Die Roten Hefte 31

# Fachrechnen für die Feuerwehr

Bearbeitet von
Kurt Klingsohr

1. Auflage 2011. Taschenbuch. 148 S. Paperback
ISBN 978 3 17 022063 8
Format (B x L): 10,5 x 14,8 cm
Gewicht: 101 g

# 1 Grundlagen

## 1.1 Die vier Grundrechenarten

Zusammenzählen oder *Addieren:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Summand | plus | Summand | ist gleich | Summe |
| 3 | + | 18 | = | 21 |

Abziehen oder *Subtrahieren:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Minuend | minus | Subtrahend | ist gleich | Differenz |
| 12 | – | 7 | = | 5 |

Zieht man eine größere Zahl von einer kleineren Zahl ab, ist das Ergebnis eine *negative Zahl:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | – | 15 | = | –7 |

Malnehmen oder *Multiplizieren:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Faktor | mal | Faktor | ist gleich | Produkt |
| 4 | · | 12 | = | 48 |

Folgende Rechenregeln gelten für die Multiplikation:
Multipliziert man eine positive Zahl mit einer positiven Zahl, ist das Ergebnis wieder eine *positive Zahl:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | · | 2 | = | 16 (»+ · + = +«) |

Werden zwei negative Zahlen multipliziert, ist das Ergebnis ebenfalls *positiv:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| –8 | · | –3 | = | 24 (» – · – = +«) |

Das Produkt einer positiven und einer negativen Zahl ist *negativ:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| –8 | · | 5 | = | – 40 (» – · + = –«) |

Teilen oder *Dividieren:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Dividend | durch | Divisor | ist gleich | Quotient |
| 36 | : | 9 | = | 4 |

Werden in einer Rechnung *Grundrechenarten gemischt*, so gilt die Regel: *Punkt geht vor Strich.*

*Beispiel:* **$3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 50$**

Es werden zuerst die Produkte $3 \cdot 6 = 18$ und $4 \cdot 8 = 32$ gebildet, da ihre Faktoren durch Punkte verbunden sind. Dann erst werden die beiden Produkte zusammengezählt.

Anders ist zu verfahren, wenn Klammern gesetzt sind:

$$3 \cdot (6 + 4) \cdot 8 = 240$$

Dann sind zuerst die Klammern auszurechnen.

Hier handelt es sich um ein Produkt aus drei Faktoren. Einer davon ist die Klammer, deren Wert $6 + 4 = 10$ zuerst ausgerechnet werden muss.

Sämtliche folgenden Rechenarten sind Anwendungen und Kombinationen der vier Grundrechenarten.

Eine *Hochzahl* (Exponent) wie z. B. $10^3$ oder $5^4$ hat nichts mit »höherer Mathematik« zu tun, sondern stellt nur eine abkürzende Schreibweise für ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren dar. Werden mehrere gleiche Faktoren malgenommen, so braucht man sie nicht einzeln aufzuschreiben, sondern versieht einen Faktor mit einer Hochzahl. Die Hochzahl gibt an, wie viele gleiche Faktoren zu multiplizieren sind. Man nennt eine Zahl mit einer Hochzahl eine *Potenz*.

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

## 1.2 Bruchrechnung

Nicht immer können wir mit ganzen Zahlen rechnen. Die ganze Zahl, die Teilung ohne Rest und das Fehlen eines Kommas bilden bei technischen Rechnungen die Ausnahme.

Gebrochene Teile einer Einheit können auf verschiedene Weise angegeben sein:

Als gemeine Brüche, wenn es sich um einfache Verhältnisse handelt, z. B. die Hälfte = $\frac{1}{2}$, ein Drittel = $\frac{1}{3}$, zwei Drittel = $\frac{2}{3}$ usw. Das sind so genannte echte Brüche, da ihr Wert kleiner als 1 ist.

Über dem Bruchstrich steht der *Zähler.* Er gibt die Zahl der Bruchteile an.

Unter dem Bruchstrich steht der *Nenner.* Er benennt den Bruch, z. B. Drittel, Achtel, Zwanzigstel.

Da ein Bruch nur eine andere Schreibweise für eine Division ist, nennt man ihn auch *Quotient* (z. B. $1 : 4 = \frac{1}{4}$).

Bei den echten Brüchen ist der Nenner immer größer als der Zähler, z. B. $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{4}{100}$ usw.

Ist der Zähler größer als der Nenner, so spricht man von einem unechten Bruch, diesen kann man in eine gemischte Zahl verwandeln. Will man mit gemischten Zahlen rechnen, muss man sie in unechte Brüche verwandeln.

