Mathematik für Ökonomen

Grundlagen, Methoden und Anwendungen

von

Prof. Dr. Alpha C. Chiang, Prof. Dr. Kevin Wainwright, Prof. Dr. Harald Nitsch

1. Auflage

Mathematik für Ökonomen – Chiang / Wainwright / Nitsch

schnell und portofrei erhältlich bei beck-shop.de DIE FACHBUCHHANDLUNG

Thematische Gliederung:

Mathematik und Statistik – Wirtschaft

Verlag Franz Vahlen München 2011

Verlag Franz Vahlen im Internet:
www.vahlen.de
ISBN 978 3 8006 3663 1

beck-shop.de

Mathematik für Ökonomen

beck-shop.de

beck-shop.de

Mathematik für Ökonomen

Grundlagen, Methoden und Anwendungen

von
Alpha C. Chiang
em. Professor an der University of Connecticut

und
Kevin Wainwright
Professor am
British Columbia Institute of Technology
Simon Fraser University

und
Harald Nitsch
Professor für Immobilienökonomik
Duale Hochschule Baden-Württemberg Mannheim

Verlag Franz Vahlen München

beck-shop.de

VERLAG
VAHLEN
MÜNCHEN
www.vahlen.de

Original edition copyright (2005) by McGraw-Hill/Irwin, a business unit of the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

ISBN 978 3 8006 3663 1

© 2011 Verlag, Franz Vahlen GmbH
Wilhelmstraße 9, 80801 München
Satz: Druckhaus „Thomas Müntzer“, GmbH Neustädter Straße 1–4, 99947 Bad Langensalza
Druck und Bindung: Offizin Andersen Nexö Leipzig GmbH
Spenglerallee 26–30, 04442 Zwenkau
Umschlaggestaltung: Ralph Zimmermann – Bureau Parapluie
Bildnachweis für die Titelabbildung: © Photoroller-Fotolia.com

Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier
(hergestellt aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff)

beck-shop.de

Für Emily, Darryl und Tracey

Alpha C. Chiang

Für Skippy und Myrtle

Kevin Wainwright

Für Gloria und Luisa

Harald Nitsch

beck-shop.de

beck-shop.de

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Mit „Mathematik für Ökonomen“ liegt nun die deutsche Ausgabe von „Fundamental Methods of Mathematical Economics“ vor. Neben der didaktischen und fachlichen Qualität dieses Standardwerks stehen zwei zusätzliche Motive hinter der Übertragung ins Deutsche: Zum einen ermöglicht die Verwendung eines international renommierten Lehrbuchs eine größere Transparenz der mathematischen Studieninhalte bei der Belegung von Auslandssemestern oder internationalen Programmen. Zum anderen können sich Studierende nach Durcharbeiten der deutschen Ausgabe anhand des Originaltextes mit den englischen Fachausdrücken vertraut machen. Durch die Vielzahl ökonomischer Beispiele bietet der Text daher auch eine Brücke zur Lektüre formal anspruchsvoller englischsprachiger Fachpublikationen.

Bei der Übertragung der „Fundamental Methods“ waren allerdings auch die Spezifika deutschsprachiger Studiengänge zu berücksichtigen. Aus diesem Grund wurde die vorliegende deutsche Ausgabe um ein zusätzliches Kapitel 21 zur Finanzmathematik erweitert. Dieser Themenbereich trägt den Anforderungen in betriebswirtschaftlichen Programmen, aber auch den betriebswirtschaftlichen Units in volkswirtschaftlichen Studiengängen Rechnung.

Viele der Beispiele aus Kapitel 21 stammen aus immobilienwirtschaftlichen Fragestellungen. Dies liegt nicht zuletzt an der Anschaulichkeit der Probleme: Die angesprochenen Fragestellungen werden den Leserinnen und Lesern spätestens „in der Praxis“ begegnen, wenn sie eine eigene Immobilie erwerben.

Dank gilt dem Verlag Vahlen, der die deutsche Fassung ermöglicht hat. Stellvertretend genannt sei hier Herr Dennis Brunotte, der das Buchprojekt sehr engagiert betreute. Auch hier gilt aber, dass verbleibende Fehler in der Verantwortung des Übersetzers/Verfassers liegen.

