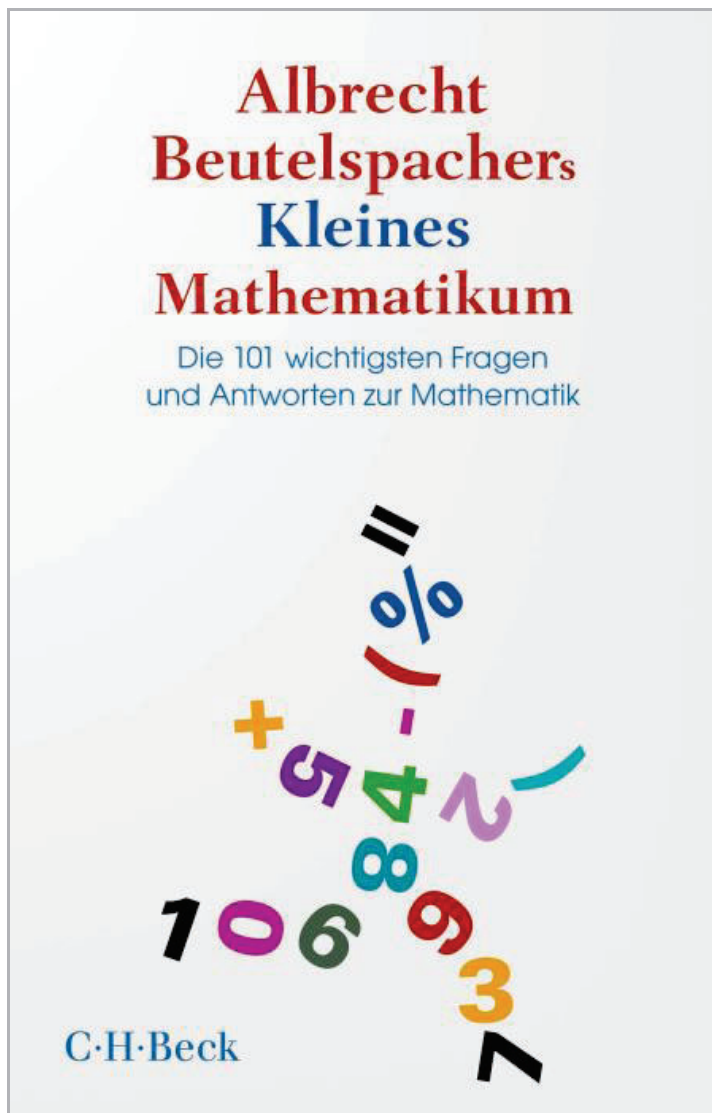


Unverkäufliche Leseprobe



Albrecht Beutelspacher
Albrecht Beutelspachers Kleines
Mathematikum

Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik

2025. 368 S., mit 8 Abbildungen und 5 Karten

ISBN 978-3-406-83222-2

Weitere Informationen finden Sie hier:

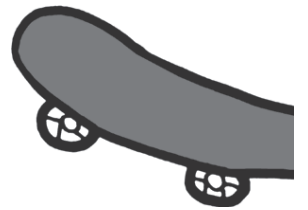
<https://www.chbeck.de/38106528>

© Verlag C.H.Beck oHG, München
Diese Leseprobe ist urheberrechtlich geschützt.
Sie können gerne darauf verlinken.

C·H·Beck

PAPERBACK

0 6 8 9
6 7 4 -) % ||
3 2)



Der Mathematiker Albrecht Beutelspacher, bekannt für seine Fähigkeit, sein Fachgebiet unterhaltsam und spannend zu präsentieren, ist nicht nur Direktor des «Mathematikums», eines einzigartigen Museums für Mathematik, er hat es sich auch zur Angewohnheit gemacht, die vielen Fragen der Besucher seines Museums so genau und so verständlich wie möglich zu beantworten. Mit den Jahren kam ihm die Idee, die originellsten und meistgestellten Fragen aufzuschreiben. Hier liegt nun das Ergebnis vor: Die 101 wichtigsten Fragen zur Mathematik. Und das Schöne ist: Keine bleibt unbeantwortet.

