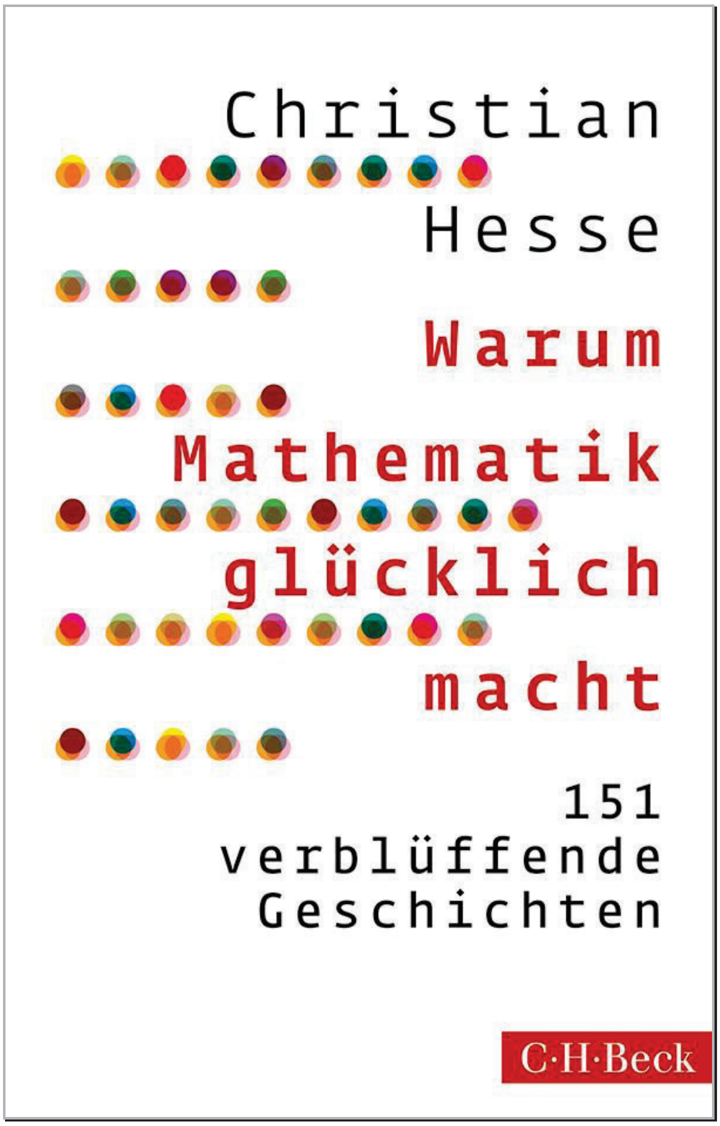
C.H.BECK
WWW.CHBECK.DE

Unverkäufliche Leseprobe



Christian Hesse
Warum Mathematik glücklich macht
151 verblüffende Geschichten

2023. 346 S., mit 93 Abbildungen
ISBN 978-3-406-80907-1

Weitere Informationen finden Sie hier:
https://www.chbeck.de/35600465

C·H·Beck
PAPERBACK

Wie die Liebe und die Musik hat Mathematik die Gabe, Menschen glücklich zu machen. Angesichts ihrer oft kargen Darreichungsform eine kühne Behauptung? Dafür, dass sie dennoch stimmt, tritt der Mathematiker und Mathematik-Belletrist Christian Hesse in seinem neuen Buch den Beweis an – in 151 verblüffenden Geschichten.

Die Mathematik ist nicht nur ein grandioses Abenteuer im Kopf und eine über Jahrtausende gewachsene Ressource der menschlichen Kultur. Sie ist noch mehr: ein «vielseitiger großer Ratschläger für alle Fälle der Welt» (Ror Wolf). Warum haben Tiger Streifen, Dalmatiner Punkte und Elefanten nichts von beidem? Warum haben manche Heuschreckenarten Lebenszyklen, deren Länge immer Primzahlen sind? Wie ist es möglich festzustellen, dass Homer die *Odyssee* nicht geschrieben hat? Diese und viele andere Fragen kann die Mathematik beantworten, und wie sie dabei vorgeht und vor allem wie der Autor dieses Vorgehen darstellt, das verfolgt der Leser mit Faszination, bisweilen Erstaunen und immer mit Vergnügen.

Christian Hesse promovierte an der Harvard University (USA) und lehrte an der University of California, Berkeley (USA). Seit 1991 ist er Professor für Mathematik an der Universität Stuttgart. Im Verlag C.H.Beck ist zuletzt von ihm erschienen: *Math up your Life! Schneller rechnen, besser leben* (2016) und *Mathe to go. Magische Tricks für schnelles Kopfrechnen* (3. Aufl. 2019).

Christian Hesse

Warum Mathematik glücklich macht

151 verblüffende Geschichten

Verlag C.H.Beck

Mit 93 Abbildungen im Text

1. Auflage in der Beck'schen Reihe. 2010
2. Auflage. 2011
3., durchgesehene Auflage. 2011
4. Auflage. 2013
5. Auflage in C.H.Beck Paperback. 2014

Originalausgabe

6. Auflage in C.H.Beck Paperback. 2023

www.chbeck.de
Umschlagentwurf: malsyteufel, Willich
Autorenfoto: Ivo Kljuce
Satz: C.H.Beck.Media.Solutions, Nördlingen
Druck u. Bindung: CPI – Ebner & Spiegel, Ulm
Printed in Germany
ISBN 978 3 406 80907 1

myclimate

klimaneutral produziert
www.chbeck.de/nachhaltig

Was drin ist

Für Andrea,
für Hanna,
für Lennard

Begrüßung des Lesers

Menschen sind bestrebt, einen Zustand des sich Wohlfühlens herbeizuführen. Großes und Kleines kann dabei abträglich oder förderlich sein. Der Philosoph Bertrand Russell meinte, dass ein Mensch, der Erdbeeren mag – bliebe alles andere gleich –, besser an die Welt, in der wir leben, angepasst ist als jemand, der sie nicht mag. Denn Erdbeeren existieren, und eine positive Beziehung zu ihnen trägt zum Wohlgefühl bei.

So ist es auch mit der Mathematik, sogar in gesteigerter Form. Auch die Mathematik bietet ganz epikureisch manch soliden Lustgewinn. Mehr noch: Mathematik hat die Gabe, wie die Liebe und die Musik, Menschen glücklich zu machen. «The sexiest discipline on the planet», nennt sie der Bestsellerautor Simon Singh und hat recht. Wie die Liebe und die Musik und weit mehr als Erdbeeren erzeugt die Mathematik starke Gefühle. Nicht alle, zugegeben, sind positiv: Wie keine andere Disziplin ist die Mathematik polarisierend. Wenn es auch am Beginn des 3. Jahrtausends zunehmend schwieriger wird, ihre großen Errungenschaften zu leugnen, so erscheint sie ihren Gegnern doch emotional frugal, intellektualistisch, vollwertig furchterregend und als Beschäftigung in etwa so spannend wie die Besichtigung frischer Farbe beim Antrocknen.

Für ihre Anhänger ist die Mathematik nicht nur ein grandioses Abenteuer im Kopf. Sie ist eine über Jahrtausende gewachsene Ressource der menschlichen Kultur, deren Tiefensehkraft uns Gefilde weit jenseits unserer Erfahrungswelt erschließt, etwa die Welt der Elementarteilchen oder die Vorzeiten des Weltalls. Die Mathematik berührt aber auch unser aller Alltag und steckt unbemerkt in vielen Dingen unserer Lebenswelt: Die Heizung heizt, der Flieger fliegt, die Brücke trägt nur dann, wenn Mathematik im Spiel ist.

