P(\epsilon) = \frac{f^2}{4} \frac{\lambda m}{\epsilon^2 + \lambda^2}$$

### 1.7 Weg(un)abhängigkeit der Arbeit



Das Wegintegral

$$W = \int_C dW = \int_{r_1, C}^{r_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

soll für die Federkraft  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$  und verschiedene Wege berechnet werden.

Als Wege sollen eine Gerade  $C_1$  und ein Halbkreis  $C_2$  (Radius  $d/2$ ) betrachtet werden, und zwar mit dem Anfangspunkt  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  und dem Endpunkt  $(d, 0, 0)$ . Das Wegintegral gibt die Arbeit an, die geleistet werden muss, um ein Teilchen längs des Wegs zu verschieben.

**Lösung:** Für den Weg  $C_1$  gilt  $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx$ , wobei  $x$  von 0 bis  $d$  läuft. Damit wird (1.12) zu

$$W = \int_{r_1, C_1}^{r_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = -k \int_0^d dx \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_x = -k \int_0^d dx x = -\frac{k d^2}{2}$$

Der Halbkreis  $C_2$  kann durch

$$\mathbf{r} := \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{r} := \frac{d}{2} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$$

beschrieben werden, wobei  $\varphi$  von 0 bis  $\pi$  läuft. Damit erhalten wir

$$W = \int_{r_1, C_2}^{r_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = -\frac{k d^2}{4} \int_0^\pi d\varphi \sin \varphi = -\frac{k d^2}{2}$$

Alternativ kann man  $C_2$  durch die Funktion  $y(x) = \sqrt{x(d-x)}$  beschreiben. Mit  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ ,  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y$  und  $dy = y'(x)dx$  erhalten wir

$$W = -k \int_0^d dx (x + y(x)y'(x)) = -k \int_0^d dx \left(x + \frac{d}{2} - x\right) = -\frac{k d^2}{2}$$

Die Kraft  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$  kann in der Form  $\mathbf{F} = -\text{grad } U(\mathbf{r})$  mit dem (Oszillator-)Potenzial  $U(\mathbf{r}) = -kr^2/2$  geschrieben werden. Die Arbeit  $W = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2)$  ist damit vom Weg unabhängig.



## 1.8 Freier Fall mit Reibung

Für eine Kugel, die sich in einer zähen Flüssigkeit im Schwerfeld bewegt, gelte die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{z} = -mg - \gamma \dot{z} \quad (1.39)$$

Lösen Sie diese Gleichung für eine anfangs bei  $z = 0$  ruhende Kugel. Überprüfen Sie mit dieser Lösung die Energiebilanzgleichung (1.14).

**Lösung:** Wir schreiben die Bewegungsgleichung zunächst in der Form

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z} = -g \quad (1.40)$$

mit  $\alpha = \gamma/m$ . Die allgemeine Lösung einer linearen Differenzialgleichung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung  $z_{\text{hom}}(t)$  der homogenen Gleichung

$$\ddot{z}_{\text{hom}} + \alpha \dot{z}_{\text{hom}} = 0 \quad (1.41)$$

und irgendeiner speziellen (partikulären) Lösung  $z_{\text{part}}(t)$  der inhomogenen Differenzialgleichung (1.40). Der Standardansatz für eine lineare homogene Differenzialgleichung lautet  $z(t) = \exp(\lambda t)$ . Einsetzen in (1.41) ergibt  $\lambda^2 + \alpha \lambda = 0$  mit den Lösungen  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = -\alpha$ . Die allgemeine homogene Lösung ist eine Linearkombination der beiden Elementarlösungen, also  $z_{\text{hom}}(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t) = c_1 + c_2 \exp(-\alpha t)$ .