Albrecht Beutelspacher war von 1988 bis 2018 Professor für Geometrie und Diskrete Mathematik am Mathematischen Institut der Universität Gießen und ist Direktor des von ihm gegründeten Mathematikums, des ersten mathematischen Mitmachmuseums der Welt. Für seine Arbeit erhielt er unter anderem den Communicator-Preis des Stifterverbands für die Deutsche Wissenschaft, den Deutschen IQ-Preis, den Hessischen Kulturpreis (2008) sowie die Medaille für naturwissenschaftliche Publizistik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (2014). Im Verlag C.H.Beck sind von ihm lieferbar: *Wie man in eine Seifenblase schlüpft. Die Welt der Mathematik in 100 Experimenten* (2015), *Das Geheimnis der zwölften Münze. Neue mathematische Knobelien* (2021), *Zahlen. Geschichte, Gesetze, Geheimnisse* (³2021), *Null, unendlich und die wilde 13. Die wichtigsten Zahlen und ihre Geschichten* (⁵2021) sowie *Geheimsprachen und Kryptographie. Geschichte, Techniken, Anwendungen* (⁶2022).

Albrecht
Beutelspachers
Kleines
Mathematikum

Die 101 wichtigsten Fragen
und Antworten zur Mathematik

C.H.Beck

Die ersten vier Auflagen dieses Buches erschienen in gebundener Form im

Verlag C.H.Beck:

1.–3. Auflage. 2010

4., durchgesehene Auflage. 2016

Mit 10 Abbildungen

Einige der Antworten wurden bereits unter dem Titel «Fragen an die
Mathematik» im Hessischen Rundfunk (hr4) gesendet.

1., aktualisierte Auflage in C.H.Beck Paperback. 2025

© Verlag C.H.Beck oHG, München 2010

Wilhelmstr. 9, 80801 München, info@beck.de

Alle urheberrechtlichen Nutzungsrechte bleiben vorbehalten.

Der Verlag behält sich auch das Recht vor,
Vervielfältigungen dieses Werks zum Zwecke
des Text and Data Mining vorzunehmen.

www.chbeck.de

Umschlaggestaltung: Kunst oder Reklame, München

Autorenfoto: © Christoph Mukherjee

Satz: Fotosatz Amann, Memmingen

Druck und Bindung: Druckerei C.H.Beck, Nördlingen

Printed in Germany

ISBN 978 3 406 83222 2



verantwortungsbewusst produziert

www.chbeck.de/nachhaltig

produksicherheit.beck.de

Inhalt

Vorwort 11

Grundlagen

1. Was ist Mathematik? 13
2. Seit wann gibt es Mathematik? 15
3. Welches ist das erste Mathematikbuch? 17
 4. Was ist ein Punkt? 19
 5. Was ist ein Beweis? 20
 6. Was sind Axiome? 22
7. Wie kann man beweisen, dass etwas nicht existiert? 24
 8. Ist Mathematik eine Natur- oder eine Geisteswissenschaft? 26
 9. Warum ist Mathematik so abstrakt? 26
10. Hat Pythagoras den Satz des Pythagoras erfunden? 28

Zahlen

11. Welches ist die älteste Zahl? 30
12. Seit wann kann man mit Zahlen rechnen? 32
 13. Wie rechneten die Ägypter? 33
 14. Wie rechneten die Römer? 35
 15. Seit wann gibt es die Null? 38
 16. Ist Null eine gerade Zahl? 39

17. Warum darf man nicht durch null teilen? 40
18. Warum müssen wir das kleine Einmaleins lernen? 41
19. Wie viel ist eine Million Billionen? 43
20. Was ist ein Googol? 44
21. Was ist das Binärsystem? 45
22. Gibt es unendlich viele Zahlen? 46
23. Warum ist $2+2=4$? 47
24. Wie viele Primzahlen gibt es? 49
25. Gibt es eine Formel für Primzahlen? 51
26. Was ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$? 52
27. Wie viele Bruchzahlen gibt es? 54
28. Gibt es irrationale Zahlen? 55
29. Wie viele irrationale Zahlen gibt es? 57
30. Was ist Fermats letzter Satz? 59
31. Wozu braucht man komplexe Zahlen? 62