Darüber hinaus ist die Mathematik eine Quelle nachhaltig spürbarer Schönheit. Ihre Präzision, ihre kristalline Klarheit und Eleganz verleihen der Mathematik ihre ästhetische Qualität. Dazu kommt die nahtlose Passform, mit der ein Ensemble von Einzelüberlegungen sich zu einer schlüssigen Argumentationskette formiert, zu einem mathematischen Beweis oder zur Lösung eines Problems. Vergleichbar den Rädchen eines Uhrwerks, greifen sie ineinander und bilden auf balancierte Weise ein größeres harmonisches Ganzes. Die gelungensten Exemplare dieses Genres haben etwas von atemberaubender Formvollendung.

Und nicht zuletzt und hier vor allem ist Mathematik reich an Themen, die sich in unterhaltsame Tisch- und Partygespräche einbringen lassen. Das ist vielleicht nicht die gängige Ansicht, aber es ist meine Ansicht und vielleicht auch bald die Ihre. Wir sprechen in diesem Buch von allen möglichen Dingen und noch einigen mehr.

Doch so, wie Mathematik von Profis für Profis produziert wird, ist sie ein extremes Bildungsprodukt, und ihre stark normierte, karge Darreichungsform hat etwas Hermetisches und Unzugängliches. Das rührt zum Teil daher, dass niemand der Mathematik ernsthaft nachsagen kann, sie sei vorbereitungslos allgemeinverständlich: Sie ist ein Werkzeug, an dem man ausgebildet sein muss. Die Mathematik kann aber, wenn sie nur will, ebenso gut auch unterhaltsam sein. Und man sagt selbst dann noch nicht zu viel, wenn festgestellt wird, dass sie sich sogar als belletristische Wissenschaft verstehen lässt, voll strömender Lebendigkeit und geistreich begeisternd. Das zu meinen ist jedenfalls möglich, wenn man sich Fragen wie diese vergegenwärtigt: Warum haben Tiger Streifen, Dalmatiner Punkte und Elefanten nichts von beidem? Warum haben manche Heuschreckenarten Lebenszyklen, deren Länge immer Primzahlen sind? Kann man beim Glücksspiel zwei Verluststrategien zu einer Gewinnstrategie kombinieren? Wie kann man einen Kuchen unter drei Personen neidfrei aufteilen? Was ist das optimale Verhalten bei Warteschlangen? Was ist eine gute Strategie beim Lotto? Wie ist es möglich festzustellen, dass Homer die *Odyssee* nicht geschrieben hat? Dies und vieles andere kann Ihnen die Mathematik beantworten. So gesehen ist sie eine Art «vielseitiger großer Ratschläger für alle Fälle der Welt» (Ror Wolf). Und wie sie dabei vorgeht, das sieht man bisweilen mit Faszination und angehaltenem Atem.

Mein Buch will ein lebendiges Bild der Mathematik zeichnen. Nicht darauf angelegt ist es, ein Buch mit sieben Siegeln zu sein. Selbst bei schwachem Fleiß und mittlerer Ausdauer ist es mit geringen mathematischen Kenntnissen und gesundem Menschenverstand zugänglich.

Es bietet Mathematisches und Mathematik-Angehauchtes in vielen Spielarten aus vielen Gebieten. Durchaus gewollt, ist es kunterbunter und munterer, als es Bücher des mathematischen Genres gemeinhin sind. Zwar mag man szenische und kompositorische Schwerpunkte ausmachen, doch am ehesten ist es eine Kollektion flanierenden Denkens bei starker Streuung der Themen, eine exaltierte Querbeet-Kompilation von Mathematik und Leben, die Leselust erzeugen will. Aber irgendwie anders: etwa wie eine Art Woodstock der erzählenden Mathematik. Meine Intention ist es, das Thema so zu bespielen, wie Jon Bon Jovi seine Gitarre bespielt, nicht wie Anne-Sophie Mutter ihr Instrument bespielt, sondern eben wie Bon Jovi.

Bei den hier versammelten Lesestücken in Feiertagslänge geht es nicht darum, komplexe Zusammenhänge zu umschiffen, aber doch darum, sie durch Umformulieren auf Augenhöhe zu bringen und Schweres unschwer leichter zu sagen. Nicht Kleinkunst habe ich im Sinn, sondern tiefer gehängte Hochkultur, bis hinunter auf Verstehbarkeit in Echtzeit.

Dieses Buch mag man als Bemühung deuten, eine kommunikative Brücke zu schlagen zwischen Mathematik und dem Rest der Welt. Es bietet eine gedankliche und erzählerische Collage von Miniaturen und Mikroessays, intellektuell-vielkulturell angelegt. Es bietet mathematischen Denkstoff als reizvolles Erlebnissegment, dem gegenüber man sich etwa durch bereitwilliges Mitschwingen in das richtige Verhältnis setzen kann. Lassen Sie Ihre Mitmachmentalität anregen und folgen Sie mir in den Behaglichkeitskokon einer temperamentvollen Themenmischung aus freier mathematischer Wildbahn: Die Mathematik ist genauso verrückt, so witzig und aberwitzig wie das Leben. Und sie werden nach Lektüre dieses Buches über Mathematik nie wieder so denken wie davor.

Das Ergebnis dieser Bemühung mag fragmentarisch sein, die Bemühung selbst aber ist es nicht. Schon seit langem liegt mir die

Popularisierung der Mathematik am Herzen. Insofern versteht sich dieses Buch neben allem anderen auch als Hommage an ein Betätigungsfeld, in das sehr viel Herzblut fließt und das mir geholfen hat bei der für jeden nicht unerheblichen Anstrengung, den eigenen Platz in der Welt zu finden.

Mannheim, 18. Mai 2010 Christian H. Hesse

1. Alltagsweltliches

1. *Kleine Mathematik des Lebens und Sterbens*

Leben und Sterben, das sind ernste Themen, denen man sich nicht immer in heiterem Plauderton nähern kann. Ohne elegisch zu werden, bleiben wir hier im faktischen Bereich. Eine groß angelegte statistische Studie in den 1990er Jahren hat sich mit dem Sterben vor und nach Geburtstagen und anderen persönlich bedeutenden Ereignissen beschäftigt, etwa wichtigen Feiertagen, Hochzeitstagen und so weiter. Die Ergebnisse sind staunenswert. Zum Beispiel zeigt eine Untersuchung innerhalb der chinesischen Community in den USA, die Sterbedaten aus einem Zeitraum von über 25 Jahren verwendete, dass die Todesraten der mindestens 75-jährigen Frauen in der 7-Tages-Periode vor dem Harvest Moon Festival, dem Chinesischen Erntedankfest, um 35 % sanken, während sie in der Woche nach dem wichtigen Feiertag um ca. denselben Prozentsatz stiegen (verglichen mit dem Durchschnittsprozentsatz für das gesamte Jahr).

Kurz unsterblich. Repräsentative Kontrollgruppen von nichtchinesischen Frauen zeigen dieses Verhalten nicht. Das Harvest Moon Festival ist ein wichtiges Fest, bei dem die älteste Frau eines Haushaltes über die Festivitäten präsidiert, eine Prozession anführt und auch sonst im Mittelpunkt steht. Die Studie lässt keinen anderen Schluss zu als den beflügelnden Vorstellungsinhalt, dass die ältesten Frauen den nahenden Tod bei lohnendem Anlass im Schnitt etwas hinauszuschieben vermochten. So erzeugt das Harvest Moon Festival einen possierlichen Effekt nichtlinearer Körpererfahrung in Form von prolongierter Lebendigkeit.