*Beispiele:*

$1\frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $3\frac{1}{8} = \frac{3 \cdot 8}{8} + \frac{1}{8} = \frac{24 + 1}{8} = \frac{25}{8}$

$\frac{16}{3} = \frac{15}{3} + \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$

### 1.2.1 Rechenregeln für das Bruchrechnen

Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich sind, hat immer den Wert 1.

*Beispiele:* $\frac{4}{4} = 1$ $\qquad$ $\frac{8}{8} = 1$ $\qquad$ $\frac{24}{24} = 1$

Brüche können gekürzt und erweitert werden, ohne dass sich ihr Wert ändert.

*Kürzen* heißt den Zähler und den Nenner durch die gleiche Zahl teilen, d. h. praktisch, gleiche Faktoren wegzulassen.

*Beispiele:*

a) $\frac{6}{24} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{234}{39} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13}{3 \cdot 13} = \frac{6}{1} = 6$ $\qquad$ c) $\frac{13}{20} = \frac{13}{20}$

Fallen im Zähler alle Faktoren durch Kürzen weg, so bleibt nur die Zahl 1 stehen, da man immer den Wert 1 erhält, wenn man eine Zahl durch sich selbst teilt (Beispiel a).

Fallen im Nenner alle Faktoren durch Kürzen weg, so wird der Bruch eine ganze Zahl mit dem Wert des Zählers. Auch im Nenner bleibt immer der Faktor 1 stehen, doch ergibt eine Teilung durch 1 stets wieder den Wert des Zählers (Beispiel b).

*Erweitern* heißt im Zähler und im Nenner den gleichen Faktor hinzufügen, also mit der gleichen Zahl multiplizieren.

*Beispiele:*

a) $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{8}{24}$ b) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{30}{75}$

c) $\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{7 \cdot 4}{56 \cdot 4} = \frac{28}{224}$

Beide Vorgänge sind für technische Rechnungen wichtig, insbesondere für das Umstellen der Formeln und für die Verwandlung von Maßeinheiten. Um zu erkennen, welche Faktoren im Zähler und Nenner gleich sind, ist es notwendig, Zähler und Nenner in *Primfaktoren* zu zerlegen.

Primfaktoren sind Primzahlen, die als Faktor dastehen, d. h. mit anderen Zahlen durch ein Malzeichen verbunden sind. Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 oder durch sich selbst ohne Rest teilbar sind, also 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 usw.

*Beispiel:*

$$\frac{8\,580}{11\,704} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19}$$

Nun kann man die Faktoren $2 \cdot 2 \cdot 11$ im Zähler und Nenner weglassen (*kürzen*)

$$= \frac{3 \cdot 5 \cdot 13}{2 \cdot 7 \cdot 19} = \frac{195}{266}$$

Brüche können nur dann *addiert* oder *subtrahiert* werden, wenn sie gleichnamig sind, d. h. wenn sie den gleichen Nenner haben. Das Gleichnamigmachen geschieht durch Bildung eines *Hauptnenners*. Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller vorkommenden Nenner. Um den Hauptnenner zu finden, müssen die Nenner in die kleinstmöglichen Faktoren (Primfaktoren) zerlegt werden, woraus dann das kleinste gemeinsame Vielfache gebildet wird. Dies geschieht durch Multiplikation aller vorkommenden Primfaktoren in der höchstvorkommenden Potenz. Sind die Brüche gleichnamig, werden sie auf einen gemeinsamen Bruchstrich geschrieben, in dessen Nenner der ermittelte Hauptnenner steht. Die entsprechend erweiterten Zähler können dann addiert oder subtrahiert werden.

*Beispiel:*

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{5}{12} =$$

Zur Ermittlung des Hauptnenners werden die Einzelnenner in Faktoren zerlegt:

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
$4 = 2 \cdot 2$
$9 = 3 \cdot 3$
$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$

Jetzt muss jeder vorkommende Faktor in der höchstvorkommenden Potenz zur Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (Hauptnenner) verwendet werden.
Faktor 2, höchstvorkommende Potenz $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
Faktor 3, höchstvorkommende Potenz $3^2 = 3 \cdot 3$
kleinstes gemeinsames Vielfaches $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 8 \cdot 9 = 72$
72 ist der Hauptnenner.
Jetzt werden die einzelnen Brüche durch Erweitern in Zweiundsiebzigstel verwandelt:

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{27}{72} \qquad \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 18}{4 \cdot 18} = \frac{18}{72}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1 \cdot 8}{9 \cdot 8} = \frac{8}{72} \qquad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 6}{12 \cdot 6} = \frac{30}{72}$$

Alle Brüche können nun auf einen gemeinsamen Bruchstrich mit dem Nenner 72 geschrieben werden:

$$\frac{27}{72} + \frac{18}{72} - \frac{8}{72} + \frac{30}{72} = \frac{27 + 18 - 8 + 30}{72}$$

Ausrechnen des Zählers:

$27 + 18 + 30 = 75$, $75 - 8 = 67$, Ergebnis $\frac{67}{72}$

Kürzen ist nicht mehr möglich, da 67 eine Primzahl ist.