Formen und Muster

32. Welches sind die unlösbaren Probleme der Antike? 65
33. Funktioniert die Quadratur des Kreises? 67
34. Was bedeutet der Satz des Pythagoras? 69
35. Wie groß ist ein DIN-A4-Papier? 71
36. Ist jedes Viereck ein Quadrat? 73
37. Welche Vielecke passen zusammen? 74
38. Warum passen Kreise beziehungsweise Kugeln nicht gut zusammen? 76
39. Warum verwenden Bienen für die Waben Sechsecke? 77
40. Warum gibt es nur fünf platonische Körper? 78



- 41. Schneiden sich Parallelen im Unendlichen? 81
- 42. Was ist nichteuklidische Geometrie? 82
- 43. Warum ist Symmetrie schön? 84
- 44. Wie kommen Zahlen in den Raum? 85
- 45. Kann man sich den vierdimensionalen Raum vorstellen? 87

Formeln

- 46. Was ist $1+2+3+\dots+100$? 90
- 47. Wie viele Reiskörner liegen auf dem Schachbrett? 91
- 48. Ein Euro an Christi Geburt – was ist der heute wert? 92
- 49. Warum ist minus mal minus gleich plus? 93
- 50. Wozu sind die binomischen Formeln gut? 96
- 51. Was bedeutet «Wurzel»? 98
- 52. Kann man jede Gleichung lösen? 99
- 53. Was sind transzendente Zahlen? 100

Zufall

- 54. Wie hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung begonnen? 102
- 55. Wenn ich zehnmal würfle, habe ich dann garantiert eine Sechs? 104
- 56. Wie groß ist die Chance, einen Sechser im Lotto zu tippen? 106
- 57. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Menschen am gleichen Tag Geburtstag haben? 108
- 58. Was ist das Ziegenproblem? 109
- 59. Wie zählt man Fische, ohne sie zu fangen? 111

Infinitesimal

60. Wann holt Achilles die Schildkröte ein? 113
61. Ist $0,999\dots=1$? 114
62. Kann man unendlich viele Zahlen addieren? 116
63. Wie kann man Bewegung mathematisch verstehen? 118
64. Was ist die Exponentialfunktion? 120
65. Wozu sind Logarithmen gut? 122
66. Wie viel muss man von einer Funktion wissen,
um sie ganz zu kennen? 124

Anwendungen

67. Wo wird Mathematik angewandt? 126
68. Ist Mathematik eine Kriegswissenschaft? 128
69. Gibt es eine Formel, mit der man
Ostern ausrechnen kann? 130
70. Hat der Computer die Mathematik verändert? 132
71. Kann man die Schwierigkeit mathematischer
Probleme messen? 134
72. Ist Überprüfen einfacher als Probleme lösen? 136
73. (Wie) hängen Mathematik und Musik zusammen? 138

Probleme

74. Gibt es in der Mathematik noch etwas
zu erforschen? 141
75. Warum sind Probleme wichtig? 142
76. Was sind Hilberts Probleme? 144
77. Was sind die 1-Million-Dollar-Probleme? 146
78. Was ist das $(3n+1)$ -Problem? 147
79. Kann man alles beweisen? 149
80. Ist die Mathematik widerspruchsfrei? 151



Mathematiker

- 81. Warum können Mathematiker nicht rechnen? 154
- 82. (Warum) sind Mathematiker weltfremd? 155
- 83. Wer ist der größte Mathematiker aller Zeiten? 157
- 84. Wer ist der größte deutsche Mathematiker? 158
- 85. Sind Frauen mathematisch unbegabt? 160
- 86. Warum gibt es keinen Nobelpreis für Mathematik? 161
- 87. Was ist Hilberts Hotel? 162
- 88. Brauchen Mathematiker Intuition und Fantasie? 164