> ***Mathematikata***
>
> Bitte sie zu warten – ich bin fast fertig.
>
> **Carl Friedrich Gauß, mathematischer Wirklichkeitsüberbieter par excellence, während der Arbeit an einem Beweis, als er darüber informiert wird, dass seine Frau im Sterben liegt.**

Ein ganz ähnlicher Effekt wurde für jüdische Männer in den Wochen um das Passah-Fest ermittelt. Die Sterberate jüdischer Männer erreichte in der Woche vor dem Fest ihr Jahresminimum, 31% geringer gegenüber dem Jahresdurchschnitt, und stieg in der Woche nach dem Fest auf ein Plus von etwa demselben Wert gegenüber dem Jahresmittel. Das Passah-Fest ist ein zeitlich variabler Feiertag, so dass jahreszeitliche Effekte als Erklärung der Ergebnisse ausgeschlossen werden können. Im Gegenteil: Der Termin des Festes ändert sich jährlich und der angesprochene Passah-Effekt wandert mit dem Passah-Fest durch das Jahr.

> ***Sei live dabei!***
>
> Stirbt der Beamte während der Dienstreise, ist die Dienstreise damit beendet.
>
> **§26 Landesreisekostengesetz NRW**

Eine andere Studie, «The Birthday: Lifeline or Deadline», durchgeführt vom Soziologieprofessor David Phillips von der Universität von Kalifornien, beschäftigt sich mit dem so genannten Geburtstagseffekt. Die Untersuchung, in der rund 3 Millionen Daten von Todesfällen aufgrund natürlicher Ursachen statistisch analysiert wurden, zeigt, dass es für Frauen wahrscheinlicher ist, in der Woche direkt nach ihrem Geburtstag zu sterben als in irgendeiner anderen Woche im Jahreslauf, während Männer am wahrscheinlichsten in der

Woche direkt vor ihrem Geburtstag starben. In beiden Fällen betrug die prozentuale Abweichung 3% gegenüber dem Mittel aller 52 Wochen des Jahres. Diese Geburtstagsdelle fällt zwar erheblich geringer aus als die konstatierten Feiertagseffekte, doch wegen des großen Umfangs der Studie ist sie statistisch hochsignifikant.

Der Tod ist die stärkste Form der Dienstunfähigkeit!

Aus: Unterrichtsblätter für die Bundeswehrverwaltung

Als kleine Zugabe oder kurzer Nachruf meinerseits zu dieser preiskrönungswürdigen Extremalaussage hier noch eine Kollektion standesgemäßer Todesarten:

Der Gärtner beißt ins Gras
Der Kellner gibt den Löffel ab
Der Schornsteinfeger kehrt nie wieder
Die Putzfrau macht einen sauberen Abgang
Der Golfspieler wird eingelocht
Der Fährmann ist hinüber
Der Vertreter tritt ab
Der Wanderer ist von uns gegangen
Der Bergmann fährt in die Grube
Für den Uhrmacher ist alles zu spät
Der Schlossbesitzer gibt den Geist auf
Der Spanner ist weg vom Fenster
Der Atheist muss dran glauben
Der Zahnarzt hinterlässt eine schmerzliche Lücke
Der Mantafahrer wird tiefer gelegt
Der Palästinenser geht über den Jordan
Der Turner verreckt
Der Pornostar nippelt ab
Der Pantomime verstummt
Der Metzger springt über die Klinge
Der Hutmacher nimmt den Hut
Der Schaffner liegt in den letzten Zügen
Der Liebhaber ist nicht mehr unter uns
Dem Elektriker geht das Licht aus
Der Chemiker reagiert nicht mehr ➡

Der Historiker ist Geschichte
Der Ornithologe macht die Flatter
Der Mathematiker geht gegen unendlich

Geburtstage sind persönlich relevante Tage. Sie können emotional positiv besetzt sein: etwa eine Zeit größerer Aufmerksamkeit von Familie und Freunden mit sich bringen, oder emotional eher negativ besetzt sein: etwa als Datum empfunden werden, das verstärkt die Vergänglichkeit vor Augen führt.

Eine denkbare Erklärung für die angesprochenen statistischen Resultate ist eine psychologische: Die Möglichkeit, dass Frauen mehrheitlich ihrem Geburtstag positiv entgegensehen und durch noch unbekannte Mechanismen einen nahenden Tod mit gesteigertem Lebenswillen bis nach dem Geburtstag hinauszuschieben vermögen, während für Männer heraufziehende Geburtstage mehrheitlich negativ emotional besetzt sind, was ihren Überlebenswillen in Todesnähe im Durchschnitt geringfügig, aber durch Daten messbar, abschwächt.

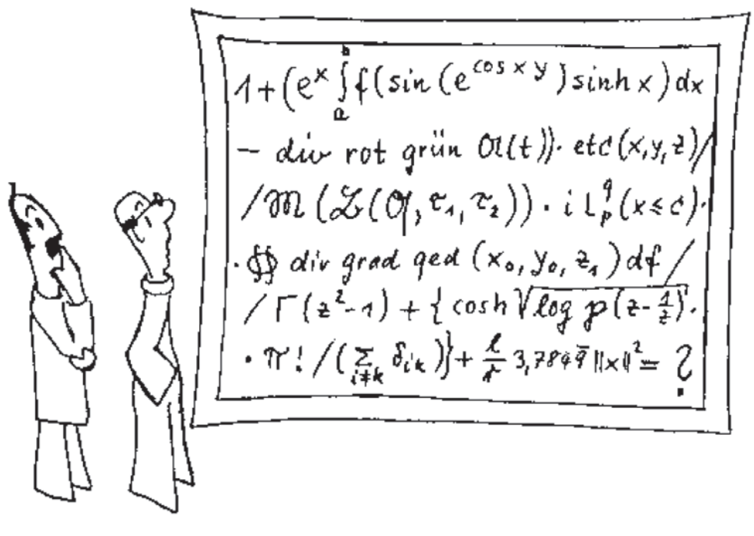


Abbildung 1: Cartoon von Friedrich Wille: «Sein letzter Wunsch war, dass wir dort weitermachen, wo er aufgehört hat.»

2. *Arithmetik der Ordinalzahlen oder Jede Zweite plus jede Dritte macht zusammen …*

… jede Fünfte?

Jede fünfte erwerbstätige Mutter in Deutschland arbeitet zumindest gelegentlich auch an Sonn- und Feiertagen. In Ostdeutschland arbeitet jede zweite Mutter mit Kindern unter 18 Jahren an Sonn- und Feiertagen (49 Prozent), im Westen tut dies etwa jede Dritte (38 Prozent).