Der Ansatz  $\dot{z} = \text{const.}$  löst (1.40) mit  $\dot{z} = -g/\alpha$ . Damit ist  $z_{\text{part}} = -gt/\alpha$  eine partikuläre Lösung. Die *allgemeine Lösung* lautet

$$z(t) = z_{\text{hom}}(t) + z_{\text{part}}(t) = c_1 + c_2 \exp(-\alpha t) - gt/\alpha$$

Die Anfangsbedingungen  $z(0) = 0$  und  $\dot{z}(0) = 0$  legen die Konstanten fest:

$$z(t) = -\frac{g}{\alpha} \left( t + \frac{\exp(-\alpha t) - 1}{\alpha} \right) \quad (1.42)$$

Der Leser überprüfe  $z \rightarrow -gt^2/2$  für  $\alpha \rightarrow 0$ . Wir berechnen noch die (positiv gewählte) Geschwindigkeit  $v$  der Kugel:

$$v(t) = -\dot{z}(t) = \frac{g}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)] \quad (1.43)$$

Die Geschwindigkeit  $v(t)$  wächst zunächst linear an (wie beim freien Fall), und nähert sich dann asymptotisch dem Wert  $v(\infty) = g/\alpha = mg/\gamma$ . Bei dieser Grenzgeschwindigkeit halten sich Schwer- und Reibungskraft die Waage.

Wir berechnen die Energie  $E$  des Teilchens:

$$E = T + U = \frac{m \dot{z}^2}{2} + mgz = \frac{m g^2}{2\alpha^2} \left( \exp(-2\alpha t) - 4 \exp(-\alpha t) - 2\alpha t + 3 \right)$$

Hieraus erhält man die linke Seite von (1.14):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m g^2}{2\alpha^2} \left( -2\alpha \exp(-2\alpha t) + 4\alpha \exp(-\alpha t) - 2\alpha \right) = -\frac{m g^2}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)]^2$$

Dies stimmt mit der rechten Seite von (1.14) überein:

$$F_{\text{diss}} \cdot v = -\gamma v^2 = -\frac{m g^2}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)]^2$$

Für große Zeiten sind die beiden Seiten von (1.14) gleich einer Konstanten. Dies entspricht einer konstanten Umwandlungsrate von potenzieller Energie in Reibungswärme bei erreichter Endgeschwindigkeit.

**Alternative Lösung:** Die Gleichung (1.40) wird als  $\dot{v} = g - \alpha v$  geschrieben und gemäß  $\int_0^v dv'/(g - \alpha v') = t$  integriert. Dies führt direkt zu (1.43). Dieser Weg ist deutlich kürzer, entspricht aber nicht dem Standardverfahren zur Lösung linearer Differenzialgleichungen.

## 1.9 Förderband – Energiebilanz

Auf ein horizontales Förderband, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_0$  bewegt, fällt aus einem Trichter Materie mit der Rate  $R = dm/dt = \text{Masse/Zeit}$ . Die Materie kommt auf dem Förderband zur Ruhe und wird mit  $v_0$  weitertransportiert. Mit welcher Kraft  $F$  muss das Förderband angetrieben werden, um die Impulsänderung der aufgenommenen Materie zu bewirken? Vergleichen Sie die Leistung  $P$  des Förderbands mit der Rate  $dT/dt$ , mit der kinetische Energie  $T$  auf die Materie übertragen wird. Sind die auftretenden Kräfte konservativ?

**Lösung:** Wenn die Masse  $dm$  von null auf die Geschwindigkeit  $v_0$  gebracht wird, bedeutet das eine Impulsänderung  $dp = dm v_0$ . Um diese Impulsänderung in Zeitintervall  $dt$  zu bewirken, ist die Kraft

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm v_0}{dt} = R v_0$$

erforderlich; mit dieser Kraft  $F$  muss das Förderband angetrieben werden. Der Antrieb des Förderbands benötigt dann die Leistung

$$P = F v_0 = R v_0^2$$

Aus

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dm v_0^2/2}{dt} = \frac{R v_0^2}{2}$$

folgt, dass nur die Hälfte der aufgebrauchten Leistung  $P$  zur Erhöhung der kinetischen Energie der Materie dient (konservativer Anteil). Die andere Hälfte wird in Wärme umgewandelt (dissipativ); denn wenn Materie auf das Band fällt und schließlich mitgenommen wird, kommt es zu Reibungsvorgängen.