Harald Nitsch

beck-shop.de

Vorwort zur englischen Ausgabe

Dieses Buch wurde für Studierende der Wirtschaftswissenschaften geschrieben, die bei der Lektüre aktueller Veröffentlichungen auf grundlegende Kenntnisse mathematischer Methoden angewiesen sind. Leider hat für viele Leser das Studium der Mathematik die gleiche Anziehungskraft wie der Konsum bitterer Medizin – notwendig, aber extrem unangenehm. Diese Grundeinstellung – nennen wir sie Mathephobie – hat nach unserer Meinung ihre Wurzeln in der Art und Weise, wie die Mathematik im Studium oft präsentiert wird. In der festen Überzeugung, dass Knappheit und Präzision mit Eleganz gleichzusetzen ist, sind die Erklärungen oft kaum nachvollziehbar kurz und geben den Studierenden Rätsel auf. Diese entwickeln dann die völlig unzutreffende Selbsteinschätzung, der Materie nicht gewachsen zu sein. Stellt man den Stoff übermäßig formal dar und verzichtet auf die Begleitung durch intuitive Beispiele oder Demonstrationen der „Anwendbarkeit“, dann bleibt die Motivation auf der Strecke. Unterschiedlich schnelles Behandeln der Themen lässt außerdem manche Bereiche schwieriger erscheinen, als sie es tatsächlich sind. Schließlich beschädigen übermäßig raffinierte Übungsbeispiele eher das Selbstvertrauen der Leserinnen und Leser, als dass sie ihnen wie ursprünglich beabsichtigt Denkanstöße gäben.

Mit all diesen Punkten im Hinterkopf haben wir uns beim Verfassen dieses Buches bemüht, die Angst erregenden Aspekte möglichst klein zu halten. So weit möglich bieten wir lieber ausführliche als rätselhafte Erklärungen. Im Stil bleiben wir bewusst informell und „leserfreundlich“. Routinemäßig versuchen wir, die beim Lesen aufkommenden Fragen vorwegzunehmen und anzusprechen. Um die Relevanz der Mathematik in der Ökonomik zu betonen, lassen wir uns bei der Darstellung der mathematischen Methoden von den analytischen Fragestellungen der Ökonomen leiten und illustrieren die Anwendung danach anhand ökonomischer Modelle. Auch der mathematische Werkzeugkasten wird schrittweise aufgefüllt, wobei die grundlegenden Werkzeuge den Ausgangspunkt für die später eingeführten weiterentwickelten Methoden bilden. Wo immer dies möglich ist, unterstützen wir visuell die analytischen Ergebnisse durch graphische Darstellungen. Und wir haben die Übungen als Trainingseinheiten konzipiert, die zur Vertrautheit mit den Methoden führen und die Anfänger nicht unnötig frustrieren oder einschüchtern.

Dieses Buch deckt die folgenden ökonomischen Analysebereiche ab: Statik (Untersuchung von Gleichgewichten), komparative Statik, Optimierungsprobleme (ein Sonderfall der Statik), dynamische Modelle und dynamische Optimierung. Zu ihrer Bewältigung werden nach und nach die folgenden mathematischen Methoden eingeführt: Matrizenrechnung, Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen, Differenzengleichungen und optimale Steuerung. Die Methoden werden von zahlreichen ökonomischen Anwendungen – aus Makro- und Mikroökonomik – begleitet. Das Buch eignet sich daher auch für Leser, die mit der Mathematik bereits vertraut sind, aber einen Einstieg in die Welt der Ökonomie suchen. Aus dem gleichen Grund sollte man dieses Buch nicht nur als Literatur für eine Mathematikvorlesung im Ökonomiestudium verwenden, sondern es auch als Ergänzungslektüre für volks- oder betriebswirtschaftliche Vorlesungen heranziehen.

Wir haben uns bemüht, die grundsätzlichen Ziele und den Stil der vorangegangenen Ausgaben beizubehalten. Dennoch bietet die vorliegende Auflage einige wichtige Änderungen. Das Material zur mathematischen Programmierung ist nun in ein neues Kapitel 13 mit dem Titel „Weiterführende Probleme der Optimierung“ ausgegliedert worden. Dieses Kapitel hat zwei Hauptthemen: Optimierung unter Ungleichungsrestriktionen und das Envelope Theorem. Unter dem ersten Thema werden die Kuhn-Tucker Bedingungen entwickelt, sehr ähnlich der vorangegangenen Auflage. Die ökonomischen Anwendungen wurden aber deutlich erweitert und umfassen Rationierungsprobleme und das Peak-Load-Pricing. Zum zweiten Themenbereich entwickeln wir das Envelope Theorem und führen die Konzepte der Maximalwertfunktion und der Dualität ein. Das Envelope Theorem wird dann auf unterschiedliche ökonomische Modelle angewendet, was uns zu wichtigen Resultaten wie Roys Identität, Shephards Lemma und Hotellings Lemma führt.