Lehren und lernen

- 89. Warum muss man Mathematik lernen? 167
- 90. Warum macht Mathematik Angst? 168
- 91. Warum ist Mathematik so schwierig? 169
- 92. Müssen Formeln sein? 171
- 93. Gibt es einen «Königsweg» zur Mathematik? 172
- 94. Warum ist Mathematik so schwer zu lernen? 173

Daneben und darüber hinaus

- 95. Ist 13 eine Unglückszahl? 176
- 96. Haben Zahlen eine Bedeutung? 177
- 97. Können Tiere zählen? 180
- 98. Welches ist die schönste Formel? 181
- 99. Kann man die Existenz Gottes beweisen? 183
- 100. Werden mathematische Erkenntnisse entdeckt oder erfunden? 185
- 101. Können Außerirdische unsere Mathematik verstehen? 187

Vorwort

Das Mathematikum in Gießen ist ein mathematisches «Mittelmuseum», das seit seiner Eröffnung im Jahr 2002 jährlich 120 000 Besucher jedes Alters anzieht. Diese vergnügen sich an den 200 Stationen, wo sie Knobelspiele lösen, mit Seifenhäuten experimentieren oder an sich selbst den Goldenen Schnitt entdecken. Fast automatisch lernen sie dabei mathematische Phänomene kennen, sie bilden sich Vorstellungen, und sie bekommen Einsichten.

Obwohl das Mathematikum ohne Gleichungen und Formeln auskommt, obwohl die Geschichte der Mathematik kaum thematisiert wird und obwohl es praktisch keine verbalen Erklärungen gibt, werden offenbar durch das Experimentieren bei vielen Besuchern Fragen angeregt. Jedenfalls werde ich häufig persönlich angesprochen, manche Menschen schreiben mir eine Mail und einige auch ganz traditionell einen Brief.

Die Fragen, die mir gestellt werden, sind in jeder Hinsicht bunt gemischt.

Manche Fragen sind mathematischer Natur: Wie groß ist die Chance, einen Sechser im Lotto zu tippen? Wie viele Reiskörner liegen auf dem Schachbrett? Was ist Fermats letzter Satz?

Es gibt Fragen zur Geschichte der Mathematik: Seit wann gibt es die Null? Warum gibt es keinen Nobelpreis für Mathematik? Was sind Hilberts Probleme?

Manche Fragen sind einfach zu beantworten: Wie groß ist



ein DIN-A4-Papier? Ist 13 eine Unglückszahl? Was ist $\frac{1}{2}$ plus $\frac{1}{3}$?

Andere Fragen sind ausgesprochen schwierig: Kann man alles beweisen? Müssen Formeln sein? Warum ist minus mal minus gleich plus?

Und einige Fragen gehen erheblich über den sicheren Bereich der Mathematik hinaus: Können Außerirdische unsere Mathematik verstehen? Kann man die Existenz Gottes beweisen? Warum können Mathematiker nicht rechnen?

In diesem Buch habe ich meine Antworten aufgeschrieben. Dabei habe ich mich zum einen bemüht, die Fragen ernst zu nehmen. Die Antworten müssen richtig sein, ich kann nicht etwas zusammenphantasieren, sondern muss diese auch als Wissenschaftler verantworten können. Zum anderen habe ich auch den Fragesteller ernst genommen, indem ich immer versucht habe, klare Antworten zu geben. Denn letztlich will man ja doch wissen: «Was ist denn eigentlich los?»

Natürlich sind sowohl die Auswahl der Fragen als auch der Zuschnitt der Antworten persönlich geprägt. Und manchmal musste ich auch meinen Mut zusammennehmen, um die Antwort so klar, prägnant und pointiert stehen zu lassen. Ich habe mich dabei an dem wunderbaren Satz orientiert, den Theodor Fontane seinen Stechlin sagen lässt: «Unanfechtbare Wahrheiten gibt es überhaupt nicht, und wenn es welche gibt, so sind sie langweilig.»