***Goslarsche Zeitung* vom 22. 5. 2004**

3. *Zerologie*

«Die Lektion habe ich jedenfalls mitgekriegt: Durch null darf man nicht dividieren! Nie und nimmer. Wer sich dabei erwischen lässt – nun ja, für den kann ich auch nichts mehr tun. Und wenn nun die Sache aber unbemerkt bleibt? Es soll ja sogar Situationen geben, in denen man nicht mal selber mitbekommt, dass gerade eine Division durch null stattfindet. Dann frage ich mich allerdings als denkender Mensch, weshalb das so schlimm sein soll. Gefällt es dem Lehrer oder der Lehrerin nicht? Es könnte ihnen ja egal sein, wenn es heimlich geschieht. Sieht es die Schulaufsichtsbehörde nicht so gern oder hat gar die Polizei etwas dagegen?», so schreibt Alfred Schreiber in seinem *Inneren Monolog bei der Suche nach unverstandener Wahrheit.*

Hat auch Ihnen schon mal jemand gesagt, dass es verboten ist, durch null zu dividieren? Ja? Und hat er Ihnen auch den Grund dafür genannt? Nein? Halten Sie es für möglich, dass Ihr Leben davon abhängen könnte, ob Computer die Division durch null richtig behandeln? Stellen Sie sich etwa vor, Sie sitzen in einem Flieger, dessen Autopilot aktiv ist. Stellen Sie sich nun weiterhin vor, dass der Computer des Autopiloten gerade durch null dividiert. Hoffentlich schaltet er dann nicht auf manuellen Betrieb um oder gar ab. Und noch hoffentlicher teilt Ihr Herzschrittmacher nicht durch null, bleibt stehen und hört auf, Ihrem Herzen Schritt zu machen. In beiden Fällen könnten Sie flugs in dem schweben, was man gemeinhin eine Gefahr nennt. Das sind keine schönen Vorstellungen, aber auch keine ganz weit hergeholten Phantasien. Der Versuch eines Programms, durch null zu dividieren, führt bei manchen Computern zu Laufzeitfehlern, die unbehandelt gelegentlich den Abbruch des Programms zur Folge haben. Bisweilen passiert dann Hochgradiges.

> Die schwarzen Löcher entstanden, nachdem Gott das Universum durch null dividiert hatte.
>
> **Graffiti auf einer Wirtshaus-Wand in Wanne-Eickel-West**

Am 21. September 1997 etwa führte der Bordcomputer des Lenkwaffenkreuzers USS Yorcktown der US-Navy eine Division durch null durch, was das gesamte System abstürzen und unter anderem den Schiffsantrieb ausfallen ließ. Das Schiff war manövrierunfähig. Nach einem Bericht der *US-Government Computer News* musste es zurück in den Hafen geschleppt werden.

Aber warum nur darf man nicht durch null dividieren? Warum ist der Ausdruck 1/0 in der Mathematik verpönt, verboten und gefährlich? Eigentlich ist die Antwort ganz einfach. Wenn man die Division durch null zuließe, würde sich in der weiteren Folge Denkmüll erge-

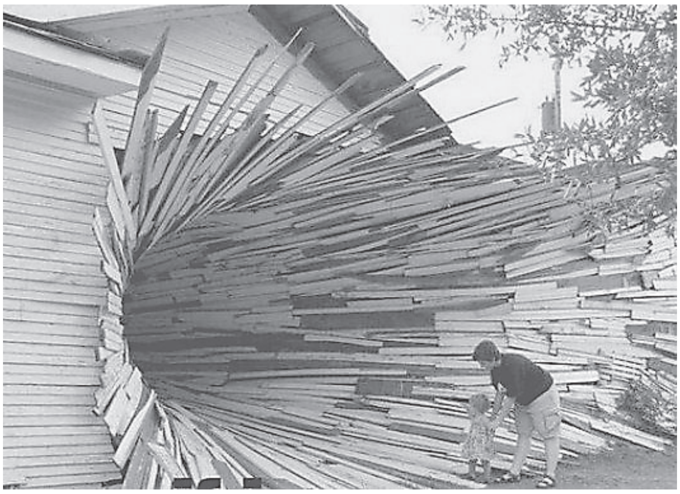


Abbildung 2: Hat die kleine Emily etwa durch null dividiert?

ben in Form von Aussagen, die der Logik widersprechen. Insbesondere könnte man dann beweisen, dass 2 = 1 ist. Um das Gemeinte präzise zu verarbeiten, demonstrieren wir es in sieben leicht fasslichen Schritten:

1. Setze $x = y$ [multipliziere beide Seiten mit x]
2. Ergibt: $x^2 = xy$ [subtrahiere y^2]
3. Ergibt: $x^2 - y^2 = xy - y^2$ [faktorisiere]
4. Ergibt: $(x + y)(x - y) = y(x - y)$ [dividiere durch $(x - y)$]
5. Ergibt: $x + y = y$ [substituiere y für x aus Zeile 1]
6. Ergibt: $2y = y$ [dividiere durch y]
7. Ergibt: $2 = 1$ Voila!

Wir haben etwas offensichtlich Falsches aus etwas offensichtlich Richtigem durch mathematische Schlüsse erhalten. Ist die Mathematik gebrochen? Sollten wir alle Mathematiker zu Philosophen umschulen? Nicht so schnell! Ein illegaler, nicht wahrheitserhaltender Schritt hat sich eingeschlichen. Welcher ist es?

Der Fehler liegt in Zeile 4, in der zur Division durch $(x - y)$ aufgerufen wird. An und für sich nichts Schlimmes, doch wegen der Anfangsfestsetzung $x = y$ ist das eine Division durch null. Das war sehr versteckt und unscheinbar: Eine Division durch null errötet nicht.

Wenn ich beweisen kann, dass 2 = 1 ist, dann habe ich den logischen Super-GAU. Denn dann kann ich alles beweisen: dass ich der Papst bin, dass die Erde eine Scheibe ist, einfach jeden Unsinn. Um das zu vermeiden, wird die Division durch null illegalisiert.

Abbildung 3: Division durch eine recht große Null.

Abbildung 4: Division durch eine recht kleine Null. Entweder das, oder jemand hat die Spülung betätigt.

4. *Audio-Paradoxon*

Am Dienstag, 10:30 Uhr, findet ein Probefeueralarm statt. Sollte es zu dieser Zeit wirklich brennen, fällt der Probealarm aus!

Aushang vor Jahren an einem Konferenzsaal, aber ich weiß nicht mehr, ob in Am-, Bam- oder Camberg.

Frage: Was ist das Gegenteil eines Probealarms?

5. *Von A wie Warteschlange bis Z wie Wahrscheinlichkeitstheorie*

Warteschlangen sind Standardsituationen des Alltags. Überall treffen wir auf sie, vor Supermarktkassen, in der Postfiliale, am Check-in-Schalter auf dem Flughafen. Mathematisch kann man alle diese Schlangen mit derselben Theorie untersuchen: Die Warteschlangentheorie ist ein Teilgebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie, das 1917 vom dänischen Mathematiker Agner Erlang mit einer wissenschaftlichen Arbeit über die Dimensionierung von Fernsprechvermittlungszentralen begründet wurde und mit vielen bemerkenswerten modernen Erkenntnissen aufwarten kann.

Jede Schlange hat drei Grundelemente: die Bedienraten der Bedienenden, den Ankunftsstrom mit der Rate der sich neu anstellenden Kunden und den Wartebereich mit seiner Länge, also die eigentliche Schlange. Diese Elemente streuen in ihren Eigenschaften statistisch.

Warteschlangen haben eine mathematisch ganz exquisite Dynamik. Man kann das pulsierende Auf und Ab einer Warteschlange mit der chaotischen Bewegung der Moleküle in einer Flüssigkeit vergleichen und die Warteschlangen-Dynamik sehr genau annähern durch die Dynamik der Molekülbewegung, wenn man diese auf eine Dimension herunterbricht. Einer Bewegung nach links des Moleküls entspricht ein Kunde, der gerade bedient worden ist und den Schalter für den nächsten Kunden frei macht, so dass die Länge der Warteschlange um 1 vermindert wird. Einer Bewegung nach rechts des Moleküls entspricht ein Kunde, der sich an der Schlange anstellt, worauf ihre Länge um 1 vergrößert wird.