Die zweite wichtige Erweiterung dieser Auflage ist ein neues Kapitel 20 über dynamische Optimierung. Die Leser sollen hier mit den Grundlagen der optimalen Steuerung vertraut gemacht werden und Beispiele der ökonomischen Anwendung kennen lernen. Diese umfassen den Abbau erschöpfbarer Ressourcen und optimales Wachstum. Das Material für dieses Kapitel beruht in erheblichem Umfang auf der Diskussion optimaler Steuerung in „Elements of Dynamic Optimization“ von Alpha C. Chiang (McGraw-Hill 1992, nun erschienen bei Waveland Press, Inc.). Dort findet sich auch eine tiefergehende Diskussion sowohl der Theorie optimaler Steuerung als auch ihrer Vorgängerin, der Variationsrechnung.

Außer den beiden neuen Kapiteln zeichnet sich die vorliegende Auflage durch mehrere wichtige Ergänzungen und Verfei-

beck-shop.de

nerungen aus. In Kapitel 3 wurde die Diskussion der Lösung von Polynomen höherer Ordnung durch Faktorierung (Abschnitt 3.3) deutlich erweitert. In Kapitel 4 wurde ein neuer Abschnitt über Markovketten (Abschnitt 4.7) hinzugefügt. In Kapitel 5 wird nun gezeigt, wie sich anhand der reduzierten Zeilenstufenform der Rang einer Matrix bestimmen lässt (Abschnitt 5.1) Ebenfalls in diesem Kapitel werden nun die Hawkins-Simon Bedingungen im Zusammenhang mit Leontief Input-Output-Modellen behandelt (Abschnitt 5.7). Was die ökonomischen Anwendungen angeht, so wurden zahlreiche neue Beispiele hinzugefügt und einige der bestehenden Beispiele vertieft. Eine lineare Version des IS-LM-Modells wurde in Abschnitt 5.6 aufgenommen und eine allgemeinere Form dieses Modells in Abschnitt 8.6 wurde nun auf eine geschlossene und offene Variante erweitert, wodurch sich reichhaltigere Anwendungen der komparativen Statik zeigen lassen. Weitere neue Themen umfassen Erwartungsnutzen und Risikopräferenz (Abschnitt 9.3), ein Modell der Gewinnmaximierung, das eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion umfasst (Abschnitt 11.6) und ein zweiperiodiges Wahlproblem (Abschnitt 12.3). Ebenfalls überarbeitet und erweitert wurden auch die Übungsaufgaben, um den Einstieg in die praktische Arbeit mit den Methoden zu erleichtern.

Vorschläge zum Einsatz des Buches

Die mathematischen Werkzeuge werden in diesem Buch Schritt für Schritt erarbeitet, so dass man idealerweise der Reihenfolge der dargestellten Konzepte folgt. Allerdings kann man auch alternative Routen durch die Kapitel wählen: Nachdem man die Differentialgleichungen erster Ordnung abgeschlossen hat (Kapitel 15), ist es auch möglich, direkt zur Theorie der optimalen Steuerung überzugehen (Kapitel 20). Verfolgt man diesen Weg, dann sollte man Abschnitt 19.5 durcharbeiten, wo Phasendiagramme zweier Variablen behandelt werden.

Wenn man sich nicht näher für komparative Statik interessiert, kann man auf die komparative Statik von Modellen mit allgemein spezifizierten Funktionen (Kapitel 8) verzichten und von Kapitel 7 zu Kapitel 9 springen. In diesem Fall sollte man auch Abschnitt 11.7 auslassen sowie den komparativ statischen Teil von Abschnitt 12.5 und die Diskussion der Dualität in Kapitel 13.