Ein *Bruch* wird mit einer *ganzen Zahl multipliziert*, indem der Zähler des Bruches mit der Zahl multipliziert wird.

*Beispiele:*

a) $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{7} \cdot 22 = \frac{1 \cdot 22}{7} = \frac{22}{7}$

c) $\frac{2}{5} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 5}{5} = 2$

Ein *Bruch* wird durch eine *ganze Zahl geteilt*, indem der Nenner des Bruches mit der Zahl multipliziert wird.

*Beispiele:*

a) $\frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{8 \cdot 2} = \frac{1}{16}$ b) $\frac{3}{7} : 3 = \frac{3}{3 \cdot 7} = \frac{1}{7}$

c) $\frac{2}{3} : 26 = \frac{2}{3 \cdot 26} = \frac{2}{3 \cdot 2 \cdot 13} = \frac{1}{39}$

Ein *Bruch* wird mit einem *Bruch multipliziert*, indem Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert werden.

*Beispiele:*

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{7} \cdot \frac{21}{4} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

c) $\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{13} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 11}{9 \cdot 3 \cdot 13} = \frac{22}{351}$

Ein *Bruch* wird durch einen *Bruch geteilt*, indem er mit dem gestürzten (reziproken) Wert (Kehrwert) des Divisors multipliziert wird.

*Beispiele:*

a) $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 2} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$

b) $\frac{5}{16} : \frac{15}{24} = \frac{5 \cdot 24}{16 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 8}{2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{2}$

Dies sind die wichtigsten Rechenregeln für die Bruchrechnung.

Ein weiteres Eindringen in die Bruchrechnung ist für den Feuerwehralltag nicht erforderlich.

### 1.2.2 Dezimalbrüche

Gebrochene Teile einer Einheit können anstelle der Schreibweise mit Bruchstrich mit einem Komma versehen sein. Solche Brüche nennen wir *Dezimalbrüche*. Dezimalbrüche kommen im täglichen Leben und insbesondere bei technischen Rechnungen fast ausschließlich vor, sodass der Umgang mit ihnen sowie die sichere Beherrschung »des Kommas« eine der wichtigsten Voraussetzungen für die richtige Lösung technischer Rechenaufgaben bildet.

*Merke:*
*Der kleinste Kommafehler verfälscht das Ergebnis der Rechnung um das Zehnfache! Ein derartiges Ergebnis ist unbrauchbar!*

Gemeine Brüche, deren Nenner eine Potenz von 10 ist, lassen sich als Dezimalbrüche (Kommazahlen) schreiben. Dabei gibt die erste

Stelle hinter dem Komma die Zehntel, die zweite Stelle hinter dem Komma die Hundertstel, die dritte Stelle die Tausendstel usw. an.

$$\frac{3}{10} = 0{,}3 \quad \frac{5}{100} = 0{,}05 \quad \frac{8}{1\,000} = 0{,}008$$

Alle gemeinen Brüche können in Dezimalbrüche umgewandelt werden, indem man den Zähler durch den Nenner teilt, oder sie so erweitert, dass im Nenner eine Potenz von 10 steht.

*Beispiele:*

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5 \qquad \frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

Ein Dezimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man das Komma weglässt, den Zahlenwert in den Zähler schreibt und einen Nenner bildet, der aus einer 1 mit so vielen Nullen besteht, wie der Dezimalbruch Stellen hinter dem Komma hat.

*Beispiele:*

$$0{,}7 = \frac{7}{10}$$

Eine Dezimalstelle ergibt 1 mit einer Null.

$$0{,}33 = \frac{33}{100}$$

Zwei Dezimalstellen ergeben 1 mit zwei Nullen.

$$1{,}825 = \frac{1\,825}{1\,000} \text{ Kürzen! } = \frac{73}{40}$$

Probe: 73 : 40 = 1,825 s. o.
330
100
200
–