Die Kräfte auf einzelne Materiestücke  $\Delta m$  sind zeitabhängig (jeweils vom Zeitpunkt des Auftreffens auf das Band bis zum Erreichen der Geschwindigkeit  $v_0$ ). Diese Kräfte sind im Einzelnen nicht bekannt.

## 1.10 Potenzial für Coulombkraft

Wir betrachten Teilchen mit den Ladungen  $q_v$ . Die Kraft, die das Teilchen  $\mu$  auf das Teilchen  $v$  ausübt, ist

$$\mathbf{F}_{v\mu} = \frac{q_v q_\mu (\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_\mu)}{|\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_\mu|^3}$$

Zeigen Sie  $\text{rot}_v \mathbf{F}_{v\mu} = 0$ . Bestimmen Sie den zugehörigen Potenzialbeitrag  $U_{v\mu}$ .

**Lösung:** Wir setzen zunächst  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{v\mu}$ ,  $\alpha = q_v q_\mu$  und  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_v - \mathbf{r}_\mu$ , so dass der Ausgangspunkt zu

$$\mathbf{F} = \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

wird. Dann ist  $\text{rot}_v \mathbf{F}_{v\mu} = \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r})$ . Wir berechnen die  $x$ -Komponente von  $\text{rot } \mathbf{F}$ :

$$(\text{rot } \mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \alpha \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{r^3} \right) = -\frac{3\alpha}{r^5} (yz - zy) = 0$$

Dies gilt analog für die anderen Komponenten. Damit ist die Wirbelfreiheit gezeigt. Die Kraft besitzt also ein Potenzial, das wir auf einem beliebigen Weg berechnen können:

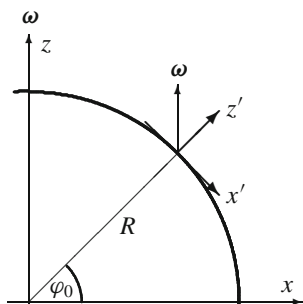
$$\begin{aligned} \frac{U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)}{\alpha} &= \\ &= - \int_{x_0}^x \frac{x' dx'}{(x'^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} - \int_{y_0}^y \frac{y' dy'}{(x^2 + y'^2 + z_0^2)^{3/2}} - \int_{z_0}^z \frac{z' dz'}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{(x^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2}} \Big|_{x_0}^x + \frac{1}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{1/2}} \Big|_{y_0}^y + \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_{z_0}^z \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_0|} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir  $U = \alpha/|\mathbf{r}|$  oder in den ursprünglichen Bezeichnungen

$$U_{v\mu} = \frac{q_v q_\mu}{|\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_\mu|} \quad \text{ergibt} \quad \mathbf{F}_{v\mu} = -\text{grad}_v U_{v\mu}$$

### 1.11 Corioliskraft beim freien Fall

Auf einem Platz in Mitteleuropa (mit der geographischen Breite  $\varphi_0 = 50^\circ$ ) steht ein Turm der Höhe  $H = 200$  m. Der ebene Platz stelle die  $x'$ - $y'$ -Ebene, der Turm die  $z'$ -Achse von  $\text{KS}'$  dar. Wegen der Erddrehung ist  $\text{KS}'$  ein rotierendes System (in dem die  $\omega^2$ -Terme vernachlässigbar klein sind). Berechnen Sie in  $\text{KS}'$ , wieweit ein vom Turm frei fallender Körper (Anfangsgeschwindigkeit null) neben der Lotrechten aufschlägt. Verifizieren Sie das Ergebnis, indem Sie den freien Fall in einem Inertialsystem behandeln.