Danksagungen zur englischen Ausgabe

Die Autoren dieses Buches sind vielen Menschen zu Dank verpflichtet. Zu allererst schulden sie sehr viel den Mathematikern und Ökonomen, deren großartige Ideen das Fundament dieses Buches bilden. Außerdem haben viele Studierende durch ihre Fragen und Rückmeldungen im Verlauf der Jahre die Grundanschauungen und die Herangehensweise dieses Buches geprägt.

Die vorangegangenen drei Ausgaben dieses Buches haben profitiert von den Kommentaren und Vorschlägen von (in alphabetischer Reihenfolge): Nancy S. Barrett, Thomas Birnberg, E. J. R. Booth, Charles E. Butler, Roberta Grower Carey, Emily Chiang, Lloyd R. Cohen, Gary Cornell, Harald Dickson, John C. H. Fei, Warren L. Fisher, Roger N. Folsom, Dennis R. Heffley, Jack Hirshleifer, James C. Hsiao, Ki-Jun Jeong, George Kondor, William F. Lott, Paul B. Manchester, Peter Morgan, Mark Nerlove, J. Frank Sharp, Alan G. Sleeman, Dennis Starleaf, Henry Y. Wan, Jr. und Chiou-Nan Yeh.

Für die vorliegende Ausgabe danken die Autoren aufrichtig für die Vorschläge und Ideen von Curt L. Anderson, David Andolfatto, James Bathgate, C. R. Birchenhall, Michael Bowe, John Carson, Kimoon Cheoung, Youngsub Chun, Kamran M. Dadkhah, Robert Delorme, Patrick Emerson, Roger Nils Folsom, Paul Gomme, Terry Heaps, Suzanne Helburn, Melvin Iyogu, Ki-Jun Jeong, Robbie Jones, John Kane, Heon-Goo Kim, George Kondor, Hui-wen Koo, Stephen Layson, Boon T. Lim, Anthony M. Marino, Richard Miles, Peter Morgan, Ralf Hernández Núñez, Alex Panayides, Xinghe Wang und Hans-Olaf Wiesemann.

Tiefer Dank gilt auch Sarah Dunn für ihre kompetente und engagierte Leistung bei der Niederschrift, dem Korrekturlesen und als Forschungsassistentin. Schließlich möchten die Verfasser auch aufrichtig Lucille Sutton, Bruce Gin und Lucy Mullins vom Verlag McGraw Hill danken für ihre Geduld und ihren Einsatz bei der Produktion dieses Manuskripts. Das Endprodukt mit allen verbleibenden Fehlern liegt aber in der eigenen Verantwortung der Verfasser.

Alpha C. Chiang

Kevin Wainwright

beck-shop.de

beck-shop.de

Über die Autoren

Alpha C. Chiang wurde sein Ph. D. von der Columbia Universität im Jahr 1954 verliehen, nachdem er 1946 einen B.A. von der St. John's Universität (Shanghai, China) und 1948 einen M.A. von der Colorado Universität erhalten hatte. Im Jahr 1954 wurde er Mitglied der Fakultät der Denison Universität in Ohio, wo er die Leitung der Abteilung Wirtschaftswissenschaften im Jahr 1961 übernahm. Ab 1964 lehrte er an der Universität von Connecticut bis zu seiner Emeritierung nach 28 Jahren. Er hatte außerdem Gastprofessuren am New Asia College der Chinese University of Hong Kong, der Cornell Universität, der Lingnam Universität in Hong Kong und der Helsinki School of Economics and Business Administration. Unter seinen Veröffentlichungen ist ein weiteres Buch über Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Elements of Dynamic Optimization, Waveland Press Inc., 1992. Unter den Ehrungen, die er erhielt, finden sich Preise der Ford Foundation und Forschungsstipendien der National Science Foundation, die Wahl zum Präsidenten der Ohio Association of Economists and Political Scientists, 1963–1964 sowie die Aufnahme in das Who's Who in Economics: A Biographical Dictionary of Major Economists 1900–1994, MIT Press.

Kevin Wainwright ist Mitglied der Fakultät des British Columbia Institute of Technology in Burnaby, B.C., Canada. Seit 2001 hat er die Präsidentschaft der Fakultätsgesellschaft und den Vorsitz des Programms Business Administration. Er führte seine Graduiertenstudien an der Simon Fraser Universität in Burnaby, B.C. in Canada durch und lehrt weiterhin an der dortigen wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät. Seine Spezialgebiete sind die Mikroökonomik und Mathematische Ökonomik.

