

Vah lens Kurzlehrbücher

## Finanzmathematik

Grundlagen und Anwendungsmöglichkeiten in der Investitions- und Bankwirtschaft

von

Prof. Dr. Konrad Wimmer, Eugen Caprano

7., vollständig überarbeitete Auflage

[Finanzmathematik – Wimmer / Caprano](#)

schnell und portofrei erhältlich bei [beck-shop.de](http://beck-shop.de) DIE FACHBUCHHANDLUNG

Thematische Gliederung:

[Mathematik und Statistik](#)

Verlag Franz Vahlen München 2013

Verlag Franz Vahlen im Internet:

[www.vahlen.de](http://www.vahlen.de)

ISBN 978 3 8006 4560 2

# beck-shop.de

Wimmer/Caprano  
Finanzmathematik

**beck-shop.de**

# beck-shop.de

## Finanzmathematik

Grundlagen und Anwendungsmöglichkeiten  
in der Investitions- und Bankwirtschaft

von

Prof. Dr. Konrad Wimmer

begründet  
von

Eugen Caprano †

7., vollständig überarbeitete Auflage

Verlag Franz Vahlen München

# beck-shop.de

**Prof. Dr. Konrad Wimmer** ist Unternehmensberater, Dozent, finanzmathematischer Sachverständiger und Gutachter.

ISBN 978 3 8006 4560 2

© 2013 Verlag Franz Vahlen GmbH, Wilhelmstr. 9, 80801 München

Satz: Fotosatz Buck

Zweikirchener Str. 7, 84036 Kumhausen

Druck und Bindung: Nomos Verlagsgesellschaft

In den Lissen 12, 76547 Sinzheim

Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier

(hergestellt aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff)

# beck-shop.de

## Vorwort

Dieses Lehrbuch behandelt einerseits das notwendige finanzmathematische Basiswissen und greift andererseits zentrale Anwendungsmöglichkeiten in der Investitions- und Bankwirtschaft auf. Es wendet sich daher an Studierende der Wirtschaftswissenschaften an Universitäten und Hochschulen sowie an Praktiker in Unternehmen und in beratenden Berufen. Die formale Darstellung wird durchweg mit zahlreichen praxisbezogenen Beispielen und Aufgaben untermauert, sodass sich das Werk auch sehr gut für das Selbststudium eignet.

Der hohe Anwendungs- und Praxisbezug unterscheidet das vorliegende Lehrbuch von ähnlichen Büchern. Auch zeigt es immer wieder die Verbindung zu anderen wichtigen Teilgebieten der Betriebswirtschaftslehre (z. B. Rechnungslegung, Kostenrechnung, Investitionstheorie) sowie zu angrenzenden juristischen Fragestellungen (z. B. Preisangabenverordnung, Vorfälligkeitsentschädigung) auf.

### Aufbau und Neuerungen

Der *erste Teil* des Buches beschreibt die Grundlagen der Finanzmathematik und geht damit auf die klassischen Fragestellungen, insbesondere die Zinseszinsrechnung, die Berechnung von Abschreibungen, die Rentenrechnung, die Tilgungs- und Kursrechnung sowie die Berechnung der Effektivverzinsung, die aufgrund der geänderten Preisangabenverordnung angepasst wurde, ein.

Eine wesentliche Änderung dieser Auflage betrifft die Berechnung von Pensionsrückstellungen als Anwendungsfall der Rentenrechnung – insofern ist sie für das Verständnis auch der Bilanzierung von Pensionsrückstellungen sehr wichtig. Wegen der hohen Praxisrelevanz wurde außerdem das Leasinggeschäft aufgenommen. Es lässt sich finanzmathematisch analog zum klassischen Bankkredit abbilden, d. h. auch hier kann eine Effektivverzinsung ermittelt werden. Abschreibungen werden erstmals um die Betrachtung der ökonomischen Abschreibung erweitert, die im Unterschied zu den Verfahren der Kostenrechnung und Rechnungslegung den Kapitaldienst finanzmathematisch korrekt abbildet.

Der *zweite Teil*, der in der Voraufgabe neu integriert wurde, ist vom Aufbau her unverändert, jedoch in vielfältiger Hinsicht um praxisrelevante Aspekte ergänzt worden. So wurde die marktinsorientierte Kapitalwertmethode um die Berechnung von Investitionsmargen erweitert, d. h. es können nicht nur der Kapitalwert einer Investition, sondern auch die zugehörige Rentabilität berechnet werden. Hier wird auch die Querverbindung zum Konzept des Economic-Value-Added (EVA) aufgezeigt, denn daran orientieren nahezu alle DAX-30-Konzerne bei ihrer Unternehmenssteuerung. Als Anwendungsfall der marktinsorientierten Kapitalwertmethode wird die besonders praxisrelevante Berechnung der Vorfälligkeitsentschädigung bzw. Nichtabnahmeentschädi-