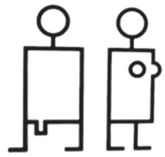
Albert Einstein hat die Molekularbewegung von Teilchen in Flüssigkeiten vor rund hundert Jahren tiefschürfend untersucht. Einige seiner Ergebnisse konnten für die Analyse von Wartesituationen fruchtbar gemacht werden, etwa von dem Warteschlangentheoretiker Professor Thomas Hanschke aus Clausthal-Zellerfeld. So kann man inzwischen mit der Analogie zwischen Warteschlangen- und Moleküldynamik viele Kenngrößen von Wartesystemen sehr präzise berechnen: Dazu gehören die mittlere Wartezeit eines Kunden und die durchschnittliche Länge der Warteschlange. Es lassen sich auch Effizienzberechnungen für einen reibungslosen Ablauf anstellen, man kann also etwa eine Antwort auf die Frage finden: Wie viele Schalter sind nötig, damit 90% der Kunden bei gegebenem Andrang nicht mehr als fünf Minuten warten müssen?

Grob gesprochen, sagt die Theorie, dass Unregelmäßigkeiten und Variationen in Wartesystemen lange Schlangen erzeugen: Der eine steht vor der Supermarktkasse mit nur vier Teilen im Wagen, der andere macht den Wocheneinkauf für eine fünfköpfige Familie, der eine hat sein Bargeld parat, der andere will mit EC-Karte zahlen und sucht die Karte, der Nächste hat vergessen, seine Bananen abzuwiegen.

Die Theorie sagt uns auch, dass 10 Kunden vor einem Schalter etwas gründlich anderes sind als 100 Kunden vor 10 Schaltern. Das

Zweite ist entschieden vorzuziehen, bietet es doch bessere Chancen für den Einzelnen, eine Kasse schneller zu passieren; denn große Systeme können Unregelmäßigkeiten leichter und effektiver kompensieren. Gibt es nur eine einzige Kasse und vorne steht die Oma, die nach ihrem Portemonnaie sucht, dann geht es nun einmal nicht weiter.

Arithmetik des Anstehens oder Aus zwei mach fünf



WC-Zeichen aus Lausanne

In den USA hat der Architekt Alexander Kira die Verweildauer auf der Toilette gemessen. Bei Frauen ist sie im Schnitt rund zweimal so lang wie bei Männern. Das daraus folgende Theorem sagt aber nicht, dass die Warteschlange vor der Damentoilette im Mittel doppelt so lang ist wie die vor der Herrentoilette. So einfach ist der Zusammenhang nicht. Nein, sie ist im Durchschnitt rund fünfmal so lang, sagt die Theorie. Und das wird von der Praxis gut bestätigt.

Flotter warten. Die mathematische Warteschlangentheorie hilft auch dabei, Wartesysteme und ihre Betriebsabläufe zu optimieren. Es zeigt sich, dass das Prinzip der sogenannten amerikanischen Schlange für den Durchstrom größtmöglicher Kundenzahlen pro Zeiteinheit am besten geeignet ist. In unseren Breitengraden findet man diese Schlangenform zum Beispiel in Postfilialen. Alle Kunden stellen sich an nur einer einzigen Schlange an, und wer den Kopf der Schlange erreicht, begibt sich zu dem nächsten freien Schalter. Zwar sind Schlangen dieses Typs in der Regel recht lang, doch haben sie bei entsprechender Schalterzahl meist eine hohe Geschwindigkeit und können somit zügig vom Einzelnen durchlaufen werden. Auch die Kapazität der Kassen und Bediener wird besser ausgeschöpft und größtmögliche Bediengerechtigkeit hergestellt. Wer zuerst da war, wird tatsächlich auch früher bedient. Und die Frage, welche Schlange er bei mehreren Schlangen wählen soll, bleibt dem Kunden erspart.

Es gibt auch so etwas wie eine Psychologie des Wartens. Wie Studien ergeben haben, ist die gefühlte Wartezeit teilweise bis zu dreimal so lange wie die tatsächliche Wartezeit. Auch gibt es den verbreiteten Eindruck, immer in der falschen Schlange zu stehen. Man hat sich irgendwo eingereiht, aber ein anderer, der später kam, zieht in einer anderen, sich schneller bewegenden Schlange flink an einem vorbei. Das erzeugt Frustration. Dieses Phänomen tritt nicht selten auf und gab sogar Anlass zu einer Variante von Murphys Gesetz: Die andere Schlange ist immer schneller.

Es handelt sich aber nur um eine Erscheinung selektiver Wahrnehmung: Wir registrieren bevorzugt jene Situationen, in denen die eigene Schlange sich wieder einmal sehr langsam bewegt hat, und übersehen bzw. vergessen die anderen, günstigeren Abläufe.

Ein paar Tipps für den Alltag sollen diesen Abschnitt beschließen. Die meisten Kunden handeln angesichts von Warteschlangen strategisch. Sie wollen so schnell wie möglich die Engstelle der Kasse passieren. Deshalb stellen sie sich nicht nach dem Zufallsprinzip an einer Kasse an, sondern an der Kasse mit der kürzesten Warteschlange. Das bedeutet aber noch nicht, dass sie auch früher bedient werden. Denn Warteschlangen haben ein Bewegungsprofil, das, wie oben erwähnt, stark von Unregelmäßigkeiten geprägt wird. Das typische Verhalten der Kunden führt dazu, dass es keine völlig gravierenden Unterschiede in der Länge der Schlangen gibt. Bevor man sich anstellt, sollte man deshalb die Arbeitsweise der Kassiererin in Augenschein nehmen. Ist sie eifrig oder eher schläfrig? Ihre Bedienrate beeinflusst ganz entscheidend die Geschwindigkeit einer Schlange. Außerdem empfiehlt es sich, noch einen kurzen Blick auf die Einkaufswagen der Wartenden zu werfen. Sind in einer Schlange sehr viele hoch beladene Einkaufswagen unterwegs, ist das ein Ausschlusskriterium. Stellen Sie sich dann lieber woanders an. Auch schadet es nicht, aufmerksam die nicht besetzten Kassen zu verfolgen. Wird eine davon plötzlich besetzt oder hören Sie die Durchsage: «Frau Maier bitte an Kasse 7», begeben Sie sich zügig dorthin. Das ist nicht ganz die feine englische Art, aber es ist erlaubt. Dann können Sie als Letzter einer Schlange plötzlich der Erste einer anderen Schlange sein. Kolonnenspringen ist dagegen, ganz so wie beim

Fahren im Stau, in der Regel keine aussichtsreiche Strategie. Die kurzzeitig kürzere Schlange kann sich langfristig sehr langsam fortbewegen; dann war der Wechsel kontraproduktiv.

In Supermärkten trifft man übrigens deshalb so oft auf lange Schlangen, weil die Wartezeit der Kunden den Betreiber nicht wirklich etwas kostet. Im Gegenteil, er kann sie sogar für seine eigenen Zwecke nutzen, etwa durch strategisch platzierte Werbung für zum Beispiel internetfähige Handys unter dem Stichwort *Effiziente Wartezeitnutzung*, oder durch die Auslage von speziellen Produkten, die man beim Warten schnell noch in den Wagen werfen kann, aber eigentlich weder kaufen wollte noch braucht. Generell ist es für den Betreiber nicht ungünstig, wenn seine Kunden länger im Markt verbleiben.

Es gibt aber auch Szenarien, in denen ausgedehnte Verweilzeiten für den Betreiber nachteilig sind, beispielsweise bei Montageprozessen in der Industrie, wenn in Zwischenstadien der Fertigung unfertige Werkstücke lange auf Maschinen warten müssen, die sie weiterbearbeiten. Wenn es günstig ist, dass die Produkte zügig auf den Markt gelangen, etwa weil ihre Preise ständig sinken, wie bekanntermaßen bei Computern, dann verschaffen kürzere Wartezeiten einen Vorteil gegenüber den anderen Marktakteuren.