Harald Nitsch ist Professor für Immobilienökonomik an der Dualen Hochschule Baden-Württemberg Mannheim und lehrt an der Deutschen Immobilienakademie (DIA) an der Universität Freiburg. Er schloss seine Studien als Baccalaureus der Mathematik und Diplom Volkswirt an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg ab, wo er im Jahr 1994 promovierte und 2003 habilitierte. Er wurde mit dem Friedrich-August-von-Hayek-Preis ausgezeichnet.

beck-shop.de

beck-shop.de

Inhaltsübersicht

Teil 1: Einführung **1**

Kapitel 1: Mathematik für Ökonomen 3

Kapitel 2: Ökonomische Modelle 7

Teil 2: Statische (Gleichgewichts-)Analyse **23**

Kapitel 3: Gleichgewichtsanalyse in der Ökonomie 25

Kapitel 4: Lineare Modelle und Matrizenrechnung 37

Kapitel 5: Lineare Modelle und Matrizenrechnung (Fortsetzung) 59

Teil 3: Komparativ-Statische Analyse **83**

Kapitel 6: Komparative Statik und das Konzept der Ableitung 85

Kapitel 7: Ableitungsregeln und ihre Anwendung in der komparativen Statik 101

Kapitel 8: Komparativ-statische Analyse von Modellen mit allgemein spezifizierten Funktionen 119

Teil 4: Optimierungsprobleme **145**

Kapitel 9: Optimierung: Eine Form der Gleichgewichtsanalyse 147

Kapitel 10: Exponentialfunktion und Logarithmus 169

Kapitel 11: Probleme mit mehr als einer Entscheidungsvariablen 191

Kapitel 12: Optimierung unter Gleichheitsrestriktionen 225

Kapitel 13: Weiterführende Probleme der Optimierung 261

Teil 5: Dynamische Analyse **287**

Kapitel 14: Dynamische ökonomische Modelle und Integralrechnung 289

Kapitel 15: Stetige Zeit: Differentialgleichungen erster Ordnung 309

Kapitel 16: Differentialgleichungen höherer Ordnung 327

Kapitel 17: Modelle in diskreter Zeit: Differenzengleichungen erster Ordnung 353

Kapitel 18: Differenzengleichungen höherer Ordnung 369

Kapitel 19: Systeme simultaner Differentialgleichungen und Differenzengleichungen 387

Kapitel 20 Dynamische Optimierung in stetiger Zeit 413

Teil 6: Grundlagen der Finanzmathematik **429**

Kapitel 21: Grundlagen der Finanzmathematik 431

Das griechische Alphabet **449**

Mathematische Symbole **450**

Eine kurze Liste von Literaturempfehlungen **453**

Antworten zu ausgewählten Aufgaben **455**

Sachverzeichnis **465**

beck-shop.de

beck-shop.de

Inhaltsverzeichnis

Teil 1: Einführung 1

Kapitel 1 Mathematik für Ökonomen 3

1.1 Mathematische und nicht-mathematische Ökonomik im Vergleich 4
1.2 Die Abgrenzung mathematischer Ökonomik von der Ökonometrie 5

Kapitel 2 Ökonomische Modelle 7

2.1 Bausteine eines mathematischen Modells 8
2.2 Die Reellen Zahlen 9
2.3 Das Konzept der Menge 10
2.4 Relationen und Funktionen 14
2.5 Funktionstypen 17
2.6 Funktionen von zwei oder mehr unabhängigen Variablen 19
2.7 Grade der Allgemeinheit 21

Teil 2: Statische (Gleichgewichts-) Analyse 23

Kapitel 3 Gleichgewichtsanalyse in der Ökonomie 25

3.1 Die Bedeutung des Begriffs Gleichgewicht 26
3.2 Partielles Marktgleichgewicht – ein lineares Modell 26
3.3 Partielles Marktgleichgewicht – ein nicht-lineares Modell 28
3.4 Allgemeines Marktgleichgewicht 32
3.5 Gleichgewichte in Makroökonomischen Kreislaufmodellen 35