**Lösung:** Ein Laborsystem auf der Erdoberfläche ist ein beschleunigtes Bezugssystem  $\text{KS}'$  mit den Koordinaten  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Der Ursprung von  $\text{KS}'$  bewegt sich aufgrund der Drehung momentan senkrecht in die Bildebene hinein; dies ist auch die Richtung der nicht gezeigten  $y'$ -Achse. In  $\text{KS}'$  wird die Winkelgeschwindigkeit zu

$$\boldsymbol{\omega} := \omega \begin{pmatrix} -\cos \varphi_0 \\ 0 \\ \sin \varphi_0 \end{pmatrix}$$

Ohne die Zentrifugalkraft lautet die Bewegungsgleichung in KS'

$$m \ddot{\mathbf{r}}' = -2m (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}') - m \mathbf{g} \quad (1.44)$$

Wir schreiben dies in Komponenten an:

$$\begin{aligned} \ddot{x}' &= 2\omega \dot{y}' \sin \varphi_0 \\ \ddot{y}' &= -2\omega (\dot{z}' \cos \varphi_0 + \dot{x}' \sin \varphi_0) \\ \ddot{z}' &= 2\omega \dot{y}' \cos \varphi_0 - g \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen lauten

$$(x', y', z') = (0, 0, H) \quad \text{und} \quad (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}') = (0, 0, 0)$$

Damit sind  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  von der Ordnung  $\omega$ . Unter Vernachlässigung der  $\omega^2$ -Terme werden die Bewegungsgleichungen zu

$$\ddot{x}' = 0, \quad \ddot{y}' = -2\omega \dot{z}' \cos \varphi_0, \quad \ddot{z}' = -g$$

Die Integration ergibt unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$x' = 0, \quad y' = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi_0, \quad z' = H - \frac{g}{2} t^2$$

Aus der letzten Gleichung folgt die Fallzeit  $t_0 = \sqrt{2H/g}$ . Damit erhalten wir für die Abweichung aus der Lotrechten

$$y'(t_0) = \frac{2}{3} H \omega \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos \varphi_0 \approx 4 \text{ cm} \quad (1.45)$$

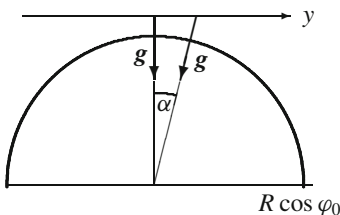
**Alternative Lösung:** Die Basis des Turms bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$V_B = \omega R \cos \varphi_0$$

in  $y$ -Richtung (entlang eines Breitenkreises). Parallel dazu bewegt sich die Spitze des Turms mit

$$\dot{y}(0) = \omega(R + H) \cos \varphi_0$$

Dies ist zugleich die Anfangsgeschwindigkeit des fallenden Körpers. Die Differenz dieser Geschwindigkeiten führt während der Fallzeit  $t_0 = \sqrt{2H/g}$  zu einer seitlichen Abweichung  $[\dot{y}(0) - V_B]t_0$ . Diese Abweichung hat dieselbe Form wie (1.45), aber ohne den Faktor  $2/3$ . Warum führt diese einfache Überlegung zu einem falschen Ergebnis?



In der nebenstehenden Abbildung sind der betrachtete Breitenkreis und die  $y$ -Richtung eingezeichnet. Sobald die Bewegung in  $y$ -Richtung beginnt, bekommt die Erdbeschleunigung eine Komponente in  $y$ -Richtung. (Im Gegensatz dazu gilt  $\mathbf{g} \perp \mathbf{e}_{y'}$  im mitbewegten KS'). Der Winkel  $\alpha$  ergibt sich aus  $\sin \alpha \approx V_B t / R \approx \omega t \cos \varphi_0$ .

Damit gilt für die  $y$ -Bewegung

$$\ddot{y}(t) = -g \sin \alpha = -g \omega t \cos \varphi_0 + \mathcal{O}(\omega^2)$$

Für die gesuchte seitliche Abweichung ergibt sich daraus

$$\Delta y = -\frac{1}{6} g \omega t_0^3 \cos \varphi_0 + [\dot{y}(0) - V_B] t_0 = \frac{2}{3} H \omega \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos \varphi_0$$

in Übereinstimmung mit (1.45).



<http://www.springer.com/978-3-8274-2832-5>

Arbeitsbuch zur Theoretischen Physik

Repetitorium und Übungsbuch

Fließbach, T.; Walliser, H.

2012, XX, 681 S. 160 Abb., Hardcover

ISBN: 978-3-8274-2832-5

A product of Spektrum Akademischer Verlag