6. *Computernachlese*

In Frankfurt wurde 1980 in kurzem Abstand dreimal dieselbe Wohnstraße aufgerissen und wieder zugeschüttet. Ein Zuständiger des städtischen Planungsamtes antwortete auf Anfrage: «Das Programmieren des Computers zur Koordinierung der einzelnen Bauvorhaben (Wasser, Gas, Telefon) ist so kompliziert und teuer, dass es einfacher und preiswerter ist, eine Straße mehrmals aufzureißen.»
Alexander Tropf: *Niederlagen, die das Leben selber schrieb*

Seinszustände, ehedem bis momentan

Es gibt überhaupt keinen Grund, warum irgendjemand einen Computer bei sich zu Hause haben will.

Ken Olson, Gründer und Präsident von Digital Equipment, 1977

Wenn das Automobil denselben Entwicklungszyklus wie der Computer hätte, würde ein Rolls-Royce heute 100 Dollar kosten, eine Gallone Benzin auf eine Million Meilen verbrauchen, einmal pro Jahr explodieren und dabei alle Insassen atomisieren.

Robert X. Cringley, *Info World*

Ich denke, wir sollten Computerviren zu den Lebewesen zählen. Vielleicht ist es bezeichnend für die menschliche Natur, dass die einzige Lebensform, die wir bisher erschaffen haben, rein destruktiv ist. Denken Sie an die Schaffung des Lebens nach eigenem Bilde.

Stephen W. Hawking

7. *Zusammenhänge und Unzusammenhänge*

Der Begriff Korrelation stammt aus der Statistik und bedeutet, dass zwei Variablen miteinander in Zusammenhang stehen. Eine positive Korrelation liegt vor, wenn die Zunahme des Wertes einer Variablen mit der Zunahme des Wertes der anderen Variablen einhergeht. Eine negative Korrelation liegt bei einem gegenläufigen Zusammenhang vor. Bei steigendem Wert der einen Variablen nimmt der Wert der anderen Variablen ab. Eine positive Korrelation besteht zwischen den Variablen *Größe* und *Gewicht* beim Menschen. Negativ ist dagegen die Korrelation zwischen den Variablen aktuelles *Alter* und verbleibende *Lebenserwartung*.

Der Begriff Kausalität bedeutet Ursächlichkeit. Eine kausale Beziehung zwischen zwei Ereignissen ist ein Ursache-Wirkung-Zusammenhang zwischen ihnen. In der Umgangssprache ist ein Ereignis A die Ursache einer Wirkung B, wenn A als Grund fungiert, der B herbeiführt. Kausalbeziehungen bestimmen unser ganzes Leben. Die

Erkennung von kausalen Zusammenhängen und die Bildung von kausalen Hypothesen gehört zu den fundamentalen menschlichen Aktivitäten. Denn bei all unseren Tätigkeiten und Entscheidungen stützen wir uns auf kausales Wissen.

Korrelation und Kausalität sind zwei verschiedene Phänomene. Wenn Korrelation zwischen zwei Größen vorliegt, weiß man noch nicht, ob die eine Größe die andere kausal beeinflusst, ob beide Größen von einer dritten kausal abhängen oder ob überhaupt eine Kausalbeziehung besteht. Korrelationen sind also nur Hinweise, aber keine Beweise für Ursache-Wirkung-Zusammenhänge. Dazu ein Beispiel.

Bei der großen Mehrzahl der Kinder mit Autismus wird diese Krankheit im Alter von anderthalb bis drei Jahren diagnostiziert. In diesem Zeitintervall werden Kinder typischerweise gegen allerlei Krankheiten geimpft. Es besteht also eine erhebliche Korrelation zwischen der Verabreichung von Impfungen und der Diagnose Autismus. Aber ein Kausalitätsschluss wäre hier ganz falsch: Es stimmt nicht, dass die Impfungen Autismus kausal herbeiführen. Der kausale Faktor im Hintergrund ist vielmehr das Alter. Es gibt ein bestimmtes Alter, in dem die intellektuelle Entwicklung der Kinder so weit fortgeschritten ist, dass Autismus offenkundig wird und diagnostiziert werden kann. Und es gibt ein bestimmtes Alter, in dem Impfungen in der Regel vorgenommen werden. Unabhängig voneinander ist es dasselbe Alter.

Noch ein weiteres Beispiel mag nützlich sein: Am 28. Juni 2003 berichtete die Nachrichtenagentur Reuters von einer medizinischen Studie, an der 221 Männer teilnahmen, die Handys benutzten. Die Studie befasste sich mit der Untersuchung der Schädigung von Spermien durch Handy-Nutzung. Sie ergab, dass Männer, die ihre Handys in der Hosentasche trugen statt in der Jackentasche, aufgrund von Elektrosmog eine gegenüber dem Durchschnitt der erwachsenen Männer um 30 % reduzierte Spermienzahl hatten. Eine Sorge ging durch Teile der Bevölkerung; es verbreitete sich die Angst, dass Handys Impotenz verursachen. Sogar einige Gerichtsverfahren gegen Handy-Firmen wurden aus diesem Grund angestrengt. Die Studie hatte aber nur eine Korrelation festgestellt. Ein kausaler Zusammenhang war nicht bewiesen worden. Und das ist der zentrale Punkt. Der niederländische Fortpflanzungsmediziner Hans Evers wies darauf hin, dass manche Männer deshalb ihre Handys in der

Hosentasche tragen, weil sie Raucher sind. In der Jackentasche hingegen tragen sie ihre Zigaretten, um sie nicht zu ramponieren. Deshalb bleibt für das Handy meist nur die Hosentasche. Medizinisch ist zudem seit langem bekannt, dass die Spermienzahl bei Rauchern verringert ist. Deshalb kann man vermuten, dass es eher das Rauchverhalten war und nicht die Art der Handy-Aufbewahrung, die ursächlich zur Verringerung der Spermienzahl geführt hatte. Diese Variable – das Rauchverhalten – hätten die Forscher kontrollieren müssen, um stichhaltige Ergebnisse zu liefern. Das aber war versäumt worden.

8. *Ein Suihitsu (japanisch, mit der Bedeutung «schnell aus dem Pinsel geflossen»)*

Anstatt über die Antworten beim Intelligenztest nachzudenken, wählte ich sie rein zufällig, indem ich eine Münze warf. Der Test ergab, dass meine Münze einen IQ von 75 hatte.

9. *Bisschen Lottologie*

Beim Lotto *6 aus 49* hat jede Tippreihe die Chance von 1: 13 983 816, um 6 Richtige zu erzielen. Das ist eine verschwindend geringe Wahrscheinlichkeit. Um dies anschaulich zu machen, benutze ich in meinen Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie bisweilen folgende Vergleiche. Wenn jemand knapp eine Viertelstunde zur Lottoannahmestelle zu Fuß unterwegs ist, um seinen Tippzettel einzureichen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, während dieses Fußwegs bei einem Unfall tödlich zu verunglücken, etwa gleich der obigen Wahrscheinlichkeit. Man kann es auch noch drastischer herausarbeiten. Wenn jemand den Tippzettel am Tag vor der Ziehung in der Annahmestelle einreicht, dann ist die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit der Ziehung bereits verstorben zu sein, größer als die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige. Schöne Aussichten.

Die hohe Verbreitung von Lotto – in Deutschland spielt etwa jeder Dritte – ist auch eine Folge der verbreiteten Kundigkeitsdefizite in Bezug auf Wahrscheinlichkeiten und Unwahrscheinlichkeiten.