Ich hoffe, mit diesem Buch alle Fragen beantwortet zu haben. Aber wenn Sie noch eine Frage haben und glauben, dass ich Ihnen helfen kann, dann schreiben Sie mir doch einfach: albrecht.beutelspacher@mathematikum.de.

Grundlagen

1

Was ist Mathematik?

Die schwierigste Frage zu Beginn!
Deshalb gebe ich gleich vier Antworten.

1. Man kann Mathematik dadurch definieren, dass man sie inhaltlich beschreibt, also die *Objekte* benennt, die in der Mathematik untersucht werden.

Traditionell unterscheidet man Geometrie, Algebra, Analysis und Stochastik. Geometrie ist die Lehre des uns umgebenden Raums, den wir dadurch zu erfassen versuchen, dass wir Punkte, Geraden, Ebenen, Dreiecke, Vierecke, Kreise und so weiter definieren und durch deren Studium ein immer besseres Verständnis des Raums erhalten. Wie die Geometrie hatte auch die Algebra ihre erste Blütezeit in der griechischen Antike. Man studiert unter diesem Begriff Zahlen und deren Eigenschaften, zum Beispiel Primzahlen. Die Analysis, auch Differential- und Integralrechnung genannt, ist die Lehre von Größen, die sich kontinuierlich verändern. Sie wurde wesentlich geprägt von Leibniz und Newton. Die Stochastik ist die jüngste der vier Disziplinen; sie ist die mathematische Lehre vom Zufall.

2. Man kann Mathematik auch dadurch definieren, dass man ihre *Methode* beschreibt, die sie aus der Menge aller anderen Wissenschaften heraushebt.



Was die Mathematik wirklich auszeichnet, ist der Beweis, also die rein logische Ableitung ihrer Aussagen.

Mathematik behandelt Begriffe, die klar definiert sind: Dreiecke, Vierecke, Kreise, ganze Zahlen, Primzahlen, Funktionen und so weiter. Sie behandelt Eigenschaften dieser Begriffe und Beziehungen dieser Eigenschaften: In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras.

Durch diese logischen Beziehungen wird Ordnung in die Welt der Begriffe gebracht.

3. Man kann auch den Blick nach außen wenden und das Augenmerk auf die *Beschreibung und Beherrschung der Welt* durch die Mathematik richten.

Galileo Galilei (1564–1642) war der Überzeugung, dass das «Buch der Natur» in mathematischer Sprache geschrieben ist.

Mathematik ist das mächtigste Instrument, mit dem wir die Welt um uns herum beschreiben, erkennen und strukturieren können.

4. Eine moderne und, wie ich finde, sehr treffende Beschreibung stammt von dem Mathematiker Hans Freudenthal (1905–1990), der gleichermaßen als Fachwissenschaftler und als Didaktiker Herausragendes geleistet hat. Er sagt: «Mathematische Begriffe, Konzepte und Verfahren sind Werkzeuge, mit denen wir Phänomene der physikalischen, der sozialen und der mentalen Welt gedanklich organisieren.»

In dieser Definition kommt deutlich zum Ausdruck, dass Mathematik *von Menschen gemacht* wird: «Wir ... organisieren.» Mathematik entsteht nicht von alleine, sondern durch aktives Handeln von Menschen.

Übrigens: Dieses Buch gibt noch 100 weitere Antworten auf die Frage, was Mathematik ist.

2

Seit wann gibt es Mathematik?

Mathematik ist – zusammen mit der Astronomie – die älteste Wissenschaft. Trotzdem gibt es mindestens drei Antworten auf die Frage, seit wann es Mathematik gibt.