Kapitel 4 Lineare Modelle und Matrizenrechnung 37

4.1 Matrizen und Vektoren 38
4.2 Matrizenoperationen 39
4.3 Anmerkungen zu Operationen mit Vektoren 44
4.4 Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz 49
4.5 Einheitsmatrizen und Nullmatrizen 51
4.6 Transponierte und inverse Matrizen 52
4.7 Endliche Markovketten 56

Kapitel 5 Lineare Modelle und Matrizenrechnung (Fortsetzung) 59

5.1 Bedingungen für die Regularität einer Matrix 60
5.2 Test auf Regularität mit Hilfe der Determinante 63
5.3 Grundlegende Eigenschaften von Determinanten 66
5.4 Bestimmung der inversen Matrix 70
5.5 Die Cramersche Regel 72
5.6 Anwendungen auf Markt- und Kreislaufmodelle 74
5.7 Leontief Input-Output-Modelle 77
5.8 Die Grenzen der statischen Analyse 82

Teil 3: Komperativ-Statische Analyse 83

Kapitel 6 Komparative Statik und das Konzept der Ableitung 85

6.1 Der Ansatz der Komparativen Statik 86
6.2 Veränderungsrate und Ableitung 86
6.3 Die Ableitung und die Steigung einer Funktion 88
6.4 Das Konzept des Grenzwerts 88
6.5 Exkurs über Ungleichungen und Beträge 92
6.6 Sätze über Grenzwerte 95
6.7 Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion 96

Kapitel 7 Ableitungsregeln und ihre Anwendung in der komparativen Statik 101

7.1 Ableitungsregeln für Funktionen einer Variablen 102
7.2 Ableitungsregeln für zwei oder mehr Funktionen derselben Variablen 104
7.3 Ableitungsregeln für Funktionen unterschiedlicher Variablen 109
7.4 Partielle Ableitung 111
7.5 Anwendungen in der komparativ statischen Analyse 114
7.6 Anmerkung zu Jacobi-Determinanten 117

beck-shop.de

Kapitel 8 Komparativ-statische Analyse von Modellen mit allgemein spezifizierten Funktionen 119

8.1 Differentiale 120
8.2 Totales Differential 123
8.3 Regeln für Differentiale 125
8.4 Totale Ableitungen 126
8.5 Ableitungen impliziter Funktionen 129
8.6 Komparative Statik allgemein formulierter Modelle 135
8.7 Grenzen der komparativen Statik 143

Teil 4: Optimierungsprobleme 145

Kapitel 9 Optimierung: Eine Form der Gleichgewichtsanalyse 147

9.1 Optima und Extremwerte 148
9.2 Lokales Maximum und Minimum: Überprüfung der ersten Ableitung 149
9.3 Zweite und höhere Ableitungen 152
9.4 Überprüfung der zweiten Ableitung 156
9.5 Maclaurin Reihe und Taylorreihe 161
9.6 Bestimmung von Extremwerten von Funktionen einer Variablen durch Prüfung der n-ten Ableitung 166

Kapitel 10 Exponentialfunktion und Logarithmus 169

10.1 Das Wesen der Exponentialfunktionen 170
10.2 Natürliche Exponentialfunktion und Wachstum 173
10.3 Logarithmen 177
10.4 Logarithmusfunktion 179
10.5 Ableitung von Exponential- und Logarithmusfunktionen 182
10.6 Wahl des optimalen Zeitpunkts 185
10.7 Weitere Anwendungen exponentieller und logarithmischer Ableitungen 188

Kapitel 11 Probleme mit mehr als einer Entscheidungsvariablen 191

11.1 Die Differentialversion der Optimalitätsbedingungen 192
11.2 Extremwerte einer Funktion zweier Variablen 193
11.3 Quadratische Formen – ein Exkurs 197
11.4 Zielfunktionen mit mehr als zwei Variablen 204
11.5 Der Bezug von Bedingungen zweiter Ordnung zu Konkavität und Konvexität 207
11.6 Anwendungen in der Ökonomie 215
11.7 Komparativ-Statische Aspekte der Optimierung 222

Kapitel 12 Optimierung unter Gleichheitsrestriktionen 225

12.1 Wirkung einer Restriktion 226
12.2 Bestimmung der stationären Werte 227
12.3 Bedingungen zweiter Ordnung 231
12.4 Quasikonkavität und Quasikonvexität 236
12.5 Nutzenmaximierung und Konsumnachfrage 242
12.6 Homogene Funktionen 248
12.7 Minimalkostenkombinationen von Inputfaktoren 252