> ***Abenteuer Leben***
>
> Der Brite Salah Sid (47) spielte seit Jahren mit der gleichen Zahlenkombination Lotto. Zum Valentinstag wollte er beim Gang zur Annahmestelle seiner Frau unbedingt eine Freude machen: Er kaufte ihr einen Kartengruß. Doch dann reichte das Geld nicht mehr für den Lottotipp – und am Abend wurden «seine Zahlen» gezogen: 8, 13, 14, 17, 20 und 28. Im Jackpot lagen 39 Millionen Pfund.
>
> **Aus der *Welt*, 19. 2. 1998**

6 Richtige im Lotto zu erzielen ist für Sie und für mich also eine ausgesprochen unwahrscheinliche Angelegenheit. 5 Richtige sind dagegen schon um einiges leichter zu bewerkstelligen. Ich verrate Ihnen hier noch eine leicht umzusetzende Methode, bei der es tatsächlich ausreicht, 5 richtige Zahlen zu wählen, um den Volltreffer und einige Teiltreffer zu landen. Das geht so. Wählen Sie auf irgendeine Weise rein zufällig 5 von 49 Zahlen aus, sagen wir a, b, c, d, e. Als Nächstes füllen Sie 44 Tippzettel aus. Den ersten, indem Sie zu den Zahlen a, b, c, d, e die 1 hinzufügen, falls diese nicht schon unter den 5 Zahlen auftaucht. Beim zweiten, dritten, vierten usw. Zettel fügen Sie zu den Zahlen a, b, c, d, e dann die 2, die 3, die 4 usw. hinzu, also alle jene Zahlen, die noch nicht unter den 5 zufällig gewählten Zahlen vertreten sind. Wenn «Ihre» 5 Zahlen kommen, dann haben Sie auf jeden Fall einmal 6 Richtige sowie auch einmal 5 richtige mit Zusatzzahl und 42-mal 5 Richtige. Nicht schlecht, oder?

10. *Zwischenspielerisch, mehr nicht*

$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ist die Anzahl der Sekunden in 6 Wochen.

Es wäre undankbar zu sagen, dass man damit nicht viel anfangen können werden wird.

11. *Das Geburtstagsparadoxon*

Ein Jahr hat 365 Tage, wenn wir den 29. Februar einmal außer acht lassen. Versammeln wir also 366 rein zufällig ausgewählte Personen in einem Raum, gibt es mindestens 2 Personen, die am gleichen Tag Geburtstag feiern. Wir können dessen zu 100 % sicher sein. Angenommen, uns reicht eine 50 %ige Sicherheit. Wie viele rein zufällig ausgewählte Personen müssen wir versammeln, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % mindestens 2 Personen mit dem gleichen Geburtstag darunter sind?

Bittet man sie zu schätzen, siedeln die meisten Menschen ihre Antwort in der Nähe von 183 an, der Hälfte von 366. Das ist mehr oder weniger falsch und nicht richtig. Die tadellose Antwort liegt weit abseits des intuitiv Erwarteten. Schätzen Sie doch selbst einmal, bevor wir weitergehen?

> ***Leere Menge***
>
> Nicht geeignet für Kinder unter 36 Monaten!
>
> **Aufschrift auf einer handelsüblichen Glückwunschkarte für den 1. Geburtstag**

Eine präzise Rechnung liefert: 23 Personen. Dass die Zahl so niedrig ist, ist für die meisten Menschen ausgesprochen überraschend. Wie kann man diese Antwort überprüfen und sich plausibel machen?

Wir gehen dazu von n zufällig ausgewählten Personen aus und fragen nach der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, also dass deren n Geburtstage alle verschieden sind. Bei diesem Vorhaben nehmen wir in guter Approximation an, dass alle 365 möglichen Geburtstage gleich wahrscheinlich sind. Die Gedankenführung beginnt mit der Feststellung, dass es 365^n verschiedene Kombinationsmöglichkeiten für n Geburtstage gibt, für jeden Geburtstag eben 365 Möglichkeiten. Von diesen Fällen sind genau $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$

Kombinationen der Geburtstage derart, dass kein Geburtstag doppelt auftritt. Das sieht man mit dieser Zusatzüberlegung: Für den Geburtstag der ersten Person gibt es 365 Möglichkeiten und für jede dieser Möglichkeiten gibt es 364 Möglichkeiten für den Geburtstag der zweiten Person, unter der Vorgabe, dass keine Kollision auftritt. Das macht 365 · 364 Möglichkeiten für die Geburtstage der ersten beiden Personen. Sind ihre Geburtstage kollisionsfrei gewählt, verbleiben 363 Möglichkeiten für Person 3 usw. bis hin zu 365 – n + 1 Möglichkeiten für Person n. Was ist also die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis allesamt verschiedener Geburtstage bei n zufällig ausgewählten Personen? Nach dem Gesagten muss die Antwort darauf in folgender Richtung gesucht werden: Es ist der Quotient der Zahl der günstigen Kombinationen für dieses Ereignis und der Zahl aller möglichen Kombinationen von n Geburtstagen. Explizit ist das

$$q_n = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)/365^n.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit des uns interessierenden Ereignisses, dass mindestens ein Geburtstag doppelt auftritt, ist dann $p_n = 1 - q_n$. Diese Wahrscheinlichkeiten p_n wachsen recht schnell mit n an und streben gegen 1. Einige Werte sind in der folgenden Tabelle festgehalten:

n	10	20	23	30	40	50	60
p_n	0,12	0,41	0,51	0,71	0,89	0,97	0,99

Ab 60 Personen schon kann man also so gut wie sicher sein, doppelte Geburtstage zu erhalten. Ab 23 Personen sind doppelte Geburtstage erstmals wahrscheinlicher als keine. Warum liegt bei diesem Problem die Intuition so weit daneben? Offenbar wird die Fragestellung mit einer anderen verwechselt: Das Augenmerk wird auf eine Person P gelegt. Wie viele Personen $P_1, \ldots, P_m$ muss man dann rein zufällig auswählen, um sicherzustellen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 mindestens eine dieser Personen P_i an demselben Tag Geburtstag hat wie Person P?

Eine einzelne Person hat *nicht* denselben Geburtstag wie P mit Wahrscheinlichkeit 364/365. Alle m Personen haben *nicht* denselben Geburtstag wie P mit Wahrscheinlichkeit $(364/365)^m$. Mindestens eine der m Personen *hat* denselben Geburtstag wie P mit der Wahrscheinlichkeit $1 - (364/365)^m$. Ab m = 253 ist dieser Wert größer als ½. Wenn außer P noch 253 weitere Personen anwesend sind, dann gibt es 253 paarweise Vergleichsmöglichkeiten: P mit P_1, P mit P_2, ..., P mit P_{253}. Genauso viele paarweise Vergleichsmöglichkeiten gibt es bei 23 Personen untereinander, nämlich $23 \cdot 22/2 = 253$. Das sind also auch hier 253 Gelegenheiten für gleiche Geburtstage. Dies ist eine intuitive Erklärung des Geburtstagsparadoxons.

In meinen Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie ergänze ich diese theoretischen Erklärungen bisweilen durch eine praktische Simulation. In der ersten Hörsaalreihe beginnend, sammeln wir nacheinander die Geburtstage der Anwesenden so lange, bis der erste Geburtstag doppelt auftritt. In der Regel tritt dieses Ereignis, in guter Übereinstimmung mit der Größenordnung der berechneten Lösung, irgendwo zwischen dem 20sten und dem 30sten Zuhörer ein.