gung berücksichtigt. Sie betrifft Unternehmen wie Privatpersonen in gleicher Weise, wie der Verfasser aus eigener Praxis als gerichtlicher Sachverständiger weiß. Der Abschnitt Investitionsrechnung bei unsicheren Erwartungen beinhaltet zahlreiche Anwendungsbeispiele zur Portfolio Selection, zum CAPM und damit zu den Grundlagen des modernen Portfolio-Managements. Ein weiteres Kapitel behandelt die Grundfragen der Messung und Steuerung des Zinsänderungsrisikos. Grundlegend ist hier nach wie vor das Durationskonzept, das in Form der Modified Duration auch bankaufsichtsrechtlich („Baseler Zinschock“) relevant ist, wie ein ausführliches Beispiel demonstriert. Schließlich wird exkursartig das Value-at-Risk-Konzept beschrieben, dessen Einsatz längst nicht mehr nur auf das Kreditgewerbe beschränkt ist.

So wichtig die formale Darstellung und so praktisch die tabellierten Faktoren (Barwertfaktoren, Annuitätenfaktoren etc.) auch sein mögen – in der betrieblichen Praxis haben sich längst Tabellenkalkulationsprogramme etabliert. Ein neu aufgenommenes Kapitel greift deshalb wesentliche Berechnungsbeispiele und Funktionen in *Excel* auf. So wird beispielsweise die Zielwertsuche erläutert, die in der Praxis mittlerweile unverzichtbar ist.

Ich empfehle allen Leserinnen und Lesern, beim Durcharbeiten dieses kompakten Buches parallel Tabellenkalkulationsprogramme zu benutzen. Das Nachvollziehen der zahlreichen Aufgaben und Beispiele zur Finanzmathematik fällt dem Leser dann sehr viel leichter, und quasi nebenbei erwirbt er sich eine umfangreiche Sammlung von Musterfällen.

Ganz herzlich bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei Herrn Dennis Brunotte vom Verlag Vahlen für die reibungslose und jederzeit sehr angenehme Zusammenarbeit. Als Lektor hat er maßgeblich zur zügigen Realisierung der Neuauflage beigetragen.

Dingolfing, im August 2013

*Konrad Wimmer*

# beck-shop.de

## Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	V
<b>Symbolverzeichnis</b> .....	XI
<b>Teil I Grundlagen der Finanzmathematik</b>	
<b>1. Mathematische Grundlagen und Grundkenntnisse</b> .....	1
1.1 Wurzeln und Potenzen .....	1
1.2 Logarithmen .....	2
1.3 Arithmetische Folgen und Reihen .....	3
1.4 Geometrische Folgen und Reihen .....	4
1.5 Zinsrechnung .....	5
1.6 Einfache Zinsen .....	7
1.7 Nominal- und Effektivverzinsung .....	10
1.8 Wechseldiskontierung .....	11
1.9 Interpolationsverfahren .....	12
<b>2. Zins und Zinseszinsen</b> .....	15
2.1 Begriff .....	15
2.2 Zinseszins bei jährlicher Verzinsung .....	16
2.3 Gemischte Verzinsung .....	21
2.4 Mittlerer Zahlungstermin .....	23
2.5 Unterjährliche Verzinsung .....	26
2.6 Stetige Verzinsung .....	27
2.7 Vorschüssige Verzinsung .....	29
<b>3. Abschreibungen</b> .....	31
3.1 Abschreibungsbegriff .....	31
3.2 Lineare Abschreibung (AfA in gleichen Jahresbeträgen) .....	32
3.3 Arithmetisch-degressive Abschreibung .....	33
3.4 Geometrisch-degressive Abschreibung .....	35
3.5 Ökonomische Abschreibung .....	37
<b>4. Rentenrechnung</b> .....	41
4.1 Rentenbegriff .....	41