Kapitel 13 Weiterführende Probleme der Optimierung 261

13.1 Nichtlineare Programmierung und Kuhn-Tucker-Bedingungen 262
13.2 Regularitätsbedingung 268
13.3 Ökonomische Anwendungen 272
13.4 Sätze über hinreichende Bedingungen in der nichtlinearen Programmierung 275
13.5 Maximalwertfunktionen und Envelope-Theorem) 278
13.6 Dualität und Envelope-Theorem 282
13.7 Einige abschließende Bemerkungen 286

Teil 5: Dynamische Analyse 287

Kapitel 14 Dynamische ökonomische Modelle und Integralrechnung 289

14.1 Dynamik und Integration 290
14.2 Unbestimmte Integrale 291
14.3 Bestimmte Integrale 296
14.4 Uneigentliche Integrale 300
14.5 Einige ökonomische Anwendungen von Integralen 302
14.6 Das Domar Wachstumsmodell 306

Kapitel 15 Stetige Zeit: Differentialgleichungen erster Ordnung 309

15.1 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstantem Term 310
15.2 Dynamik von Marktpreisen 312
15.3 Variable Koeffizienten und variabler Term 315
15.4 Exakte Differentialgleichungen 317
15.5 Nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades 320

beck-shop.de

15.6 Qualitativ graphische Analyse 322
15.7 Solow Wachstumsmodell 324

Kapitel 16 Differentialgleichungen höherer Ordnung 327

16.1 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstantem Term 328
16.2 Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen 332
16.3 Untersuchung des Falls komplexer Nullstellen 339
16.4 Ein Marktmodell mit Preiserwartungen 342
16.5 Die Wechselbeziehung zwischen Inflation und Arbeitslosigkeit 345
16.6 Differentialgleichungen mit variablem Term 348
16.7 Differentialgleichungen höherer Ordnung 349

Kapitel 17 Modelle in diskreter Zeit: Differenzengleichungen erster Ordnung 353

17.1 Diskrete Zeit, Differenzen und Differenzengleichungen 354
17.2 Lösung einer Differenzengleichung erster Ordnung 355
17.3 Die dynamische Stabilität von Gleichgewichten 358
17.4 Das Spinnwebmodell 360
17.5 Ein Marktmodell mit Lagerhaltung 363
17.6 Nichtlineare Differenzengleichungen – Die qualitativ-graphische Analyse 365

Kapitel 18 Differenzengleichungen höherer Ordnung 369

18.1 Lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und konstantem Term 370
18.2 Das Multiplikator-Akzelerator-Modell von Samuelson 374
18.3 Inflation und Arbeitslosigkeit in diskreter Zeit 378
18.4 Verallgemeinerung zu variablen Termen und Gleichungen höherer Ordnung 381

Kapitel 19 Systeme simultaner Differentialgleichungen und Differenzgleichungen 387

19.1 Die Entstehung dynamischer Systeme 388
19.2 Die Lösung simultaner dynamischer Gleichungen 389
19.3 Dynamische Input-Output-Modelle 394
19.4 Eine weitere Variante des Modells von Inflation und Arbeitslosigkeit 398
19.5 Phasendiagramme zweier Variablen 401
19.6 Linearisierung eines nichtlinearen Differentialgleichungssystems 407

Kapitel 20 Dynamische Optimierung in stetiger Zeit 413

20.1 Das Wesen der optimalen Steuerung 414
20.2 Alternative Endbedingungen 418
20.3 Autonome Probleme 421
20.4 Ökonomische Anwendungen 422
20.5 Unendlicher Zeithorizont 424
20.6 Grenzen der dynamischen Analyse 426

Teil 6: Grundlagen der Finanzmathematik 429

Kapitel 21 Grundlagen der Finanzmathematik 431

21.1 Barwert und finanzmathematische Äquivalenz 432
21.2 Endliche Rentenzahlungen 433
21.3 Vermögensanlagen mit unendlicher Laufzeit 438
21.4 Annuitätendarlehen 440
21.5 Wirkung eines Disagio 443
21.6 Fazit 447

Das griechische Alphabet 449
Mathematische Symbole 450
Eine kurze Liste von Literaturempfehlungen 453
Antworten zu ausgewählten Aufgaben 455
Sachverzeichnis 465