Kognitionswissenschaftler haben festgestellt, dass das menschliche Gehirn große Fähigkeiten im Bereich der Mustererkennung hat. Im Laufe seiner Entwicklung musste es die Kompetenz entwickeln, Symmetrien, Regelmäßigkeiten und andere Formen von Systematik zu identifizieren und zu interpretieren. Muster in einem ganzen Ozean von Regellosigkeit zu erfassen, erleichtert dem menschlichen Gehirn das Verständnis der Welt und die Orientierung in ihr. Es bietet ihm Ansatzpunkte, um durch Intelligenz in der Welt zu bestehen. Vergleichsweise schlecht ist es aber um den intellektuellen Filter des Menschen für das kompetente Handling von Unsicherheit, Zufall und Wahrscheinlichkeiten bestellt. Auf dem Gebiet des Wahrscheinlichen und Unwahrscheinlichen bietet uns die Welt viele Möglichkeiten, uns zu irren. Das hier besprochene Geburtstagsparadoxon ist nur eine davon.

> ***Aus meinem Archiv des nutzlosen Wissens***
>
> Der Kader der deutschen Nationalmannschaft für die Fußballweltmeisterschaft 2006 bestand aus 23 Spielern. Zwei Mitglieder des Kaders, nämlich Christoph Metzelder und Mike Hanke feiern am gleichen Tag Geburtstag: am 5. November.

12. *Für mehr Widersprüche im Alltag*

Unter diesem Punkt werden wir einer logischen Kalamität im Straßenverkehr begegnen. Hier sehen Sie eine zwar bildliche, aber nicht vorbildliche Straßenbeschilderung:

Abbildung 5: Stillleben und Spielleben. Beschilderung einer Nebenstraße in Prag

Bin ich nun eine Spielstraße? Oder bin ich keine Spielstraße? Hat das Verbotene Priorität gegenüber dem Erlaubten, die Negation gegenüber der Affirmation, wenn beide aufeinandertreffen? Oder neutralisieren sich beide zum Garnichts?

13. *Divide et impera et cetera oder Einfach neidfrei teilen*

Es gibt in der modernen Mathematik das sehr sinnfällige Gebiet der Kuchenteilungs-Algorithmen, das von Mathematikern, Informatikern und Ökonomen intellektuell bewirtschaftet wird. Es geht dabei um die Aufteilung einer teilbaren Ressource an beliebig viele Personen. Genauer handelt es sich um die Fragestellung, wie ein Gut auf mehrere Personen fair aufgeteilt werden kann, in dem Sinne, dass niemand auf den Anteil eines anderen neidisch ist und am liebsten mit ihm tauschen möchte. Damit eine Aufteilung als fair zu erachten ist, müssen sie alle Beteiligten für fair halten. Grundlage dieses Fairness-Konzeptes sind also subjektive Einschätzungen, nicht objektive Maßstäbe von Gerechtigkeit. Es ist durchaus möglich, dass ein und dieselbe Teilmenge des zu teilenden Gutes von zwei verschiedenen Personen unterschiedlich eingeschätzt wird. Meinungsverschiedenheiten bei der Wertzuweisung sind mithin erlaubt.

Problemstellung und Lösung finden zahlreiche Anwendungen in vielen Gebieten wie zum Beispiel der Politik (Aufteilung Deutschlands in Besatzungszonen der Alliierten nach dem Zweiten Weltkrieg) oder des Rechts (Aufteilung des gemeinsamen Besitzes von Ehepartnern bei Scheidungen). Bei dieser Version des Problems geht es um ein beliebig teilbares Objekt. Weitergehende Überlegungen müssen angestellt werden, wenn die zu teilende Gesamtheit auch nicht teilbare Anteile umfasst, wie etwa Häuser bei Scheidungen.

Jeder kennt aus der Kindheit eine einfache Prozedur, wie man einen Kuchen unter 2 Personen gütlich aufteilen kann. Es ist das Prinzip «Der eine teilt ein und der andere wählt aus». Dieses 2-Personen Protokoll ist fair, weil für den Einteiler beide Stücke gleich attraktiv sind und der Auswähler, falls sie es für ihn subjektiv nicht sein sollten, sich das aus seiner Sicht attraktivere aussuchen darf.

Doch wie soll man unter 3 Personen neidfrei teilen? Die Mathematiker Selfridge und Conway fanden 1962 jeder für sich nach ernsthafter Intelligenzarbeit die Antwort.

Hier ist das Selfridge-Conway-Protokoll. Es ist aufwändiger als die simple Teilen-dann-Wählen-Strategie, aber es ist immer noch ein Bierdeckelplan.

1. A teilt den Kuchen in 3 seiner Ansicht nach gleich große Stücke und reicht sie an B weiter.
2. B schneidet gegebenenfalls vom seiner Meinung nach größten Stück so viel ab, bis es in seinen Augen gleich groß ist wie das

zweitgrößte. Der dabei entstehende Kuchenschnipsel wird zunächst beiseitegelegt, die übrigen 3 Teile werden an C weitergereicht.
3. C nimmt sich das aus seiner Sicht größte Stück.
4. Als Nächstes darf B wählen, aber mit dem Vorbehalt, dass er jenes Stück nehmen muss, von dem er in Schritt 2 etwas abgeschnitten hat, sofern das der Fall war. Außer natürlich, wenn C dieses Stück bereits genommen hat.
5. A bekommt das übrig bleibende Stück.

Bevor es weitergeht, beurteilen wir das erreichte Zwischenstadium.

Der Kuchen ist neidfrei aufgeteilt bis auf den abgeschnittenen Schnipsel: C beneidet niemanden, da er als Erster wählen durfte. Auch B beneidet niemanden: Selbst wenn er das beschnittene Stück bekommt, ist er zufrieden, da es für ihn mindestens so groß ist wie die beiden anderen. Auch A ist nicht neidisch. Die Bedingung unter Punkt 4 garantiert ihm ein Stück, das er zu Beginn abgeschnitten hat.

Jetzt kommt der Rest. Was geschieht mit dem abgeschnittenen Schnipsel? Hier stockt der Gedankenfluss. So viel ist aber bereits klar: Wenn B im 2-ten Schritt nichts abgeschnitten hat, dann gibt es keinen Schnipsel, und wir sind schon fertig. Gut so.

Andernfalls wird derjenige von B oder C, der nicht das beschnittene Stück genommen hat, zum Schneider ernannt. Der andere dieser beiden ist der Nicht-Schneider. Jetzt kommt der Einblick, der alles wieder in Gang bringt: A hat gegenüber dem Nicht-Schneider einen uneinholbaren Vorsprung. Warum? Der Nicht-Schneider hat ja das beschnittene Stück erhalten, und selbst wenn ihm der Schnipsel komplett zugesprochen würde, hätte er in den Augen von A nicht mehr als den fairen Anteil bekommen, weil A den Kuchen in 3 subjektiv gleich große Stücke geteilt hatte. Mit anderen Worten: Egal, wie der Schnipsel verteilt wird, A wird auf den Nicht-Schneider nicht neidisch sein.

Sobald man dies eingesehen hat, ist der Rest reine Routine: Der Schneider darf nun den Schnipsel in 3 nach seiner Meinung gleich große Teile schneiden. Die Akteure greifen sich anschließend je einen dieser Teile in der Reihenfolge Nicht-Schneider, A, Schneider, und jeder wählt natürlich das in seinen Augen größte noch verbleibende Stück.

Wegen seines uneinholbaren Vorsprungs ist A nicht neidisch auf den Nicht-Schneider. Aber auch auf den Schneider ist er nicht neidisch, weil er vor diesem ein Stück des geteilten Schnipsels wählen durfte.

Der Schneider ist auch auf niemanden neidisch, weil er den Schnipsel ja zerlegt hat.

Auch der Nicht-Schneider hat keinen Grund zum Neid, weil er zuerst wählen durfte.

Damit ist alles bedacht und alle sind glücklich gemacht.