4.2	Nachschüssige Jahresrente .....	42
4.3	Vorschüssige Jahresrente .....	43
4.4	Unterjährliche Renten .....	52
4.4.1	Jährliche Rentenzahlungen und unterjährliche Zinskapitalisierung .....	53
4.4.2	Unterjährliche Rentenzahlungen mit jährlicher Zinsverrechnung .....	54
4.4.3	Unterjährliche Rentenzahlungen mit unterjährlicher Zinsverrechnung .....	57
4.5	Progressive Rente .....	65
4.5.1	Geometrisch fortschreitende Renten .....	66
4.5.2	Arithmetisch fortschreitende Renten .....	67
4.6	Ewige Rente .....	68
4.6.1	Konstante ewige Rente .....	68
4.6.2	Arithmetisch fortschreitende ewige Rente .....	70
4.6.3	Geometrisch fortschreitende ewige Rente .....	70
4.7	Berechnung von Pensionsrückstellungen .....	71
4.7.1	Berechnung von Pensionsrückstellungen bei sicheren Erwartungen .....	71
4.7.2	Berechnung von Pensionsrückstellungen unter Einbeziehung von Sterbewahrscheinlichkeiten .....	74
<b>5.</b>	<b>Tilgungsrechnung .....</b>	<b>79</b>
5.1	Inhalt der Tilgungsrechnung .....	79
5.2	Ratentilgung .....	81
5.3	Annuitätentilgung .....	82
5.3.1	Formale Darstellung .....	82
5.3.2	Prozentannuität .....	86
5.3.3	Annuitätentilgung mit Konversion, Sondertilgung .....	88
5.4	Zinsanleihe mit Rücklagentilgung .....	91
5.5	Tilgung mit Aufgeld und Gebühren .....	91
5.5.1	Ratentilgung mit Aufgeld .....	92
5.5.2	Annuitätentilgung mit Gebührenverrechnung .....	93
5.5.3	Annuitätentilgung mit Aufgeld .....	95
5.6	Tilgung von Serienanleihen .....	96
5.6.1	Tilgung in gleichen Raten .....	97
5.6.2	Tilgung einer Annuitätenanleihe in Stücken gleichen Nennwerts .....	97
5.6.3	Aufgeldanleihe bei eingeschlossenem Aufgeld .....	98
5.7	Unterjährliche Annuitätentilgung .....	99
5.7.1	Jährliche Tilgungsverrechnung und unterjährliche Zinskapitalisierung .....	101
5.7.2	Unterjährliche Zins- und Tilgungsverrechnungszeitpunkte .....	101

5.8 Ratenkredite (Teilzahlungskredite) .....	106
5.8.1 Überblick .....	106
5.8.2 Ratenkredite ohne Bearbeitungsgebühren .....	107
5.8.3 Ratenkredite mit Bearbeitungsgebühren .....	110
<b>6. Kurs und Effektivverzinsung .....</b>	<b>113</b>
6.1 Zusammenhang zwischen Kurs und Effektivverzinsung .....	113
6.2 Kursberechnung .....	115
6.3 Berechnung der Effektivverzinsung (Rendite) .....	122
6.3.1 Jährliche Zahlungen .....	122
6.3.2 Unterjährliche Zahlungen .....	123

## **Teil II Anwendungsmöglichkeiten in der Investitions- und Bankwirtschaft**

<b>7. Investitionen .....</b>	<b>131</b>
7.1 Zielsetzungen bei Investitionsentscheidungen .....	131
7.2 Dynamische Verfahren der Investitionsrechnung .....	132
7.2.1 Vermögenswertmethoden .....	134
7.2.2 Zinssatzmethoden .....	155
7.2.3 Einbeziehung von Steuerwirkungen .....	168
7.3 Marktziensorientierte Kapitalwertmethode: Berücksichtigung der Zinsstrukturkurve des Geld- und Kapitalmarktes .....	174
7.3.1 Lösung mithilfe des vollständigen Finanzplans (Duplizierungsprinzip) .....	174
7.3.2 Kalkulation mit periodenspezifischen Kalkulationszinssätzen ..	176
7.3.3 Fallstudie: Berechnung einer Vorfälligkeitsentschädigung in der Bankpraxis .....	182
7.3.4 Margenermittlung bei nicht-flacher Zinsstrukturkurve des Geld- und Kapitalmarktes .....	185
<b>8. Investitionsrechnung bei unsicheren Erwartungen .....</b>	<b>187</b>
8.1 Portfolio Selection .....	187
8.2 Kapitalmarktlinie .....	191
8.3 Capital Asset Pricing Model (CAPM) .....	194
<b>9. Messung und Steuerung des Zinsänderungsrisikos .....</b>	<b>201</b>
9.1 Durationskonzepte .....	201
9.1.1 (Macaulay-) Duration .....	201
9.1.2 Anwendungsmöglichkeiten der Duration .....	203
9.2 Barwert- und Endwertsimulationen und das Praxisbeispiel Baseler Zinsschock .....	207
9.2.1 Beschreibung der Barwert- und Endwertsimulation .....	207
9.2.2 Praxisbeispiel Baseler Zinsschock .....	207

9.3 Value at Risk (VaR).....	209
9.3.1 Vereinfachte Berechnung des VaR über Risikoparameter .....	211
9.3.2 VaR unter Einbeziehung von Diversifikationseffekten .....	212
<b>10. Einsatz von Excel in der Finanzmathematik .....</b>	<b>215</b>
<b>Anhang: Tabellen zur Finanzmathematik .....</b>	<b>219</b>
Abzinsungsfaktoren .....	219
Aufzinsungsfaktoren .....	221
Nachschüssige Annuitätenfaktoren .....	223
Nachschüssige Rentenbarwertfaktoren.....	225
Nachschüssige Rentenendwertfaktoren .....	228
Vorschüssige Annuitätenfaktoren .....	230
Vorschüssige Rentenbarwertfaktoren .....	232
Vorschüssige Rentenendwertfaktoren .....	234
Kurse für Annuitätenanleihen .....	237
Kurse für Zinsanleihen .....	238
Zusammenstellung wichtiger finanzmathematischer Formeln .....	239
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>243</b>
<b>Sachverzeichnis .....</b>	<b>245</b>