Erste Antwort: seit etwa 30000 Jahren. Aus dieser Zeit stammen die ersten Kulturzeugnisse der Menschheit, darunter auch Tierknochen, die viele Kerben enthalten. Diese sind so sorgfältig, so gleichmäßig und so systematisch ausgeführt, dass die Historiker sicher sind: Dabei handelt es sich um Zahlendarstellungen. Was damit gezählt wurde und warum, wissen wir nicht. Aber klar ist: Schon damals gab es Menschen, die gezählt haben und für die das Ergebnis so wichtig war, dass sie es mühsam in Knochen eingekerbt haben.

Die zweite Antwort lautet: Mathematik gibt es seit etwa 5000 Jahren. Damals benutzten sowohl die Babylonier als auch die Ägypter hoch entwickelte mathematische Methoden. Sie konnten Zahlen sinnvoll notieren, gewisse Gleichungen lösen, Kalenderberechnungen durchführen und Land vermessen. Dazu benutzten sie Erkenntnisse wie den Satz des Pythagoras, die wir heute, ohne zu zögern, der Mathematik zuordnen. Soweit wir das beurteilen können, wurden diese Erkenntnisse wie Naturgesetze angenommen. Das heißt, sie wurden an Beispielen überprüft, akzeptiert und dann einfach verwendet.

Daher ist eine dritte Antwort notwendig. Diese lautet: Vor etwa 2500 Jahren haben die Griechen die Mathematik in unserem Sinne erfunden. Denn ihnen ist damals bewusst geworden, dass man durch genaues Nachdenken, scharfes Argumentieren sowie folgerichtiges Schließen zu Erkennt-



nissen gelangen kann und nicht nur durch Augenschein, Erfahrung und Intuition.

Damals wurden drei Begriffe geprägt: Definition, Satz, Beweis. Dieser Dreiklang ist heute etwas in Misskredit geraten – verständlicherweise, denn er wurde jahrzehntelang als didaktisches Allheilmittel benutzt, wofür er nie gedacht war.

In einer *Definition* wird ein Begriff präzise beschrieben und unmissverständlich von anderen abgegrenzt. In der Mathematik wissen wir immer ganz genau, worüber wir reden. Wenn wir «Kreis» sagen, dann meinen wir damit nicht irgendetwas Rundes, dem bei Bedarf irgendwelche Eigenschaften zugesprochen werden, sondern ein Kreis ist definiert als die Menge aller Punkte, die vom Mittelpunkt den gleichen Abstand haben. Und man darf nur diese Eigenschaft benutzen.

Die Erkenntnisse der Mathematik werden in *Sätzen* dargestellt. Hier gilt Ähnliches wie bei den Definitionen: Wir wissen auch immer genau, was wir beweisen müssen oder was wir bewiesen haben.

Der *Beweis* ist die Methode der Mathematik zur Wahrheitssicherung. Das ist das «scharfe Nachdenken» in geordneter Form. Ein Beweis basiert auf rein logischen Schlussfolgerungen, ist also so objektiv wie möglich.

Ich weiß, dass viele Schülerinnen und Schüler sowie manche Studierende Beweise nicht mögen, und ich weiß auch, dass im Schulunterricht immer weniger Beweise vorkommen. Das finde ich nicht nur persönlich schade, sondern es ist ein Fehler. Denn genau dadurch zeichnet sich die Mathematik vor allen anderen Wissenschaften aus, dass man in ihr die Ergebnisse durch reine Logik und deshalb mit einem Höchstmaß an Objektivität erhält.

Denken Sie mal an den Satz des Pythagoras, den berühmtesten mathematischen Satz: In jedem rechtwinkligen Dreieck, dessen kurze Seiten die Längen a und b haben und des-

sen lange Seite die Länge c hat, gilt $a^2+b^2=c^2$. Dieser Satz wurde vor 2500 Jahren zum ersten Mal bewiesen, er gilt heute noch wörtlich so wie damals – und er wird auch in 2500 Jahren noch genauso gelten wie heute und damals! Welche Wissenschaft kann das von sich behaupten?

Mehr Informationen zu diesem und vielen weiteren Büchern aus dem Verlag C.H.Beck finden Sie unter: www.chbeck.de

